

פרק 1 – המטריצה המצורפת

שאלה 1:

חשב את המטריצה המצורפת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

חשב את המטריצה המצורפת

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

שאלה 3:

חשב את המטריצה ההופכית של

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

בהנחה שהמטריצה הפיכה.

שאלה 4:

הראה ש $adj(kA) = k^{n-1}adj(A)$ כאשר A מטריצה מסדר $n \times n$.

שאלה 5:

$$rank(adj(A)) = n \text{ אם ורק אם } rank(A) = n$$

שאלה 6:

$$rank(adj(A)) = 0 \text{ אם ורק אם } rank(A) < n - 1$$

שאלה 7:

$$rank(adj(A)) = 1 \text{ אם ורק אם } rank(A) = n - 1$$

שאלה 8:

הראה ש

$$\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$$

שאלה 9:

הראה ש:

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2} A$$

שאלה 10:

הראה ש

$$\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$$

כאשר A, B מטריצות הפיכות.

שאלה 11:

הראה ש

$$\operatorname{adj}(PAP^{-1}) = P(\operatorname{adj}(A))P^{-1}$$

כאשר A מטריצה הפיכה

שאלה 12:

$$\det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} \dots (A))) = \det(\operatorname{adj}^{(k)}(A)) = \det(A)$$

כאשר A זו מטריצה 2×2 .

שאלה 13

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה.

הוכיחו את הטענות הבאות:

סעיף א

אם A אלכסונית, אז גם $\operatorname{adj}(A)$ אלכסונית.

סעיף ב

אם A סינגולרית, אז גם $\operatorname{adj}(A)$ סינגולרית.

סעיף ג

אם A משולשת עליונה, אז גם $\operatorname{adj}(A)$ משולשת עליונה.

פרק 2 – פולינום

שאלה 1:

פרק את הפולינום לגורמים:

$$16x^3 - 16x^2 - x + 1$$

שאלה 2:

פרק את הפולינום:

$$x^3 - 7x^2 + x - 7$$

שאלה 3:

פרק את הפולינום:

$$x^3 - x^2 + x - 1$$

שאלה 4:

פרק את הפולינום:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$$

שאלה 5:

פרק את הפולינום:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

פרק 3 – לכסון פולינום אופייני

תרגיל 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ לכסן את המטריצה}$$

תרגיל 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ לכסן את המטריצה}$$

תרגיל 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ לכסן את המטריצה}$$

תרגיל 4:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ לכסן את המטריצה}$$

תרגיל 5:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ לכסן את המטריצה}$$

תרגיל 1:

מצא את הפולינום האופייני של

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2:

מצא את הפולינום האופייני של

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3:

יהיו A, B מטריצות מסדר $n \times n$ ונראה שהפולינום האופייני של AB ושל BA זהה.

פתרון:

תרגיל 4:

הראה מבלי להסתמך על משפט קיילי המילטון שיש פולינום $g(x) \neq 0$ כך ש $g(A) = 0$ כאשר A מטריצה ריבועית מסדר n .

תרגיל 5:

הוכח או הפוך: קיימת מטריצה $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$ כך ש $A^2 + 2A + 5I = 0$

אם ורק אם n זוגי.

תרגיל 6:

האם קיימת מטריצה $A \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש $A^2 + I = 0$.

תרגיל 7:

האם יש פתרון למערכת הבאה כאשר A זו מטריצה ממשית:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8:

האם יש פתרון למערכת הבאה כאשר A זו מטריצה ממשית:

$$2A^5 + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9:

נתון כי הערכים העצמיים של מטריצה מסדר 3×3 הם a, b, c ($a \neq b \neq c$) גם נתון ש A הפיכה מצא את $tr(A^{-1})$

תרגיל 10:

בהינתן מטריצה A מסדר n הפיכה מצא נוסחה ל- $adj(A)$ וגם ל- A^{-1}

תרגיל 11:

תהי A מטריצה 3×3 אורתוגונלית וממשית כך ש- $\det(A) = 1$.
נניח ש $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ הינו ערך עצמי של A ונמצא את כל הערכים העצמיים של A .
נתון ש $A^{100} = aA^2 + bA + cI$ מצא את a, b, c .

תרגיל 12:

נניח ש A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

נניח שכל הערכים העצמיים של A שונים והמטריצות A, B מתחלפות כלומר $AB = BA$.

ונראה שכל וקטור עצמי של A הינו וקטור עצמי של B .

תרגיל 13:

תהי A מטריצה קבע האם המטריצה הפיכה

ואם המטריצה הפיכה מצא את A^{-1} כקומבינציה לינארית של A^k

ואם המטריצה לא הפיכה הסבר למה לא.

