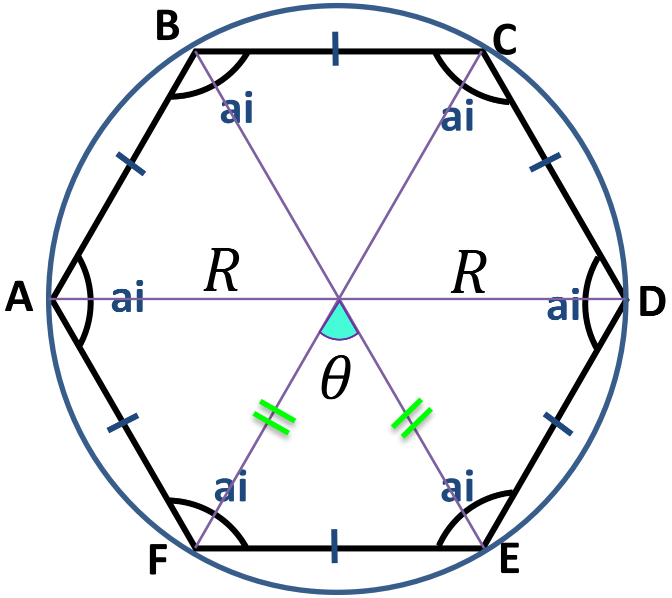
Relações métricas nos Polígonos Regulares

Prof. Léo
Matemática

Polígonos Inscritíveis

Em um polígono inscrito, todos os vértices são pontos de uma mesma circunferência

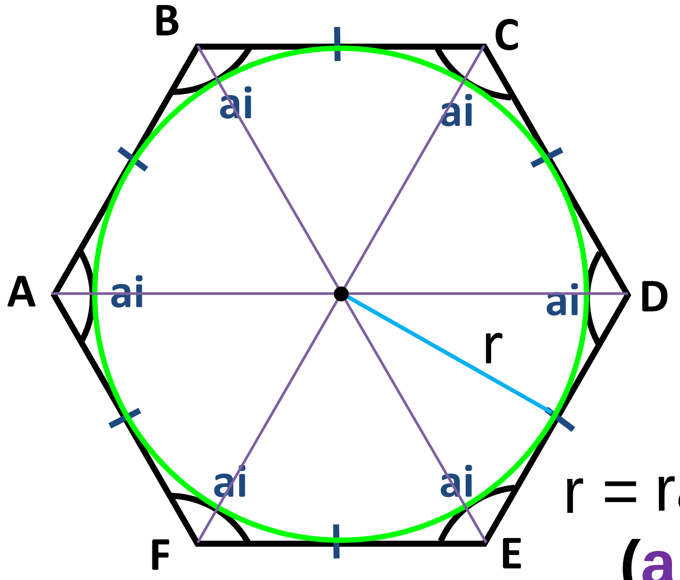


Ângulo Central

$$\theta = \frac{360^o}{n}$$

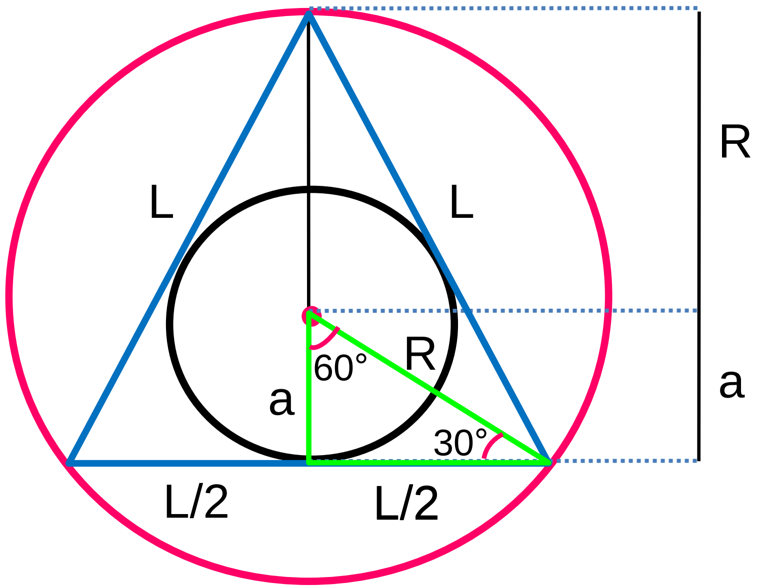
Polígonos Circunscritíveis

Em um polígono circunscrito, todos os lados são tangenciados por uma mesma circunferência



r = raio inscrito (**apótema**)

