MATEMÁTICA
Inequação exponencial

1. (Udesc 2016) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7\left(7^{x^2+1}\right)^{2x-1} \geq 0$ é:
a) $[-2,\ -1]$
b) $[0,\ 1]$
c) $]-\infty,\ -2] \cup [-1,\ 0] \cup [1,\ \infty]$
d) $[0,\ +\infty[$
e) $[-2,\ -1] \cup [0,\ 1]$

2. (Uefs 2016) Em uma cultura bacteriana, há inicialmente $400.000.000$ bactérias do tipo X e apenas 400 do tipo Y. A cada hora, aproximadamente, a população de X cai pela metade e a de Y dobra de tamanho.
O total de bactérias nessa cultura ficará abaixo de $1.000.000$ durante cerca de
a) $1h$
b) $2h$
c) $3h$
d) $4h$
e) $5h$

3. (Uerj 2014) Em um recipiente com a forma de um paralelepípedo retângulo com $40cm$ de comprimento, $25cm$ de largura e $20cm$ de altura, foram depositadas, em etapas, pequenas esferas, cada uma com volume igual a $0{,}5\ cm^3$. Na primeira etapa, depositou-se uma esfera; na segunda, duas; na terceira, quatro; e assim sucessivamente, dobrando-se o número de esferas a cada etapa.
Admita que, quando o recipiente está cheio, o espaço vazio entre as esferas é desprezível.
Considerando $2^{10} \cong 1000$, o menor número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é:
a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

4. (Uepb 2013) Sendo $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$, onde n é um número natural não nulo, o menor valor de n para o qual $S_n > \frac{4}{9}$ é:
a) 3
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

5. (Espcex (Aman) 2012) A inequação $10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$, em que x é um número real,
a) não tem solução.
b) tem apenas uma solução.
c) tem apenas soluções positivas.
d) tem apenas soluções negativas.
e) tem soluções positivas e negativas.

GABARITO:

Resposta da questão 1: [E]
Tem-se que

$$\left(\frac{1}{7^x}\right)^{x^3-4} - 7(7^{x^2+1})^{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 7^{-x^4+4x} \geq 7^{2x^3-x^2+2x}$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x+2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } 0 \leq x \leq 1.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S = [-2,\ -1] \cup [0,\ 1]$.

Resposta da questão 2: [B]
O total de bactérias, n, da cultura, t $horas$ após o instante inicial, é dado por

$$n = 400000000 \cdot \frac{1}{2^t} + 400 \cdot 2^t.$$

Daí, se $n < 1000000$, então

$$400000000 \cdot \frac{1}{2^t} + 400 \cdot 2^t < 1000000 \Leftrightarrow (2^t - 1250)^2 < 562500$$
$$\Leftrightarrow |2^t - 1250| < 750$$
$$\Leftrightarrow 500 < 2^t < 2000$$
$$\Leftrightarrow 2^9 - 12 < 2^t < 2^{11} - 48.$$

Portanto, o resultado pedido é, aproximadamente, 2 horas.

Resposta da questão 3: [B]
Como o número de esferas acrescentadas a cada etapa cresce segundo uma progressão geométrica de razão 2, segue que, após n etapas, o volume ocupado pelas esferas é igual a $0{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n-1}{2-1}$. Daí, o número de etapas necessárias para que o volume total de esferas seja maior do que o volume do recipiente é tal que

$$0{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} > 40 \cdot 25 \cdot 20 \Leftrightarrow 2^n > 40 \cdot 1000 + 1$$
$$\Rightarrow 2^n > 40 \cdot 2^{10} + 1.$$

Como $2^5 < 40 < 2^6$, segue que $n = 16$.

Resposta da questão 4: [A]
Como S_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo igual a $\frac{1}{3}$, e razão também igual a $\frac{1}{3}$, temos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{3^n}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_n > \frac{4}{9} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) > \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{8}{9} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow n > 2, \end{aligned}$$

isto é, o menor valor natural de n para o qual $S_n > \frac{4}{9}$ é $n = 3$.

Resposta da questão 5: [D]
Resolvendo a inequação, obtemos:

$$\begin{aligned} &10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111 \Leftrightarrow \\ &10^x \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) < 11111 \Leftrightarrow \\ &10^x \cdot 11111 < 11111 \Leftrightarrow \\ &10^x < 10^0 \Leftrightarrow \\ &x < 0. \end{aligned}$$

Portanto, a inequação dada tem apenas soluções negativas.