סעיף א:

A מטריצה מסדר 3×3 שהערכים העצמיים שלה הם $0, -i, i$.

סעיף ב:

A מטריצה מסדר 3×3 שהערכים העצמיים שלה הם $-1, -i, i$.

תרגיל 14:

תהי A מטריצה 2×2 כך שהערכים העצמיים של המטריצה הם $-2, 4$.

ונמצא b_n, c_n כך ש $A^n = b_n A + c_n I$.

תרגיל 15:

יהיו A, B מטריצות 2×2 כך ש- $(AB)^2 = 0$ הוכח ש $(BA)^2 = 0$.

תרגיל 16:

תהי A מטריצה לא הפיכה מסדר 2×2 כך ש $tr(A) \neq -1$

ונראה ש-

$$(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{1 + tr(A)} A$$

תרגיל 17:

תהי A, B מטריצה 2×2 המקיימת את היחס $A = AB - BA$

ונראה ש- $A^2 = 0$

תרגיל 18:

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$ והיא נקראת נילפוטנטית אם קיים $k \geq 0$ כך ש- $A^k = 0$

1. נראה שמטריצה A היא נילפוטנטית אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A הם 0.

2. מטריצה A היא נילפוטנטית אם ורק אם $A^n = 0$

תרגיל 19:

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה ריבועית כלשהי ונראה שקיימות שתי מטריצות הפיכות B, C כך ש:

$$A = B + C$$

תרגיל 20:

יהיו $AB \in M_n(\mathbb{C})$ נראה של AB ול BA יש את אותו הפולינום האופייני.

תרגיל 21:

תהי $A \in M_{10}(\mathbb{R})$

מטריצה לא הפיכה וידוע ש-

$$\begin{cases} \text{rank}(A - 2I) = 4 \\ \text{rank}(A - 3I) = 7 \end{cases}$$

ונראה שהמטריצה לכסינה.

ולאיזו מטריצה אלכסונית A דומה.

תרגיל 22

הוכיחו את משפט קיילי המילטון למטריצות לכסינות.

תרגיל 23:

מצא את הפולינום המינימלי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 24:

מצא את הפולינום המינימלי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

תרגיל 25:

מצא את הפולינום המינימלי

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 26:

הוכח או הפרך:

יהיו A, B מטריצות מסדר n כך ש A, B לכסינות אז $A + B$ גם לכסינה.

שאלה 27:

הוכח או הפרך:

יהיו A, B מטריצות מסדר n כך ש A, B לכסינות אז AB גם לכסינה.

שאלה 28:

תהי $A \in M_n(F)$

נתון ש $A^2 = A$ הראה שמטריצה A לכסינה.

שאלה 29:

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$

נתון ש- A מטריצה הפיכה וגם A^2 לכסינה אז A לכסינה.

שאלה 30:

תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$

נתון ש $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$ אז המטריצה לכסינה?

שאלה 31:

קבע האם המטריצה לכסינה כאשר ידוע ש

$$A^2 - 2A + I = 0$$

פרק 4 – מרחבים שמורים ופירוק פרימרי

תרגיל 1:

מצא את המרחבים ה- T שמורים עבור העתקה $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(x, y) = (x + y, x - y)$$

תרגיל 2:

מצא את המרחבים ה- T שמורים עבור העתקה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z)$$

תרגיל 3:

יהיו $T, S: V \rightarrow V$ העתקות לינאריות כך ש- $TS = ST$

ונראה ש- $\text{Ker}(S), \text{Im}(S)$ הם מרחבים T שמורים.

תרגיל 4:

יהי $T: V \rightarrow V$ העתקות לינאריות.

אם $W_1, W_2 \subseteq V$ תתי מרחבים שמורים אז גם $W_1 \cap W_2$ ו- $W_1 + W_2$ מרחבים שמורים.

