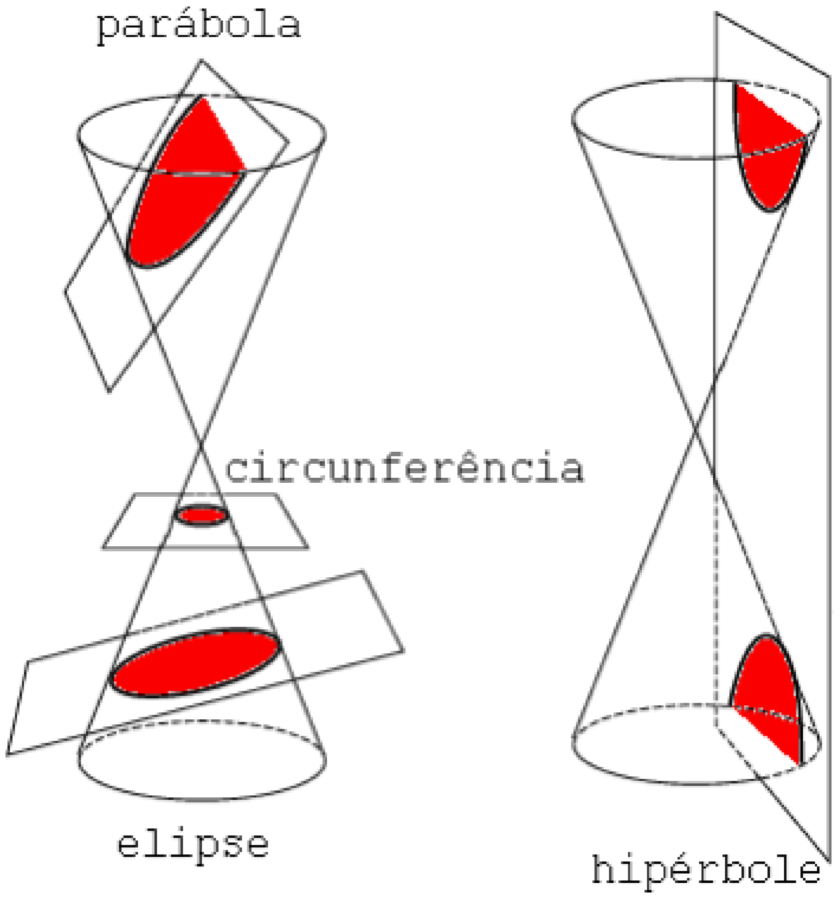
Hipérbole - Aplicações

Prof. Guilherme Furlan
Matemática

Curvas cônicas

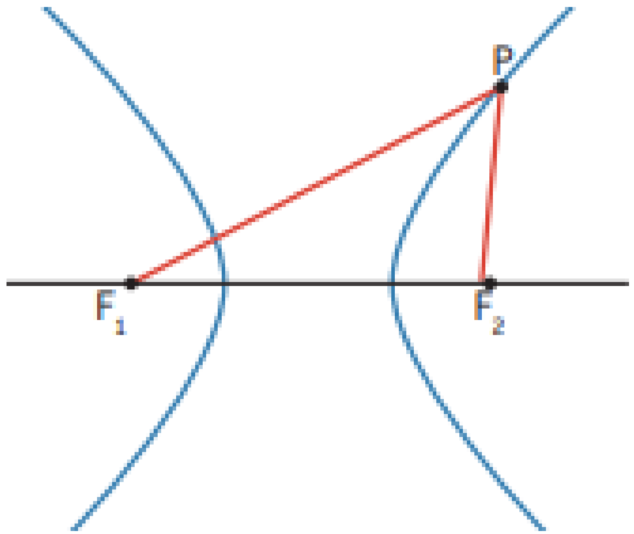
As chamadas curvas cônicas (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) são seções planas numa superfície cônica ilimitada.



(Disponível em: https://www.coladaweb.com . Acesso em: 20 outubro 2020).