Triângulo Equilátero



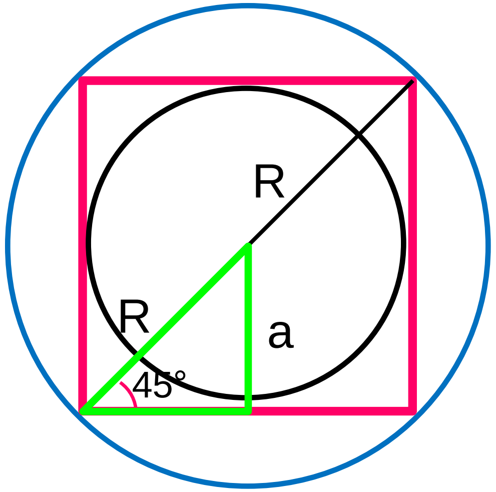
$$A_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \qquad h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

$$R = 2a$$

$$a = \frac{h}{3}$$

Quadrado



R

a

$\frac{l}{2}$

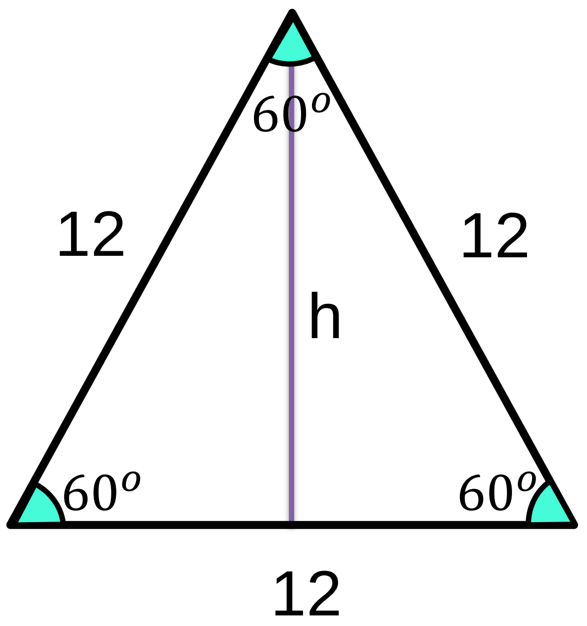
Área: $A = l^2$

Diagonal: $l\sqrt{2}$

Raio da circunferência circunscrita: $\frac{l\sqrt{2}}{2}$

Apótema: $\frac{l}{2}$

(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em *cm*²) do quadrado.



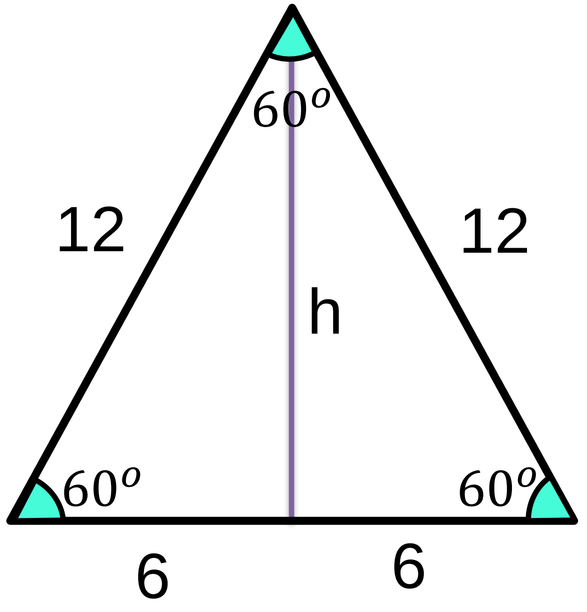
$$\mathrm{h} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\mathrm{h} = 6\sqrt{3}}$$

Polígonos Regulares

(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em *cm²*) do quadrado.