תרגיל 1:

תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי

$$T(x, y, z, w) = (2x, x + y, 2z, 3w)$$

תרגיל 2:

מצא את הפירוק הפרימרי להעתקה $T: R_2[x] \rightarrow R_2[x]$ המוגדרת

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_2) + (a_0 + a_1 - a_2)x$$

תרגיל 3:

מצא את הפירוק הפרימרי של

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x + y - z, x - y + z, -x + y + z)$$

תרגיל 4:

מצא את הפירוק הפרימרי של

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$$

פרק 5 – צורת גורדן

תרגיל 1:

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 2:

מצא את צורת ג'ורדן

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3:

מצא את צורת ג'ורדן

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4:

מצא את צורת ג'ורדן

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל 5:

מצא את צורת ג'ורדן

$$\begin{pmatrix} 4.5 & -2 & 0.5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -0.5 & 1 & 3.5 \end{pmatrix}.$$

תרגיל 6:

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7:

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8:

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

תרגיל 1:

מה הפולינום האופייני

ומה הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון:

תרגיל 2:

מה הפולינום האופייני

ומה הפולינום המינימלי של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3:

תהי $A \in M_4(\mathbb{C})$ שכל רכיבה ממשיים בנוסף נתון ש

$$\text{rank}(A) = 2 \quad A^4 + A^2 = 0, \quad A^4 \neq 0$$

מצא את צורת גורדן של המטריצה A .

תרגיל 4:

תהי A מטריצה $A \in M_5(\mathbb{C})$ שכל רכיבה ממשים בנוסף נתון ש:

$$\text{rank}(A) = 3$$

$$A^4 + A^2 = 0$$

מצאו את כל צורות הגורדן האפשריות של A .

פרק 6 – מרחב מכפלה פנימית

תרגיל 1:

חשב את $\langle a, b \rangle$ ואמת את אי שוויון המשולש ואי שוויון קושי שוורץ.

$$a = (1, 2), b = (-2, 4)$$

תרגיל 2:

חשב את $\langle a, b \rangle$ ואמת את אי שוויון המשולש ואי שוויון קושי שוורץ.

$$a = (1, 1), b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

תרגיל 3:

אמת את אי שוויון קושי שוורץ.

$$a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2)$$

תרגיל 5:

הראה ש לכל $a, b \in \mathbb{R}^n$ מתקיים ש

$$||a + b||^2 + ||a - b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$$

תרגיל 6:

הראה ש לכל $a, b \in \mathbb{R}^n$ מתקיים ש

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{4} (||a + b||^2 - ||a - b||^2)$$

תרגיל 1:

בהינתן U תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ חשב את $U^\perp$

$$U = \text{Sp}\{(1, 2)\}$$

תרגיל 2:

בהינתן U תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ חשב את $U^\perp$

$$U = \text{Sp}\{(1, 1)\}$$

תרגיל 3:

בהינתן U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ חשב את $U^\perp$

$$U = \text{Sp}\{(1, 1, 1)\}$$

תרגיל 4:

בהינתן U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ חשב את $U^\perp$

$$U = \text{Sp}\left\{(1, -1, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)\right\}$$

תרגיל 5:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ ש } a \perp b \text{ אז מתקיים}$$

תרגיל 6:

$$\|a - b\| = \|a + b\| \text{ ש } a \perp b \text{ אז מתקיים}$$

תרגיל 7:

$$U \cap U^\perp = \{0\} \text{ הראה ש}$$

תרגיל 8:

$$U \text{ יהי } U \text{ תת מרחב של } \mathbb{R}^n \text{ ונראה ש } U = (U^\perp)^\perp$$

תרגיל 9:

יהיו M, N תתי מרחבים של מרחב מכפלה פנימית ונראה ש

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$

תרגיל 10:

$$V \text{ יהי } M \text{ תת מרחב של } V \text{ כך ש } V = M \oplus M^\perp \text{ נוצר סופית ונראה ש}$$

תרגיל 1:

$$\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (-3, -2, 1)\} \text{ הפעל את אלגוריתם גרהם שמידט על הקבוצה}$$

תרגיל 2:

$$B = (u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ יהי } B \text{ בסיס אורתונורמלי של } \mathbb{R}^n \text{ ונראה שלכל } v \in \mathbb{R}^n \text{ מתקיים ש}$$

$$v = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v \rangle * u_i$$

פרק 6 – העתקה צמודה אוניטרית ונורמלית

תרגיל 1:

חשב את ההעתקה הצמודה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי

$$T(x, y) = (ix + iy, ix - iy)$$

מצאו את T^* .

תרגיל 2:

חשב את ההעתקה הצמודה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי

$$T(x, y) = (x + y, x - iy)$$

מצאו את T^* .

תרגיל 3:

חשב את ההעתקה הצמודה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי

$$T(x, y) = (x + iy, x - iy)$$

מצאו את T^* .

תרגיל 4:

חשב את ההעתקה הצמודה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ אופרטור לינארי

$$T(x, y, z) = (x + y + iz, x + iy + z, ix + y + z)$$

מצאו את T^* .

תרגיל 5:

חשב את ההעתקה הצמודה ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית

יהי $T: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ אופרטור ליניארי

$$T(x, y, z) = (3x + 2y + iz, x + 2iy + 3z, x + y + z)$$

מצאו את T^* .

