

פרק 1 - אינדוקציה

תרגיל 1:

הוכיחו שלכל $n \geq 1$

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

תרגיל 2:

הוכיחו שלכל $n \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

תרגיל 3:

הוכיחו ש- $n^3 - n$ מתחלק ב-6 לכל $n \in \mathbb{N}$

תרגיל 4:

הוכיחו ש- $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ מתחלק ב-7 לכל $n \in \mathbb{N}$.

תרגיל 5:

הוכיחו כי לכל $q \neq 1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

תרגיל 6:

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ ו- $x \geq -1$ מתקיים

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

תרגיל 7:

הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

תרגיל 8:

תהי $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} \\ a_1 = 1 \end{cases}$ הראו ש- $a_n \leq 4$ לכל n טבעי.

תרגיל 9:

נגדיר נוסחת נסיגה –

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad a_1 = 0$$

ונראה ש-

$$0 \leq a_n \leq 2$$

תרגיל 10:

נראה שלכל $n \geq 1$ אז מתקיים ש-

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

תרגיל 12:

תהי $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \end{cases}$ סדרת פיבונאצ'י הראו ש-

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

תרגיל 13:

נגדיר סדרה $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 1$$

הראו שמתקיים

$$0 \leq a_n \leq 4$$

תרגיל 14:

הראו שכל מספר שלם חיובי n יכול להיכתב כסכום של חזקות של 2

כאשר כל חזקה מופיעה לכל היותר פעם אחת.

$$\text{לדוגמא } 10 = 2^3 + 2^1$$

תרגיל 15:

הראו שכל מספר טבעי $n \geq 8$ ניתן לרישום כסכום של המספרים 3 ו-5.

תרגיל 16:

תהי F_n סדרת פיבונאצ'י

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \end{cases}$$

הוכיחו ש-

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

תרגיל 17:

תהי F_n סדרת פיבונאצ'י

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases}$$

הוכיחו ש-

$$F_1 + F_3 + F_5 \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

תרגיל 18:

תהי F_n סדרת פיבונאצ'י

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases}$$

הוכיחו ש-

$$F_2 + F_4 + F_6 \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

פרק 2 – קומבינטוריקה בסיסית

תרגיל 1:

כמה תוצאות שונות יכולים לקבל כאשר מטילים קוביה 3 פעמים?

תרגיל 2:

כמה טפסי לוטו ניתן למלא?

(בוחרים 6 מספרים מ-1 עד 37 ללא חזרה ומספר אחד מ-1-7).

תרגיל 3:

בהינתן מבחן אמריקאי עם 10 שאלות ולכל שאלה יש 4 תשובות אופציונליות

בכמה אופנים ניתן לענות על המבחן?

תרגיל 0 –

חשב את

$$\binom{7}{2}, \binom{9}{3}, \binom{20}{1}, \binom{2n}{n}, \binom{5}{4}, \binom{9}{0}$$

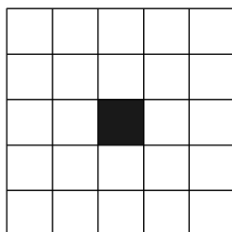
תרגיל 1:

בכמה אופניים 4 אנשים יכולים לשבת בשורה עם 5 כיסאות?

תרגיל 2:

בשרטוט הנ"ל יש ריבועים מגדלים 1×1 עד 5×5

כמה מהריבועים הללו מכילים את הריבוע השחור?



תרגיל 3:

פלינדרום זו מילה שאם נקרא אותה משמאל לימין או מימין לשמאל נקבל את אותה המילה

כמה פלינדרום יש באורך 10 מעל המספרים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

תרגיל 4:

בהינתן פוליון – אלכסון בפוליון מוגדר על ידי חיבור זוג קודקודים לא סמוכים על ידי ישר.

כמה אלכסונים יש בפוליון עם n קודקודים?

פתרון:

תרגיל 6:

ליוני יש 6 ספרים הוא רוצה לבחור מתוכם 4 ספרים
ולקרוא אותם מבלי להתחשב בסדר הבחירה של הספרים בכמה אופניים יוני יכול לעשות זאת?

פתרון:

תרגיל 6:

במבחן אמריקאי יש 10 שאלות ולכל שאלה יש את התשובה אמת או שקר
בכמה אופנים שונים ניתן לפתור את המבחן?