Definição

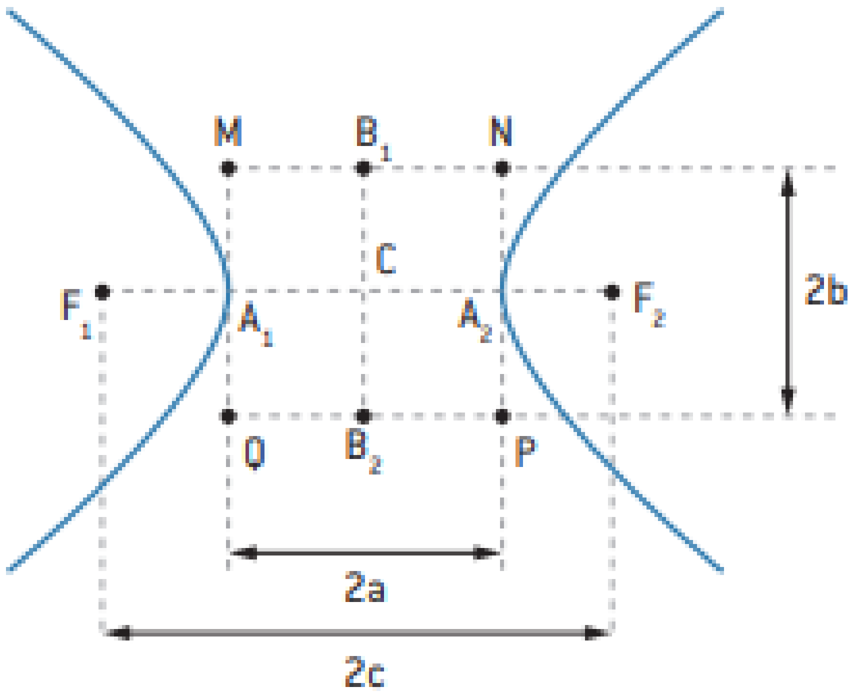
Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Essa constante será representada por 2a, sendo a real e positivo.



$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Elementos da hipérbole

Seja a hipérbole representada por:



Focos: F1 e F2

Vértices: A1 e A2

Eixo real ou transverso: A1A2 = 2a

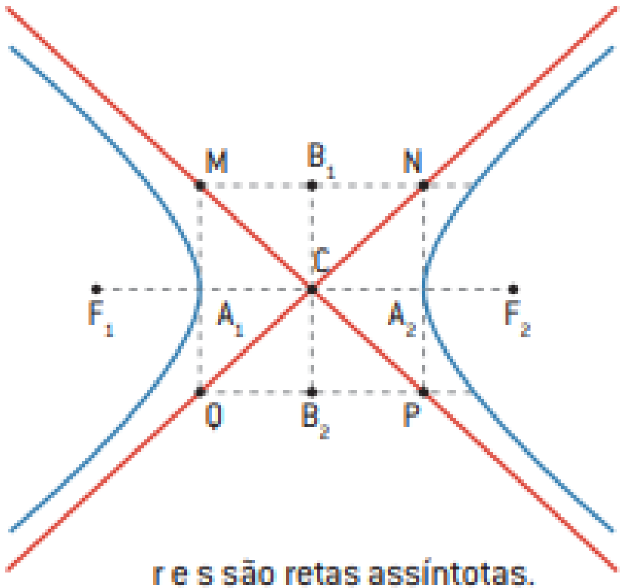
Eixo imaginário ou conjugado: B1B2 = 2b

Distância focal: F1F2 = 2c

O retângulo MNPQ é o retângulo de referência da hipérbole

Elementos da hipérbole

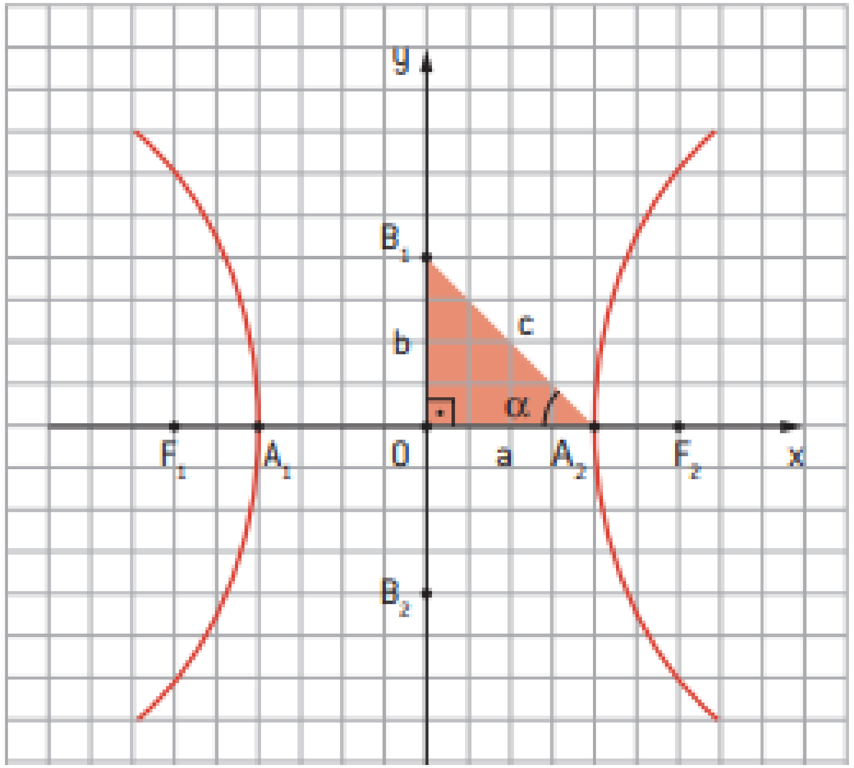
Além desses elementos, vale destacar as retas assíntotas da hipérbole, que contêm as diagonais do retângulo de referência. A hipérbole tende a ficar cada vez mais próxima das retas assíntotas, sem jamais tocá-las.