תרגיל 6:

קבע האם המטריצה

נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.

$$A = \begin{pmatrix} -i & 2 + 3i \\ -2 + 3i & 0 \end{pmatrix}$$

תרגיל 7:

קבע האם המטריצה

נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 1 - i & 1 + i \end{pmatrix}$$

תרגיל 8:

קבע האם המטריצה

נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 9:

קבע האם המטריצה

נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

תרגיל 10:

קבע האם המטריצה
נורמלית, אוניטרית, צמודה לעצמה.

$$A = \begin{pmatrix} 5i & 1 & 1 \\ 1 & 5i & 1 \\ 1 & 1 & 5i \end{pmatrix}$$

תרגיל 11:

יהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור צמוד לעצמו
נתון שקיים $v \in V$ כך שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $T^n(v) = 0$ ונראה ש $T(v) = 0$.

תרגיל 12:

יהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית מעל מרחב מכפלה פנימית סטנדרטית
האם הדברים הבאים מתקיימים:

1. יהי T אופרטור צמוד לעצמו אזי $T + iI$ אופרטור הפיך.
2. אם המטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ מקיימת $A + A^* = I + A^2$ אז A ניתנת ללכסון אוניטרי.

תרגיל 13:

יהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית
המוגדרת על ידי –

$$T_{a,b}(v) = \langle v, a \rangle b$$

עבור איזשהם $a, b \in V$

מצאו את העתקה הצמודה T^*
כאשר V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל 14:

תהי T טרנספורמציה לינארית מעל מרחב מכפלה פנימית V
כך שלכל $u, v \in V$ מתקיים ש- $\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle$
ונראה שאם λ ערך עצמי ממשי של T אז $\lambda = 0$

תרגיל 15:

יהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה לינארית במרחב מכפלה פנימית V שנוצר סופית ומעל שדה $\mathbb{C}$
יהי $W \subseteq V$ תת מרחב של W כך ש $\dim(W) = k$.
נתון ש- $\langle T(x), x \rangle > 0$ לכל $x \in W$ ונראה של T יש לפחות k ערכים עצמיים חיוביים כולל ריבוי.

תרגיל 16

יהי T אופרטור לינארי מעל מרחב מכפלה פנימית V ו- T^* האופרטור הצמוד של T .

ונראה שמתקיימות התכונות הבאות:

$$1. \ker(T^*) = (\operatorname{im}(T))^\perp$$

$$2. \operatorname{im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$$

$$3. V = \ker(T^*) \oplus \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^*) \oplus \ker(T)$$

תרגיל 17

יהי V מרחב מכפלה פנימית ו- W תת מרחב לא טריוויאלי של V .

סעיף א:

ונמצא טרנספורמציה לינארית P על V הנקראת ההטלה האורתוגונלית מ- V על W כך ש-

$$P(w) = w \text{ for all } w \in W$$

$$P(w') = 0 \text{ for all } w' \in W^\perp$$

סעיף ב:

$$P^2 = P \text{ נראה ש-}$$

סעיף ג:

נראה ש- P נקבע ביחידות על ידי W .

סעיף ד:

מצא העתקה לינארית לא הזהות P' כך ש-

$$\text{לכל } w \in W \text{ מתקיים } P(w) = P'(w)$$

$$\text{אבל } P \neq P'$$

סעיף ה:

$$\text{נראה שלכל } v \in V \text{ מתקיים } \langle P(v), v \rangle \geq 0$$

סעיף ו:

$$\text{נראה שלכל } v \in V \text{ מתקיים } \|P(v)\| \leq \|v\|$$

סעיף ז:

$$\text{נראה ש- } I - P \text{ זו העתקה אורתוגונלית על גבי } W^\perp$$

סעיף ח:

$$\text{נראה שלכל } v \in V \text{ מתקיים ש-}$$

$$\|v\|^2 = \|P(v)\|^2 + \|(I - P)(v)\|^2$$

תרגיל 18:

לכל $v \in V$ קיים $w = T^*(v) \in V$ יחיד שמקיים

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$$

לכל $u \in V$

בנוסף לכך $T^*: V \rightarrow V$ זו טרנספורמציה לינארית.

תרגיל 19:

אם $\langle u, T(v) \rangle = 0$ לכל $u, v \in V$ אז $T = 0$

תרגיל 20:

נניח ש- $\langle v, T(v) \rangle = 0$ לכל $v \in V$

סעיף א-

$F = \mathbb{C}$ ונראה ש- $T = 0$

סעיף ב-

$F = \mathbb{R}$ ו- T צמודה לעצמה.