$$12^2 = 6^2 + h^2$$

$$144 = 36 + h^2$$

$$108 = h^2$$

$$\sqrt{108} = \sqrt{h^2}$$

$$\boxed{\mathrm{h} = 6\sqrt{3}}$$

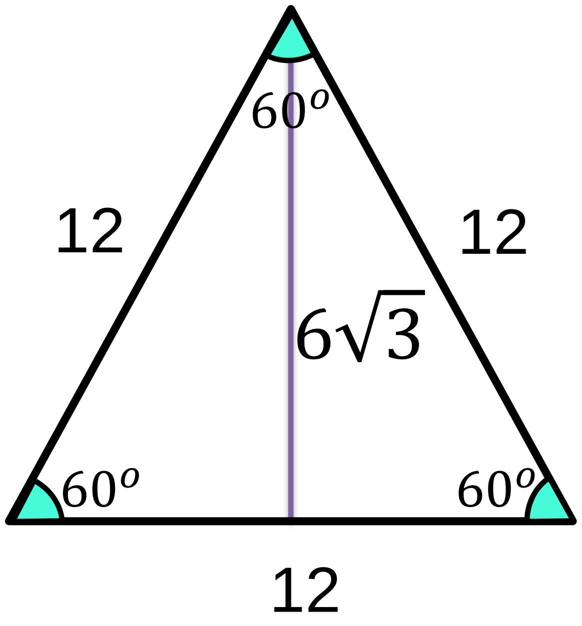
$$sen60^o = \frac{co}{hip}$$

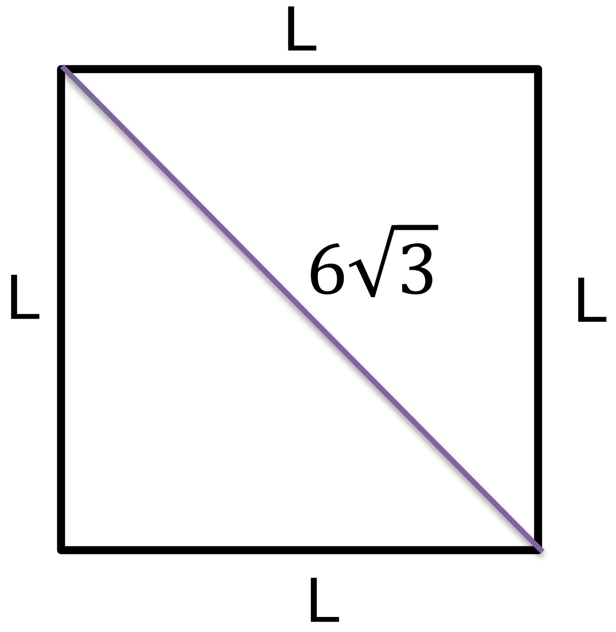
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{12}$$

$$2h = 12\sqrt{3}$$

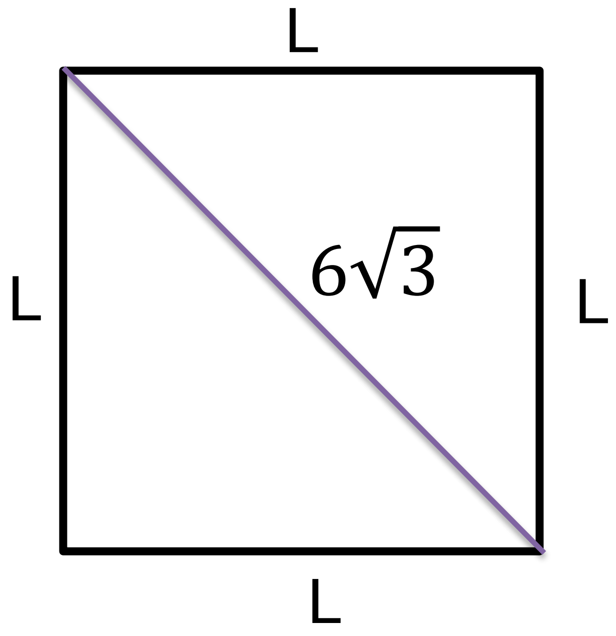
$$\boxed{\mathrm{h} = 6\sqrt{3}}$$

(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em cm^2) do quadrado.