r e s são retas assíntotas.

Propriedades

Considere a hipérbole representada a seguir:



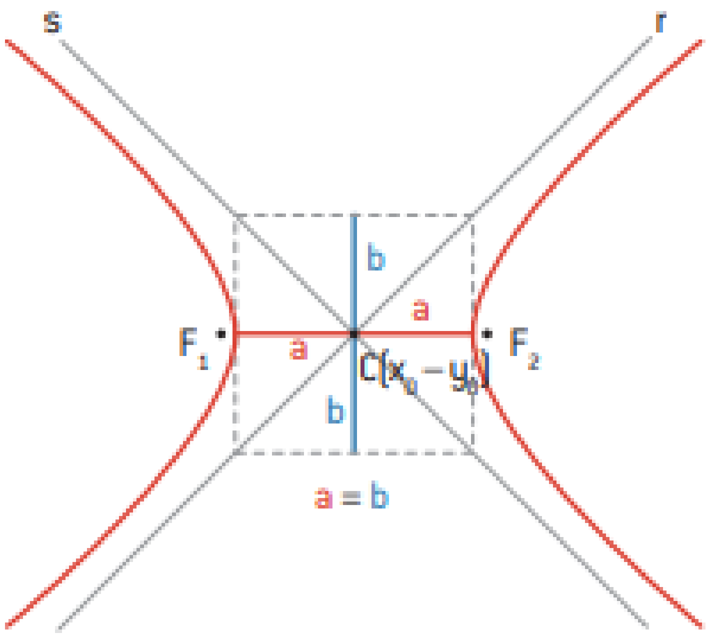
Excentricidade: $e = c/a$

$e > 1$

$c^2 = b^2 + a^2$

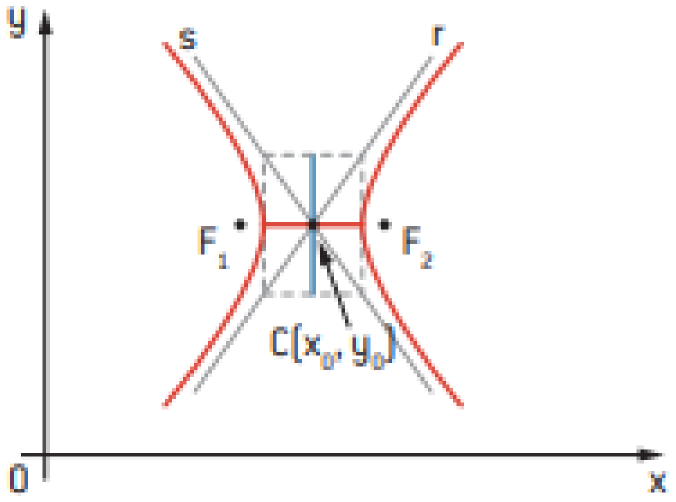
Hipérbole equilátera

Se b = a, temos que o retângulo de referência é um quadrado e a hipérbole é denominada equilátera.

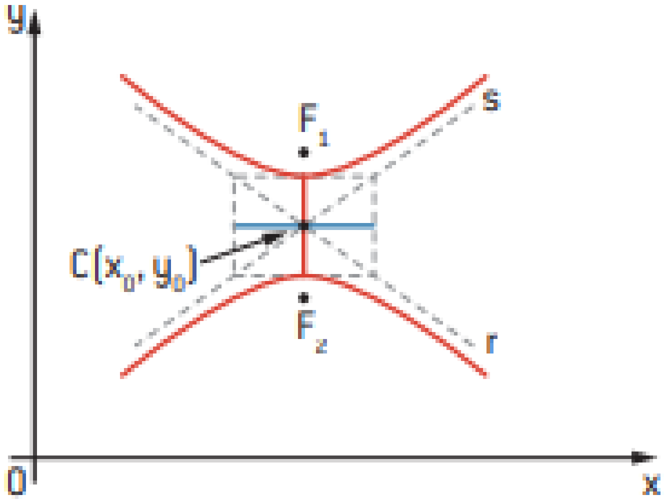


Assíntotas

As retas r e s, assíntotas, passam pelo centro C (x0, y0) da hipérbole.