פתרון

$$2^{10}$$

תרגיל 7:

במבחן אמריקאי יש 10 שאלות ולכל שאלה יש את התשובה אמת או שקר
בנוסף ידוע ש-4 תשובות אמת ו-6 תשובות שקר
בכמה אופניים ניתן לפתור את המבחן אם מנחשים 4 פתרונות אמת ו-6 תשובות שקר?

תרגיל 9:

ציפי, דני, יואב, ואייל עמית יושבים סביב שולחן
בכמה אופנים ניתן לסדר אותם סביב השולחן?

תרגיל 9 :

בכיתה יש 15 בנים ו-12 בנות ואנחנו צריכים לבחור ועדת תלמידים שתציג את הכיתה ובוועדה יש 6 אנשים בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

סעיף א – ללא שום מגבלה

סעיף ב– שיהיו יותר בנים מבנות

סעיף ג – שיהיו יותר בנות מבנים

סעיף ד – שיהיה מספר זהה של בנים ובנות.

תרגיל 11:

הראו ש-

באופן אלגברי

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

והסבירו את המשמעות של השוויון .

תרגיל 1:

כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש לאי שוויון $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq k$?

תרגיל 2:

בכמה דרכים ניתן לפתור את המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

במספרים שלמים כך ש- $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 3$

תרגיל 3:

מה מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$

כאשר $x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$ שלמים אי שליליים וגם x_1 הוא מספר אי זוגי.

תרגיל 4:

מה מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$

כאשר $x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$ וגם x_1 הוא מספר זוגי

תרגיל 5:

בכיתה יש 10 ילדים ויש 4 חוגים שונים.

כדורגל, כדורסל, טניס שחיה ידוע שכל ילד משתתף בבדיקת חוג אחד.

בכמה אופנים שונים ניתן לחלק את הילדים לחוגים השונים?

תרגיל 6:

מצאו את מספר הפתרונות בשלמים למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

כאשר $x_1, x_2 \geq 0$ ו- $0 \leq x_3 \leq 5$

תרגיל 7:

יהיו $1 \leq k \leq n$ שלמים חיוביים.

כמה פונקציות מונוטוניות עולה חלש יש מ- $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ל- $\{1, 2, \dots, k\}$?

$$x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$$

תרגיל 8:

כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לאי שוויון $n < x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 2n$

תרגיל 9:

בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים זהים ל-4 תאים שונים

כך שבתא הראשון יש לכל היותר k כדורים?

כאשר $n \geq k$

תרגיל 10:

בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים כחולים ו-20 כדורים לבנים ל-5 תאים שונים

כך שבכל תא מספר הכדורים לבנים אינו עולה על מספר הכדורים הכחולים?

תרגיל 1:

כמה מספרים שלמים בין 1-100 יש שלא מתחלקים ב-7?

כמה מספרים שלמים בין 1-100 יש שלא מתחלקים ב-7 וב-11?

תרגיל 3:

בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

כך שהמספרים $\{1, 2, 3, 4\}$ נמצאים זה לצד זה בסדר כלשהו?

תרגיל 4:

כמה פונקציות יש בין הקבוצות $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ל- $\{1, 2, 3, \dots, m\}$?

תרגיל 5:

כמה פונקציות חד חד ערכיות יש בין הקבוצות $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ל- $\{1, 2, 3, \dots, n\}$?

תרגיל 6:

בכיתה יש 12 ילדים מתוכם 5 בנות ו-7 בנים בכמה דרכים ניתן לסדר את הילדים בשורה בתנאים הבאים:

1. ללא שום הגבלה

2. כל הבנות חייבות להיות ביחד.

3. אין שתי בנות אחד ליד השנייה.

תרגיל 7:

מטילים 20 קוביות זהות כאשר על כל קוביה מופיעים המספרים 1 – 6

לאחר הטלת כל 20 הקוביות סופרים כמה פעמים כל מספר יצא כמה תוצאות שונות יתכנו?

תרגיל 8:

בכמה דרכים ניתן להרכיב ועדה של 2 גברים ו-3 נשים מתוך קבוצה המרוכבת מ-4 גברים ו-6 נשים

כאשר יש גבר ואישה שלא מוכנים להיות בוועדה ביחד?

תרגיל 9:

נתונים n תאים ו- k כדורים.