(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em *cm*²) do quadrado.



$$d = l\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{3} = l\sqrt{2}$$

$$l = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$l = \frac{6\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{l = 3\sqrt{6}}$$

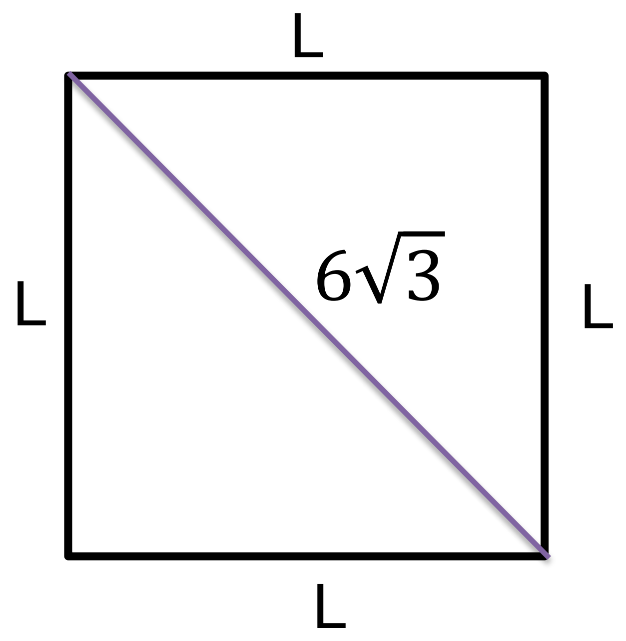
$$A = l^2$$

$$A = \left(3\sqrt{6}\right)^2$$

$$A = 9.6$$

$$\boxed{A = 54\ cm^2}$$

(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em *cm²*) do quadrado.



$$\left(6\sqrt{3}\right)^2 = l^2 + l^2$$

$$108 = 2l^2$$

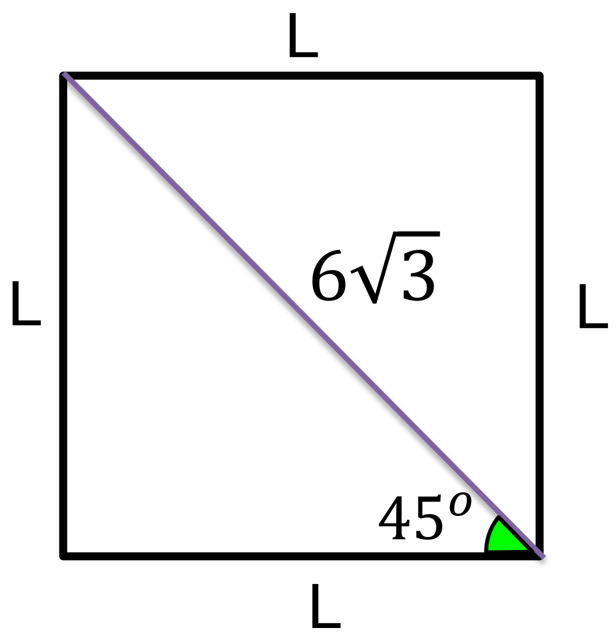
$$\boxed{l^2 = 54}$$

$$A = l^2$$

$$\boxed{A = 54\ cm^2}$$

Polígonos Regulares

(UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em *cm*²) do quadrado.



$$sen45^o = \frac{co}{hip}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{l}{6\sqrt{3}}$$