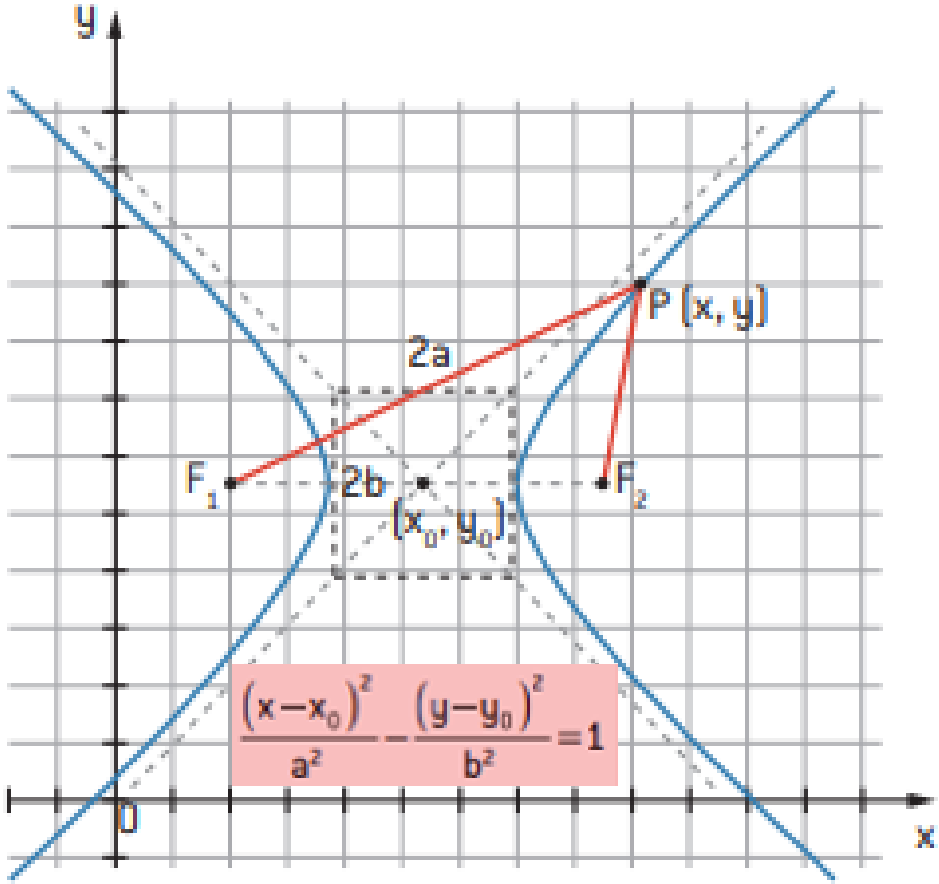
Eixo real paralelo ao eixo da abscissas: b/a e –b/a