בכמה דרכים אפשר להכניס את הכדורים לתאים כאשר

סעיף א:

אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים שונים זה מזה.

סעיף ב:

אסור לשים יותר מכדור אחד בתא והכדורים זהים.

סעיף ג:

אין הגבלה על כמות הכדורים בתא והכדורים שונים זה מזה.

סעיף ד:

אין הגבלה על כמות הכדורים בתא והכדורים זהים.

תרגיל 10:

בהינתן שריג $n \times n$ כל תור אנחנו יכולים ללכת צעד ימינה כלומר $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$

או צעד למעלה $(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$ כמה באופנים ניתן להגיע מ- $(0, 0) \rightarrow (n, n)$

תרגיל 11:

בהינתן שריג $n \times n$ כל תור אנחנו יכולים ללכת צעד ימינה כלומר $(x, y) \rightarrow (x + 1, y)$

או צעד למעלה $(x, y) \rightarrow (x, y + 1)$ כמה באופנים ניתן להגיע מ- $(0, 0) \rightarrow (10, 10)$ כאשר

אסור לעבור בנקודה $(3, 4)$

תרגיל 12:

מצאו את מספר הפתרונות האי שליליים למשוואה

$$rx_1 + x_2 + \dots + x_n = kr$$

כאשר $k, r, n \in \mathbb{N}$

תרגיל 15:

בהינתן $r, n, k \in \mathbb{N}$ כך ש- $r \geq nk$

מצא את מספר הדרכים לחלק r כדורים זהים ל- n תאים שונים כך שבכל תא יש לפחות k כדורים.

פרק 3 – הבינום של ניוטון

תרגיל:

מה המקדם של x^5 בפיתוח של $(1 + x + x^2)^{10}$

תרגיל:

מה המקדם של x^9 בפיתוח של $(1 + x^3 + x^5 + x^7)^{12}$

תרגיל 1:

הוכיחו קומבינטורית את הזהויות הבאות

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

תרגיל 2:

הוכיחו אלגברית את הזהות הבאה

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

תרגיל 3:

הוכיחו קומבינטורית את הזהות הבאה

$$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

תרגיל:

נראה שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

תרגיל:

נראה שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$

תרגיל 5:

הראו שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n$$

תרגיל:

נראה שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

תרגיל:

נראה שלכל $n \geq 1$ מתקיים

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

תרגיל:

זהות ונדרמונדה נראה שלכל $m, n, r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

הוכיחו באופן קומבינטורי

תרגיל :

נראה ש-

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

לכל $n, r \in \mathbb{N}$ כאשר $n \geq r$

תרגיל 6:

הראו שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \left(\frac{1}{n+1} \right) (2^{n+1} - 1)$$

תרגיל 7:

הראו שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$$

תרגיל 8:

כאשר $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

תרגיל 10:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} = 2^{2n-2}$$

תרגיל 11:

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$$

פרק 4 – הכלה והדחה

תרגיל:

מצא את מספר הפתרונות במספרים שלמים אי שלילים –

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

כך ש- $x_1 \leq 5, x_2 \leq 6, x_3 \leq 7$

תרגיל

מצא את מספר הפונקציות שהן על מ- $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ל- $\{1, 2, 3, \dots, m\}$

תרגיל:

יהי $n \geq 3$ מספר שלם מהו מספר הפונקציות חח"ע ועל

$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ כך ש- $f(x) \neq x$ לכל $x \in \{1, 2, \dots, n\}$.

תרגיל-

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 10^{40} \text{ or } n \mid 20^{30}\}$$

מה גודל הקבוצה ?

תרגיל:

קבוצה של 100 תלמידים נבחנו ב- מתמטיקה, אנגלית ולשון.

ידוע ש- 92 עברו את המבחן בלשון, 75 עברו את המבחן באנגלית ו- 63 עברו את המבחן במתמטיקה.

בנוסף ידוע ש- לכל היותר 65 תלמידים עברו את המבחן בלשון ואנגלית,

לכל היותר 54 תלמידים עברו את המבחן בלשון ומתמטיקה ולכל היותר 48 תלמידים עברו את המבחן באנגלית ומתמטיקה.

מה המספר התלמידים האפשרי הגדול ביותר של תלמידים שעברו את כל המבחנים?