$$2l = 6\sqrt{6}$$

$$\boxed{l = 3\sqrt{6}}$$

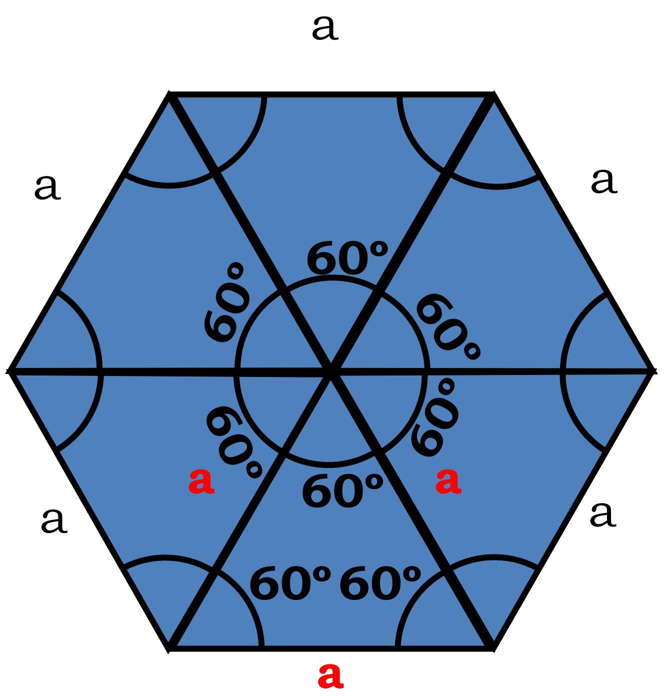
$$A = l^2$$

$$A = \left(3\sqrt{6}\right)^2$$

$$A = 9.6$$

$$\boxed{A = 54\ cm^2}$$

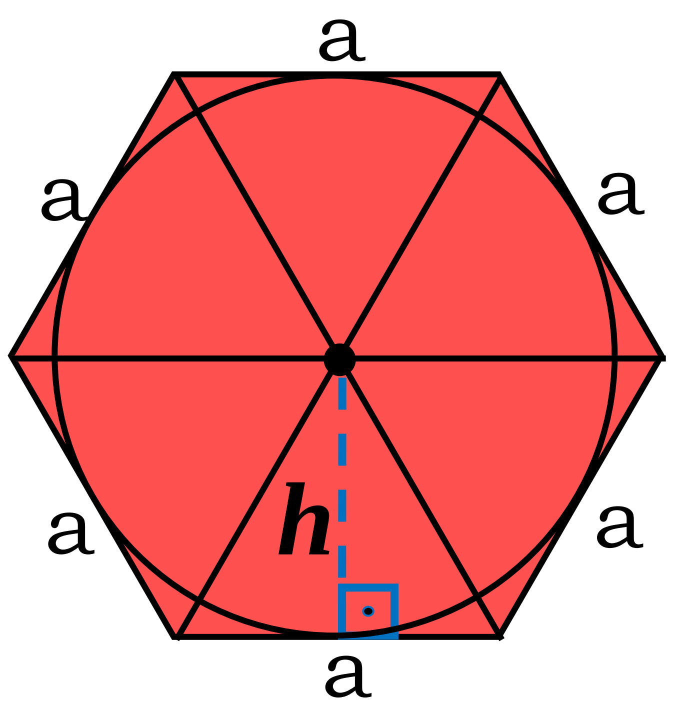
HEXÁGONO REGULAR



$$A_{\Delta eq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{HEX} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$$