ונראה ש- $T = 0$

תרגיל 21:

נניח ש- $F = \mathbb{C}$

אז $T = T^*$

אם ורק אם

$$\langle v, T(v) \rangle \in \mathbb{R}$$

לכל $v \in V$.

תרגיל 22:

לכל טרנספורמציה

TT^*, T^*T וגם $T^*T - I$ צמודות לעצמן.

תרגיל 23:

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית ויהי W תת מרחב שומר T .

אז $W^\perp$ שומר T^* .

תרגיל 24:

תהי $T: V \rightarrow V$ נורמלית ויהי $\lambda \in F$ ו $v \in V$ אם $T(v) = \lambda v$ אז

$$T^*(v) = \bar{\lambda}v$$

תרגיל 25:

תהי $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה נורמלית אז וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים ניצבים זה לזה.

פרק 7 – תבניות בלינארית ותבנית ריבועית

תרגיל 1:

קבע האם הפונקציה היא תבנית בילינארית.

אם הפונקציה הינה תבנית בילינארית נמצא את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

תרגיל 2:

קבע האם הפונקציה היא תבנית בילינארית.

אם הפונקציה הינה תבנית בילינארית קבעו אם המטריצה סימטרית, אם היא אנטי סימטרית ונמצא את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$f: R_3[x] \times R_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

תרגיל 3:

קבע האם הפונקציה היא תבנית בילינארית.

נמצא את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$f: M_2(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(A, B) = \text{tr}(AB)$$

תרגיל 4:

קבע האם הפונקציה היא תבנית בילינארית.

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1^3 + x_2 y_2$$

תרגיל 5:

תהי

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_3 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_1$$

ונמצא את המטריצה המייצגת לפי הבסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 6:

מצאו את המטריצה המייצגת של התבניות הריבועיות הבאות לפי הבסיס הסטנדרטי

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 - 3x_3^2$$

$$q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1 x_2 + 2ex_1 x_3 + 2fx_2 x_3$$

תרגיל 7:

האם $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ זו תבנית ריבועית?

תרגיל 8:

לכסנו את התבנית הריבועית

ומצאו בסיס שבו המטריצה המייצגת היא אלכסונית

ומצאו את המטריצה האלכסונית.

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x) = 2x_1^2 + 34x_1 x_2 + 2x_2^2$$

תרגיל 9:

לכסן את התבנית הבאה:

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x) = 2x_1 x_2$$

תרגיל 10:

לכסנו את התבנית הריבועית

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x) = 8x_1 x_2 + x_3^2$$

תרגיל:

לכסן את התבנית

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

תרגיל:

בדקו האם הפונקציה $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ מגדירה מכפלה פנימית:

$$V = C([0,1]) \text{ מרחב הפונקציות הרציפות מהקטע } [0,1] \text{ ל-} \mathbb{R}$$

$$f(g, h) = \int_0^1 g(x)h(x)dx$$

תרגיל:

בדקו האם הפונקציה $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ מגדירה מכפלה פנימית:

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2$$

תרגיל:

עבור אילו ערכי $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + x_2y_2$$

מגדירה מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$.

תרגיל:

לכסן את התבנית הריבועיות

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_2x_3$$

תרגיל

מצאו את כל ערכים הממשיים של α כך שהתבנית

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

חיובית לחלוטין.

תרגיל:

נתונות מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ חיוביות לחלוטין הניתנות ללכסון סימולטני.

ונוכיח שגם $A + B$ חיובית לחלוטין ומתקיים ש- $\det(A + B) > \det(A)$ וגם

$$\det(A + B) > \det(B).$$

תרגיל:

יהי $V = \mathbb{R}^3$ ונגדיר

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 5x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + \frac{5}{4} x_3 y_3$$

ונוכיח שזו מכפלה פנימית.

פרק 8 – שאלות ברמת מבחן

תרגיל 1:

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממשי, תהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית, ויהי

$$f \in \mathbb{R}[x]$$

פולינום ממעלה זוגית.

סעיף א:

הוכיחו או הפריכו: אם T העתקה לינארית צמודה לעצמה, אז בהכרח גם

$$f(T)$$

העתקה לינארית צמודה לעצמה.

סעיף ב:

נאמר ש T -העתקה לינארית אנטי-צמודה לעצמה אם מתקיים

$$T^* = -T.$$

הוכיחו או הפריכו: אם T העתקה לינארית אנטי-צמודה לעצמה, אז בהכרח גם

$$f(T)$$

העתקה לינארית אנטי-צמודה לעצמה.