תרגיל:

n תלמידים מגיעים לאספת הורים בבית הספר עם שני ההורים שלהם.

בכמה דרכים ניתן לחלק את $3n$ האנשים לקבוצות מגודל 3 כך שבכל קבוצה יש

תלמיד, אבא של תלמיד מסוים, אמא של תלמיד מסוים ואף תלמיד לא נמצא בקבוצה עם שני הוריו.

תרגיל:

בכמה אופנים ניתן לסדר

3 כדורים שחורים זהים.

4 כדורים אדומים זהים.

5 כדורים לבנים זהים.

בשורה כך שאין מצב שכל הכדורים מאותו צבע יוצרים בלוק.

תרגיל:

בהינתן

$k, n, r \in \mathbb{N}$ הראה שמספר הפתרונות בשלמים אי שלילים למשוואה

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

כך ש- $0 \leq x_i \leq k$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$

נתון על ידי

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{r - (k+1)i + n - 1}{n-1}$$

תרגיל:

בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה n זוגות $\{M_i, W_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ כך ש-

M_i לא סמוך ל- W_i לכל $i = 1, 2, \dots, n$.

תרגיל:

מצא בכמה דרכים ניתן לחלק r כדורים זהים ל- n תאים שונים כך שכל תא לא ריק וגם

$$r \geq n$$

סעיף ב:

הראה ש-

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n+r-i-1}{r} = \binom{r-1}{n-1}$$

תרגיל:

יהי B תת קבוצה של A כך ש- $|A| = n$ וגם $|B| = m$ מצא את מספר תת קבוצות מגודל r של A

שמכילה את B כתת קבוצה כאשר $m \leq r \leq n$.

תרגיל:

יהיו $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות סופיות ונראה ש-

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| \geq \sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

פרק 5 – מספר קטלן

תרגיל 1:

מצאו את מספר המסלולים מ $(0,0) \rightarrow (n,n)$ שכל צעד הוא ימינה או למעלה ולא חוצה את $y = x$

תרגיל:

מצא את מספר הסדרות האי שליליות מאורך $2n + 1$ המתחילות ומסתיימות ב-0 כך ש

$$|a_{n+1} - a_n| = 1$$

תרגיל 3:

יהיו $2n$ אנשים עם גובה שונה אנחנו רוצים לסדר אותם בשתי שורות של n אנשים כך שאם נקרא את המטריצה $2 \times n$ משמאל לימין נקבל סדרה עולה ואם נקרא את המטריצה מלמעלה למטה נקבל גם סדרה עולה. כמה סידורים אפשריים יש?

תרגיל:

נתון ישר ועליו $2n$ נקודות. דני רוצה להציב n קשתות מעל הישר כך שכל קשת תחבר 2 נקודות, כל נקודה שייכת לקשת אחת בלבד והקשתות לא חוצות זו את זו. באותו אופן נחבר בין הקשתות גם מתחת לקו הישר וגם קשתות הפוכות לא חוצות זה את זה. בכמה דרכים דני יכול לבנות מערכת כזו. למשל עבור $n = 2$

תרגיל:

חשבו את מספר הסדרות

$$a_n \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}^{4n}$$

כך שכל וקטור מופיע בדיוק n פעמים

וגם לכל k מתקיים ש- $\sum_{m=1}^k a_m \in \mathbb{N}^2$ כלומר שתי הקואורדינטות אי שליליות

פרק 6 – נוסחאות נסיגה

תרגיל 1:

מצא את הנוסחה הסגורה לנוסחת הנסיגה –

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \end{cases}$$

תרגיל 2:

מצא את הנוסחה הסגורה לנוסחת הנסיגה –

$$\begin{cases} a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3} \\ a_0 = 0 \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \end{cases}$$

תרגיל 3:

מצא את הנוסחה הסגורה לנוסחת הנסיגה –

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \end{cases}$$

תרגיל 4:

מצא את הנוסחה הסגורה לנוסחת הנסיגה –

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \end{cases}$$

תרגיל 5:

הפכו את הנוסחת הנסיגה להומוגנית.

$$a_n = 2a_{n-1} + 20$$

תרגיל 6:

רשמו מה עלינו לנחש

$$a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n$$

כאשר מתקיים

$$f(n) = 2^n + 8^n$$

רשמו מה עלינו לנחש

$$a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n$$

כאשר מתקיים

$$f(n) = (n^2 + 2n + 1)2^n$$

רשמו מה עלינו לנחש

$$a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n$$

כאשר מתקיים

$$f(n) = n2^n + n^2 3^n$$

תרגיל:

יהי n מספר שלם אי שלילי ויהיה h_n מספר הדרכים לצבוע לוח משבצות בגדול $2 \times n$ בצבעים כחול ולבן כך שאין זוג משבצות סמוכות שצבועות בלבן הוכיחו כי מתקיים

$$h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2}$$

תרגיל:

תהי

$$a_n = \det \begin{pmatrix} p+q & pq & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p+q & pq & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p+q & pq & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p+q & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p+q & pq \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p+q \end{pmatrix}_{n \times n}$$

כאשר $p, q \neq 0$ מצאו נוסחת נסיגה לדטרמיננטה וחשבו אותה.

תרגיל:

בהינתן $n \in \mathbb{N}$ מצא את כמות המספרים עם n ספרות חיוביות המורכבות 1,2,3,4 כך ש-1,2 לא סמוכות.

תרגיל:

בהינתן $n \in \mathbb{N}$ מצא את מספר הסדרות מעל $\{0,1\}$ מאורך n כך שאין 00

תרגיל:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1}^2 a_{n-2}^3 \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$$

לכל $n \geq 2$ מצאו נוסחת ישירה לאיבר הכללי a_n של הסדרה.

תרגיל:

מצא את הנוסחת נסיגה למספר המילים באורך n מעל $\{0,1,2\}$ ללא הרצפים הבאים:

סעיף א – ללא 22.

סעיף ב- ללא 12

תרגיל:

מצאו את מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות 0,1,2 ואינן מכילות את הרצף 00,11,22

תרגיל 2:

לכל $n \geq 0$ שלם נסמן ב- D_n את מספר התמורות על $[n]$ ללא נקודת שבת.

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ מתקיים ש-

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

תרגיל:

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות של מספרים אי זוגיים שנסכמות ל- n

הוכיחו כי a_n מקיימת את נוסחאת הנסיגה של מספרי פיבונאצ'י $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

שאלה -

נסמן ב- a_n את מספר הפונקציות $f: \{1,2,3, \dots, n\} \rightarrow \{1,2,3, \dots, n\}$ כך שמתקיים -

$$f(f(x)) = x$$

הראו כי מתקיים

$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$$

פתרון:

פרק 7 – הערכה אסימפטוטית

תרגיל

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$n^{\frac{1}{3}} = O\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$$

כאשר a, b, k קבועים חיוביים כלשהם. $a \cdot n^k = \theta(b \cdot n^k)$

$$n! = O(n^n)$$

$$2^n = O(n!)$$

תרגיל:

מצאו חסם הדוק לטור

$$\sum_{i=1}^n i^k$$

כאשר $k \geq 0$.

1. על ידי פיצול הטור לשני חלקים.

2. על ידי קירוב של הטור בעזרת אינטגרל.

3. באיזה שיטה מתקבל קירוב טוב יותר?

תרגיל:

לכל מספר $d \geq 1$ שלם נגדיר את הסדרה

$$S_n^{(d)} = \sum_{i=1}^n i^d$$

נסמן ב- a_d את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(d)}}{n^{d+1}} = a_d$$

פתרון:

$$\sum_{i=1}^n i^k \sim \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(d)}}{n^{d+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{d+1}}{d+1}}{n^{d+1}} = \frac{1}{d+1}$$

אפשר לעשות ישר שטולץ צזארו!!!.

חשבו את a_d

סעיף ב: -

חשבו את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{(d)} - a_d n^{d+1}}{n^{d+1}}$$

תרגיל

הוכיחו כי

$$\log(n!) = \theta(n \log(n))$$

תרגיל -

הראה את השיוון האסימפטוטי הבא

$$\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = (1 + o(1)) * \frac{2^{3n}}{3}$$

תרגיל:

הוכיחו כי

$$\sum_{k=2}^n \frac{4k^3}{(k^4 + 1)\log(k)} = \theta(\log(\log(n)))$$

תרגיל:

מלאו את המשבצות באחד מבין הסימונים הבאים

$$o, \omega, \Theta$$

בהתאים ליחס בין f ל- g הוכיחו את טענותיכם.