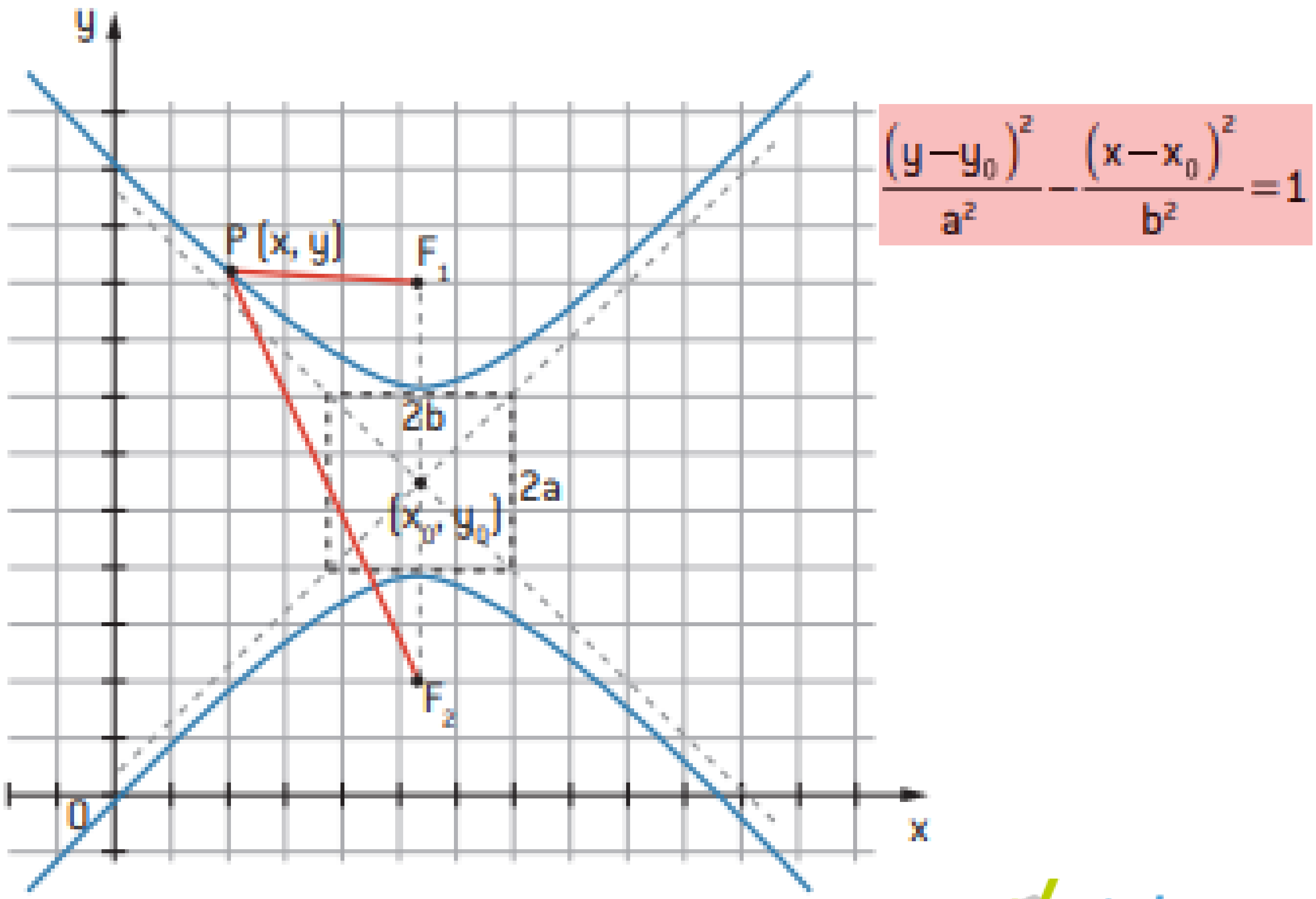


Eixo real paralelo ao eixo das ordenadas: a/b e –a/b

Equação reduzida da hipérbole

Considere uma hipérbole de centro C = (x0, y0)





Exemplo 01

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, calcule sua distância focal.

Organizando a equação: ⇨ $-16(x^2 - 14x) + 9(y^2 - 16y) = 352$

Completar quadrado ⇨ $-16(x^2 - 14x + 49) + 9(y^2 - 16y + 64) = 352 - 784 + 576$

$-16(x - 7)^2 + 9(y - 8)^2 = 144$

Dividindo por 144 ⇨ $$\frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} = 1$$

Logo: $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ -> Distância focal = $2c$ = **10**

Exemplo 02

(FGV-SP) A equação de uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são paralelas aos eixos x e y pode ser expressa na forma: $(x – h)(y – k) = C$, em que (h, k) é o centro da hipérbole e as retas $x = h$ e $y = k$ são as assíntotas. As assíntotas vertical e horizontal da hipérbole de equação $xy + x – 3y – 2 = 0$ são, respectivamente:

Organizando a equação:

$x.(y + 1) – 3(y + 1) + 1 = 0$
$(y + 1).(x – 3) = -1$

Logo: $(h = 3; k = -1)$

$x = 3$; $y = -1$

Exemplo 03

Determine a excentricidade de uma hipérbole cuja equação é dada por: $x^2 - 2y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$?

Organizando a equação: $(x^2 + 2x) - 2(y^2 + 2y) = 3$

Completar quadrado $(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 + 2y + 1) = 3 + 1 - 2$

$(x + 1)^2 - 2(y + 1)^2 = 2$

Dividindo por 2 $$\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

Logo: $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$ -> Excentricidade = c/a = **$\sqrt{6}/2$**

OBRIGADO

Prof. Guilherme Furlan
Matemática