תרגיל 2:

סעיף א:

הוכיחו שאם הפולינום

$$f \in \mathbb{C}[x]$$

מקיים

$$\gcd(f, f') = 1,$$

כאשר

$$f' \in \mathbb{C}[x]$$

הוא הנגזרת של f , אז כל השורשים של f הם פשוטים, כלומר מריבוי 1.

תזכורת — נגזרת של מכפלה: אם

$$f = g \cdot h,$$

אז

$$f' = g' \cdot h + g \cdot h'.$$

סעיף ב:

נתונה מטריצה

$$A \in M_7(\mathbb{C})$$

וידוע כי

$$c_A(x) = x^7 - 7x^3 + 4.$$

הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

תרגיל 3:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב מממד

$$n \geq 3.$$

תהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית, ויהי

$$B = \{u_1, \dots, u_n\}$$

בסיס אורתונורמלי של V .

הוכיחו או הפריכו: אם

$$Tu_j \perp u_j$$

לכל

$$j = 1, \dots, n,$$

אז

$$T = 0_V.$$

תרגיל 4:

נאמר שמטריצה C היא שורש מעוקב של המטריצה A אם מתקיים

$$C^3 = A.$$

הוכיחו שלכל מטריצה ממשית

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

יש שורש מעוקב

$$C \in M_n(\mathbb{R}).$$

תרגיל 5:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ממשי או מרוכב, ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית צמודה לעצמה.

ידוע כי כל ערך עצמי של T הוא 0 או 1.

הוכיחו כי T היא הטלה אורתוגונלית, כלומר

$$T = P_U$$

עבור תת-מרחב

$$U \subseteq V$$

כלשהו.

תרגיל 6:

יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F , ותהיינה

$$T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow V$$

שתי העתקות לינאריות.

סעיף א:

נניח כי הסקלר

$$\lambda \neq 0$$

הוא ערך עצמי של ההעתקה

$$ST: V \rightarrow V.$$

הוכיחו כי λ הוא גם ערך עצמי של ההעתקה

$$TS: W \rightarrow W.$$

סעיף ב:

נניח כי

$$\lambda = 0$$

הוא ערך עצמי של ההעתקה

$$ST: V \rightarrow V,$$

וכן מתקיים

$$V = W.$$

הוכיחו כי $\lambda = 0$ הוא גם ערך עצמי של ההעתקה

$$TS: V \rightarrow V.$$

סעיף ג:

מצאו דוגמה של מרחבים וקטוריים V, W , ושל העתקות לינאריות

$$T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow V,$$

עבורן מתקיים ש $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של ההעתקה

$$ST: V \rightarrow V,$$

אבל $\lambda = 0$ אינו ערך עצמי של ההעתקה

$$TS: W \rightarrow W.$$

תרגיל 7:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מרוכב, תהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית, ויהי

$$f \in \mathbb{C}[x]$$

פולינום מתוקן.

סעיף א:

הוכיחו או הפריכו: אם T העתקה לינארית אוניטרית, אז בהכרח גם

$$f(T)$$

העתקה לינארית אוניטרית.

סעיף ב:

הוכיחו או הפריכו: אם T העתקה לינארית נורמלית, אז בהכרח גם

$$f(T)$$

העתקה לינארית נורמלית.

תרגיל 8

הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים זה לזה.

סעיף א

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית.

ידוע ש T -אינה הפיכה ואינה ניתנת ללכסון, וכן ידוע ש T -מאפסת כל אחד מן הפולינומים הבאים:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2x, \\ g(x) &= x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x. \end{aligned}$$

חשבו את הפולינום המינימלי

$$m_T(x).$$

תרגיל 9:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ממשי או מרוכב, ויהי

$$U \subseteq V$$

תת-מרחב.

נתבונן בהטלה האורתוגונלית

$$P_U: V \rightarrow V.$$

סעיף א:

הוכיחו כי P_U צמודה לעצמה, כלומר

$$P_U^* = P_U.$$

סעיף ב:

הוכיחו או הפריכו: אם P_U היא העתקה לינארית אוניטרית, אז בהכרח

$$U = V.$$

תרגיל 10:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית נורמלית.

ידוע כי 1 ו- i הם ערכים עצמיים של T .

הוכיחו שיש וקטור

$$v \in V$$

המקיים

$$\|v\| = 2, \|Tv\| = 7.$$

תרגיל 11:

נאמר שמטריצה ממשית

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

היא סימטריזבילית אם קיימת מטריצה סימטרית

$$C \in M_n(\mathbb{R})$$

הדומה למטריצה A .