תרגיל 1:

$$\left(\frac{n^3 + \ln(n^3)}{n^3}\right)^{n^3} = ? \quad (8^{\ln(n)})$$

$$\binom{2n}{n+23} = \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\binom{2n}{n+23} = \Theta\binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=2}^n (k^7 + 17k) = ? \quad \binom{n}{8}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{k!}{k^k} = ? \quad (2021)$$

$$\sum_{k=2022}^n \frac{k}{\log^{2021}(k)} = ? \quad (n)$$

תרגיל:

מצאו את ערכו האסימפטוטי של הטור הבא:

$$\sum_{i=1}^n (\log_2(i))^3$$

תרגיל:

נסמן ב- a_n את מספר הסדרות המאוזנות באורך $4n$ מספרי קטלן

ונגדיר

$$b_n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right)^2$$

מה נכון?

$$a_n = o(b_n) \quad , \quad a_n = \Theta(b_n) \quad , \quad a_n = \omega(b_n)$$

פתרון:

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \binom{4n}{2n}$$

$$b_n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right)^2 = \binom{2n}{n}^2$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

תרגיל:

נגדיר את הסדרה

$$a_n = \binom{\binom{n}{2}}{n}$$

ו- $b_n = n!$ קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה והוכיחו אותה

$$a_n = \Theta(b_n), \quad a_n = o(b_n) \quad , \quad a_n = \omega(b_n)$$

פרק 8 – עקרון שובר היונים

תרגיל:

הראו שכל קבוצה של 10 נקודות שנבחרו בתוך ריבוע 3×3 אז יש שתי נקודות שהמרחק ביניהם הוא לכל היותר $\sqrt{2}$.

פתרון:

תרגיל:

הוכיחו כי בכל קבוצה של 11 מספרים שלמים שונים בה אף מספר לא מתחלק ב-20 קיימים שני איברים שונים

a, b כך שלפחות אחד מבין המספרים $a - b, a + b$ מתחלק ב-20.

פתרון:

תרגיל:

בהינתן קבוצה של 5 מספרים טבעיים.

נראה שלכל תמורה שלהם $a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} a_{i_5}$ אז

$$(a_{i_1} - a_1)(a_{i_2} - a_2) * \dots * (a_{i_5} - a_5)$$

זוגי.

תרגיל:

תהי A קבוצה של m מספרים טבעיים כך ש- $m \geq 1$.

ונראה שקיימת תת קבוצה $B \subseteq A$ כך ש-

$$\sum_{x \in B} x$$

מתחלק ב- m .

תרגיל

תהי $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, 188\}$ בת 20 איברים.

הוכיחו כי יש $x, y, z, w \in S$ שונים זה מזה כך ש- 189 מחלק את

$$x - y + z - w$$

תרגיל :

101 מספרים חיוביים שסכומם 300 מסודרים במעגל.

הוכיחו כי ישנה סדרת מספרים רצופים לאורך המעגל שסכומה בדיוק 100.

תרגיל-

הראו כי לכל מספר אי זוגי n קיים מספר שלם חיובי d עבורו n מחלק את $2^d - 1$

תרגיל:

יהי $X \subseteq \{1, 2, \dots, 99\}$ ו- $|X| = 10$ ונראה שזה אפשרי לבחור שתי תתי קבוצות זרות של X

כלומר $Y \cap Z = \emptyset$, כך ש-

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z$$

תרגיל -

בהינתן $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ כך ש- $|A| = n + 1$ נראה שקיימים $a, b \in A$ כך ש-

$a \neq b$ כך ש- $a|b$

תרגיל -

בהינתן $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$ כך ש- $|A| = n + 1$ נראה שקיימים $a, b \in A$ כך ש-

$$\gcd(a, b) = 1$$

פתרון :

פרק 9 – פונקציות יוצרות

תרגיל :

מצא את הפונקציה היוצרת לסדרות הבאות

סעיף א:

$$c_n = 3n + 5$$

סעיף ב:

$$c_n = n^2$$

תרגיל:

מצאו את הפונקציה היוצרת של הבעיות הבאות

כמה פתרונות בשלמים אי שלילים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 = n$

סעיף 1: ללא הגבלה.

סעיף 2: $x_1 < x_2 < x_3$

סעיף 3: x_1, x_2, x_3 כולם שונים.