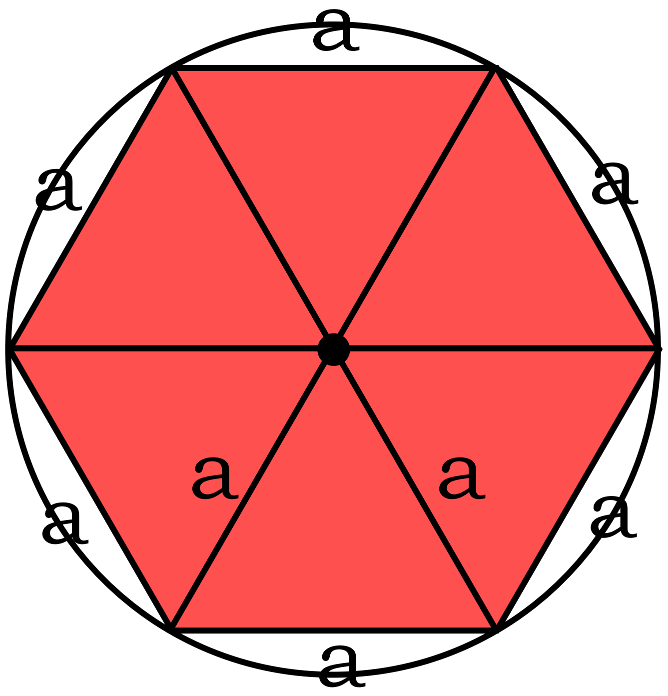
Hexágono Circunscrito



$$r = h_{\Delta eq} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

apótema

Hexágono Inscrito

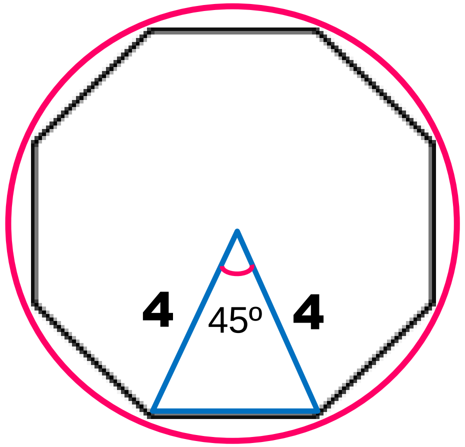


$$\boxed{R = a}$$

lado

Exemplo: Dado um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 4 cm, determine:

a) Sua área:



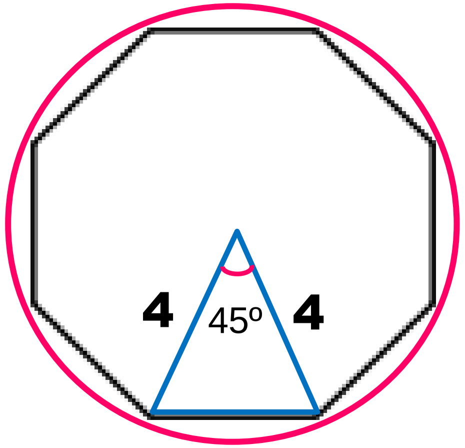
$$A_8 = 8.\left(\frac{4.4.sen45^0}{2}\right)$$

$$A_8 = 8.\frac{8\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{A_8 = 32\sqrt{2}\ cm^2}$$

Exemplo: Dado um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 4 cm, determine:

b) A medida do seu lado:



$$l^2 = 4^2 + 4^2 - 2.4.4.\cos 45^0$$

$$l^2 = 16 + 16 - 32.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l^2 = 32 - 16\sqrt{2}$$

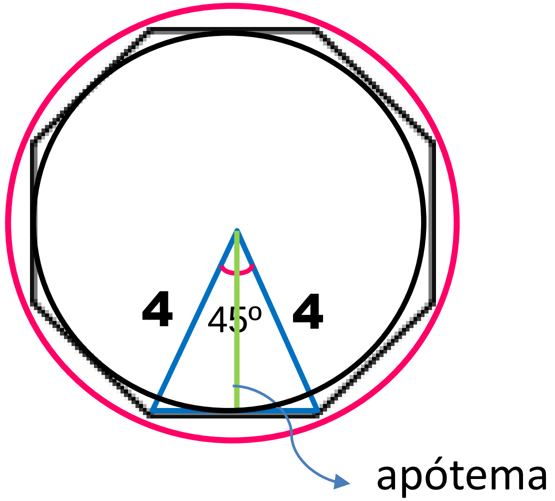
$$l^2 = 16.(2 - \sqrt{2})$$

$$\sqrt{l^2} = \sqrt{16.\left(2 - \sqrt{2}\right)}$$

$$\boxed{l = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Dado um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio 4 cm, determine:

c) A medida de sua apótema: $\boxed{l = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}}$



Primeira opção: **Utilizar Pitágoras**

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2$$

$$4^2 = \left(2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + a^2$$

$$16 = 4(2-\sqrt{2}) + a^2$$

$$16 = 8 - 4\sqrt{2} + a^2$$

$$8 + 4\sqrt{2} = a^2$$

$$4.(2+\sqrt{2}) = a^2$$

$$\sqrt{4(2+\sqrt{2})} = \sqrt{a^2} \qquad \boxed{a = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Segunda opção: **Utilizar a área**

$$A_8 = 32\sqrt{2}\,cm^2$$

$$32\sqrt{2} = 16\sqrt{2-\sqrt{2}}.a$$

$$a = \frac{32\sqrt{2}}{16\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\;\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{4-2}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \qquad \boxed{a = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Obrigado

Prof. Léo
Matemática