הוכיחו או הפריכו:

$$A$$

סימטריזבילית אם ורק אם A אלכסינה מעל $\mathbb{R}$.

תרגיל 12:

תהי

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

מטריצה שאינה סקלרית.

נתון ש A -מאפסת כל אחד מהפולינומים הבאים:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \\ q(x) &= x^3 - x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

חשבו את הפולינום המינימלי

$$m_A(x).$$

תרגיל 13:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , ותהי

$$T: V \rightarrow V$$

העתקה לינארית.

תזכורת: העתקה לינארית

$$S: V \rightarrow V$$

נקראת סקלרית אם

$$S = \lambda \cdot id_V$$

עבור סקלר

$$\lambda \in F$$

כלשהו.

סעיף א:

הוכיחו כי T העתקה לינארית סקלרית אם ורק אם כל

$$0 \neq u \in V$$

הוא וקטור עצמי של T .

סעיף ב:

נתון כי

$$TP = PT$$

לכל הטלה

$$P: V \rightarrow V.$$

הוכיחו כי T העתקה לינארית סקלרית.

תרגיל 14:

יהי $C > 0$ המספר הקטן ביותר עבורו מתקיים אי־השוויון

$$2x - 3y + 4z \leq C\sqrt{x^2 + (x + y)^2 + (x - z)^2}$$

לכל $x, y, z \in \mathbb{R}$ מצאו את ערכו של C

שאלה 15:

עבור מטריצה אלכסונית

$$D = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

נגדיר את המטריצה

$$\exp D = \text{diag}(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n}).$$

לדוגמה, מתקיים

$$\exp(0_n) = I_n.$$

נרחיב את ההגדרה של $\exp$ למטריצות לכסינות באופן הבא: אם

$$A = PDP^{-1}$$

עבור מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D , נגדיר

$$\exp A = P \cdot \exp D \cdot P^{-1}.$$

הערה: ניתן להניח ואין צורך להוכיח זאת, שההגדרה לעיל טובה, כלומר אינה תלויה בבחירת המטריצות P, D .

הערה: הגדרות אלה בדיוק הופיעו במועד א'.

תזכורת: מתקיים

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

עבור $\theta \in \mathbb{R}$.

סעיף א:

תהינה $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות לכסינות מתחלפות, כלומר $AB = BA$, מסדר n . הוכיחו ש- $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$ מוגדרת היטב ושמתיים

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B.$$

סעיף ב:

תזכורת: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת אנטי-הרמיטית אם

$$A^* = -A.$$

הוכיחו או הפריכו: אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצה אנטי-הרמיטית אז $\exp A$ מטריצה יוניטרית.

תרגיל 16

עבור מטריצה אלכסונית

$$D = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

נגדיר את המטריצה

$$\exp D = \text{diag}(e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, \dots, e^{\beta_n}).$$

לדוגמה, מתקיים

$$\exp(0_n) = I_n.$$

נרחיב את ההגדרה של $\exp$ למטריצות לכסינות באופן הבא: אם

$$A = PDP^{-1}$$

עבור מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D , נגדיר

$$\exp A = P \cdot \exp D \cdot P^{-1}.$$

הערה: ניתן להניח ואין צורך להוכיח זאת, שההגדרה לעיל טובה, כלומר אינה תלויה בבחירת המטריצות P, D .

סעיף א:

הוכיחו שמתיים

$$\det(\exp A) = e^{\operatorname{tr} A}$$

לכל מטריצה לכסינה $A \in M_n(\mathbb{R})$.

לדוגמה, עבור מטריצת האפס אכן מתקיים

$$\det(\exp(0_n)) = \det(I_n) = 1 = e^0 = e^{\operatorname{tr}(0_n)}.$$

סעיף ב:

תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות לכסינות המקיימות

$$A + B = C.$$

הוכיחו שמתקיים

$$\det(\exp C) = \det(\exp A) \cdot \det(\exp B).$$

הערה: תשובה שמבוססת על ההנחה שהמטריצות A, B מתחלפות לא תקבל ניקוד.

סעיף ג:

הוכיחו או הפריכו: אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית אז $\exp A$ מטריצה חיובית (positive definite).

תרגיל 17

סעיף א:

תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$ ממעל F . ידוע כי:

- 2 השורות הראשונות של A בת"ל.
- כל שורה אחרת של A היא כפולה של השורה הראשונה או השנייה.
- ל- A יש 2 ע"ע שונים λ_1, λ_2 כך ש- $\lambda_i \neq 0$ ל- $i = 1, 2$.

