Matrizes
Conceitos e Operações Básicas

Prof. Dé
Matemática

1. Introdução

A organização de informações numéricas em forma de **tabelas** possibilitou o surgimento do estudo de matrizes.

2. Definição

Representação: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \ ou \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \ ou \ \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}$

Ordem da Matriz: A_{mxn}

m = linhas

n = colunas

3. Matriz Genérica

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Lei da Matriz:

01.

Dê a matriz $A = (a_{ij})_{2x3}$, em que $a_{ij} = 2i - j$.

Resolução

A matriz procurada é do tipo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$a_{13} = 2 \cdot 1 - 3 = -1$

$a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$a_{22} = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

$a_{23} = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Logo : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(Enem 2018) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A=[a_{ij}]$, em que $1 \le i \le 5$ e $1 \le j \le 5$, e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas
via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii}=0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

(IFPE 2017) Anselmo (1), Eloi (2), Pedro (3) e Wagner (4) são matemáticos e, constantemente, se desafiam com exercícios. Com base na matriz D, a seguir, que enumera cada elemento a_{ij} representando o número de desafios que "i" fez a "j", assinale, respectivamente, quem mais desafiou e quem foi mais desafiado.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Anselmo e Pedro.
b) Eloi e Wagner.
c) Anselmo e Wagner.
d) Pedro e Eloi.
e) Wagner e Pedro.

Matrizes especiais

Matriz Linha: Toda matriz que possui apenas uma linha.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Coluna: Toda matriz que possui apenas uma coluna.

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Nula: Quando aij=0

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matriz Quadrada: Quando o número de linhas da matriz A for igual ao número de colunas de A

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & 0\end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Retangular: Quando o número de linhas for diferente do número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Diagonal: Uma matriz quadrada Amxn=(aij) é uma matriz diagonal quando

aij Є R ⇒ i=j e aij=0 ⇒ i≠j

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Identidade: É a matriz diagonal de ordem **n** na qual satisfaz

$a_{ij}=0$, $\forall$ $i \neq j$ e $a_{ij}=1$, $\forall$ $i=j$.

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Transposta: É a matriz cujas linhas são as colunas da matriz A, escritas na mesma ordem, e as colunas de A^t são as linhas de A.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -4 & -7 & 1 \\ 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 8 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Oposta:

Matriz oposta de uma matriz A=(aij)mxn é a matriz B=(bij)mxn tal que bij=-aij.

$$\text{Exemplo:}\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B=-A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Simétrica: $A^t = A$

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -7 \\ 8 & 1 & 3 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Anti-simétrica: $A = -A^t$

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 7 \\ 8 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Triangular: Matriz quadrada, na qual os elementos situados acima (triangular inferior) ou abaixo (triangular superior) da diagonal principal são todos nulos.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

Matrizes especiais

Matriz Singular: Uma matriz quadrada é dita singular quando não admitir inversa, ou seja, seu determinante é nulo.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes especiais

Matriz Inversível: Uma matriz quadrada é dita inversível ou regular, quando admite inversa, ou seja, seu determinante é diferente de zero.

$$\text{Exemplo: } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se possuírem a mesma ordem e valer a igualdade

$$a_{ij} = b_{ij} \ \forall \ i, j.$$

Exemplo 3: Encontre os valores de x, y e z.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2z \\ 2x & 7 \end{pmatrix} \qquad x = 3 \qquad y = 7 \qquad z = -1$$

Adição e subtração de matrizes

Adição de Matriz: Dadas as matrizes A=(aij)mxn e B=(bij)mxn é definida por A + B = C = (cij)mxn, então temos cij = aij + bij.

$$\text{Exemplo}: \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Adição e subtração de matrizes

Subtração de Matrizes: Consideremos duas matrizes A e B, ambas de mesma ordem $m \times n$. Chamamos de **diferença** entre A e B (indicamos com A – B) a soma de A com a oposta de B.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Adição e subtração de matrizes

Propriedades da Adição:

Sendo A, B e C matrizes $m \times n$ e O a matriz nula $m \times n$, valem as seguintes propriedades.

1ª) $A + B = B + A$ (comutativa)

2ª) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)

3ª) $A + O = O + A = A$ (elemento neutro)

4ª) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (elemento oposto)

5ª) $(A + B)^t = A^t + B^t$

Multiplicação de matrizes por um número real

Consideremos uma matriz *A*, de ordem *m* × *n*, e um número real a . O **produto** de a por A é uma matriz *B*, de ordem *m* × *n*, obtida quando multiplicamos cada elemento de *A* por . Indicamos: B = a.A

$$\text{Exemplo}: 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$