תרגיל:

3 בנים מטילים קוביה פעם אחת מצא בכמה אופניים סכום ההטלות שלהם יהיה 14 בדיוק.

פתרון:

תרגיל-

חשב את

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

בעזרת פונקציות יוצרות

פתרון:

תרגיל-

חשב את

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

בעזרת פונקציות יוצרות

תרגיל:

מצא נוסחה סגורה לנוסחת הנסיגה של פיבונאצ'י

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

פתרון:

תרגיל:

נגדיר סדרה על ידי $C_0 = 1$ ו-

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

מצאו את הפונקציה היוצרת של הסדרה .

תרגיל:

לרחמים יש מטבעות של שקל, שני שקלים, חמישה שקלים, עשרה שקלים (כמות בלתי מוגבלת מכל מטבע)

בכמה דרכים יכול רחמים להרכיב סכום של n שקלים.

מצאו את הפונקציה היוצרת.

תרגיל:

פתרו את הנוסחת נסיגה בעזרת פונקציה יוצרת

$$a_n - 2a_{n-1} = 2^n$$

כאשר $a_0 = 1$

תרגיל

פתרו את הנוסחת נסיגה בעזרת פונקציות יוצרות

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 5^n$$

כאשר

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

פתרון:

תרגיל:

חשבו את הסכום הבא בעזרת פונקציות יוצרות –

$$\sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{r-k}$$

תרגיל:

חשבו את הסכום הבא בעזרת פונקציות יוצרות –

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

תרגיל:

הוכיחו את הזהות הבאה

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

תרגיל:

נסמן ב- a_n את מספר המספרים ה- n ספרתיים עם ספרות $1, 2, 3, 4, \dots, 9$ שלא מכילים שתי ספרות אי זוגיות עוקבות.

כתבו את הפונקציה היוצרת של a_n הניחו כי $a_0 = 1$

פרק 10 – תורת הגרפים

תרגיל:

יהיו $S_1, S_2, \dots, S_{169} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ תתי קבוצות כך ש- $|S_i| \geq 3$
לכל $1 \leq i \leq 169$ הוכיחו שקיימים i, j, k שונים כך ש-
 $|S_i \cap S_j \cap S_k| \geq 3$

תרגיל:

יהי G גרף פשוט יש להוכיח כי G קשיר או ש- $\overline{G}$ קשיר.

תרגיל:

יהי G גרף פשוט על n קודקודים הוכיחו כי אם לכל $x, y \in V$ מתקיים ש-
 $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$
אז G קשיר.

תרגיל:

יהי G גרף פשוט על n קודקודים הוכיחו כי אם

$$|E| > \binom{n-1}{2}$$

אז G קשיר.

תרגיל:

יהי G גרף דו צדדי פשוט

$$|E| \leq \frac{n^2}{4} \text{ ונראה ש- } |V| = n$$

תרגיל:

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ מספר הגרפים עם קודקודים $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ כך שכל הדרגות זוגיות זה בדיוק

$$2^{\binom{n-1}{2}}$$

פתרון:

תרגיל:

הוכיחו כי אם $\delta(G) \geq 2$ אז G מכיל מעגל

פתרון:

תרגיל:

יהי $G = (A \cup B, E)$ גרף דו צדדי k רגולרי כלומר שכל קודקוד הוא מדרגה בדיוק k הוכיחו או הפריכו $|A| = |B|$

פתרון:

תרגיל:

הוכח כי הכמות המינימלית של צלעות בגרף על n קודקודים שתבטיח קשירות היא

$$\binom{n-1}{2} + 1$$

פתרון:

תרגיל:

בהינתן גרף פשוט $G = (V, E)$ הראו שכמות המשולשים בגרף חסומה מלמטה על ידי

$$\frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4} \right) \quad n = |V|, \quad m = |E|$$

פתרון:

תרגיל:

יהי G גרף k רגולרי עם n קודקודים אז הראו שמספר המשולשים ב G ו- $\overline{G}$ זה

$$\binom{n}{3} - \frac{n}{2} k(n-k-1)$$

פתרון:

תרגיל:

יהי G גרף על $n \geq 4$ קודקודים ודרגות הקודקודים בו הן $d_1, \dots, d_n$ הוכיחו כי אם

$$\sum_{v \in V} \binom{\deg(v)}{2} > \binom{n}{2}$$

אז הגרף מכיל מעגל באורך 4.