הראו כי A לכסינה.

סעיף ב:

מעל $\mathbb{R}$ נתונה המטריצה

$$S_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

האם היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$?

האם היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$?

תרגיל 18:

יהי V מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי מעל $\mathbb{C}$.

סעיף א

יהי $N: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי.

1. הראו כי N הרמיטי אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלו ממשיים.

2. הראו כי N אוניטרי אם ורק אם כל ערך עצמי שלו λ , מקיים:

$$|\lambda| = 1.$$

סעיף ב

תהי A מטריצת המעבר בין שני בסיסים אורתונורמליים של V .
הראו כי A אוניטרית.

תרגיל 19:

יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ממשיים חיוביים שסכומם 1.
הוכיחו כי מתקיים

$$1 \leq (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n) \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n} \right).$$

תרגיל 20:

יהי V ממ"פ סוף-מימדי. הלי"ה $T: V \rightarrow V$ נקראת אנטי-הרמיטית אם מתקיים

$$T^* = -T.$$

סעיף א

הוכיחו כי אם T אנטי-הרמיטית אז

$$T - i \operatorname{id}_V$$

הלי"ה הפיכה.

סעיף ב

הוכיחו כי אם T אנטי-הרמיטית אז

$$U = (T + i \operatorname{id}_V)(T - i \operatorname{id}_V)^{-1}$$

הלי"ה יוניטרית.

תרגיל 21:

יהי V מרחב סופי-מימדי. הלי"ה $T: V \rightarrow V$ נקראת חסומה אם לכל $v \in V$ מתקיים

$$\|T(v)\| \leq \|v\|.$$

סעיף א

יהי W תת-מרחב של V .

הוכיחו שההטלה האורתוגונלית P_W היא חסומה.

סעיף ב

נסמן $n = \dim V$. מבצעים תהליך גרם-שמידט ללא נרמול על בסיס סדור

$$v_1, \dots, v_n$$

של V לקבלת בסיס אורתוגונלי

$$u_1, \dots, u_n.$$

הוכיחו שמתקיים

$$\|u_j\| \leq \|v_j\|$$

לכל $j = 1, \dots, n$.

סעיף ג'

הוכיחו/הפריכו: כל הטלה, כלומר הלי"ה $P: V \rightarrow V$ שמקיימת

$$P^2 = P,$$

היא חסומה.

תרגיל 22:

יהי V מרחב סופי-מימדי. הלי"ה $T: V \rightarrow V$ נקראת אנטי-הרמיטית אם מתקיים

$$T^* = -T.$$

סעיף א

הראו שאם T אנטי-הרמיטית אז היא נורמלית.

סעיף ב

אפיינו את הספקטרום, כלומר קבוצת הע"ע, של הלי"ה אנטי-הרמיטית. במילים אחרות, הציגו תנאי שהע"ע של הלי"ה אנטי-הרמיטית חייבים לקיים. הוכיחו טענותיכם.

תרגיל 23:

תהי מטריצה $A \in M_n(F)$ עבורה

$$\text{rank } A = 1.$$

נסמן

$$t = \text{tr } A.$$

הוכיחו כי t הוא ע"ע של A .

תרגיל 24:

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$, כאשר

$$\| \alpha \| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

הנורמה המושרית. הוכיחו את זהות הפולריזציה:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{4} \| \alpha + \beta \|^2 - \frac{1}{4} \| \alpha - \beta \|^2 + \frac{i}{4} \| \alpha + i\beta \|^2 - \frac{i}{4} \| \alpha - i\beta \|^2.$$

סעיף ב'

יהי V ממ"פ סוף מימדי מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו את הסעיפים הבאים:

1. $U: V \rightarrow V$ אוניטרי אם ורק אם לכל $\alpha \in V$ מתקיים

$$\| U\alpha \| = \| \alpha \|.$$

2. $N: V \rightarrow V$ נורמלי אם ורק אם לכל $\alpha \in V$ מתקיים

$$\| N\alpha \| = \| N^* \alpha \|.$$

תרגיל 25:

יהי V מ"ו מעל שדה F , תהי $T: V \rightarrow V$ ה"ה, ויהי $\lambda \in F$ סקלר. נסמן

$$U = \ker(T^2 - 2\lambda \cdot T + \lambda^2 \cdot \text{id}_V)$$

ונניח כי

$$U \neq \{0\}.$$

סעיף א

הוכיחו ש- λ הוא ע"ע של T .

סעיף ב

הוכיחו שמתקיים

$$\dim U \geq g_{m_T}(\lambda).$$

