

פרק 1 – אינטגרל לא מסוים

אינטגרל מיד"י

תרגיל 1:

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

תרגיל 2:

$$\int \left(\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

תרגיל 3:

$$\int (x+1)(x+2) dx$$

תרגיל 4:

$$\int (\sin^2(x) + \cos^2(x)) e^x dx$$

תרגיל 5:

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{17}{x} \right) dx$$

תרגיל 6:

$$\int 2^x * e^x dx$$

תרגיל 7:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

תרגיל 8:

$$\int \frac{4301}{\cos^2(x)} dx$$

תרגיל 9:

$$\int \frac{x^2 + x}{x} dx$$

תרגיל 10:

$$\int \left(\frac{(x^2 + 1)^2 + 1}{x^2 + 1} \right) dx$$

תרגיל 11:

$$\int \frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3} dx$$

תרגיל 12:

$$\int \frac{(x+1)(x+2)}{x} dx$$

תרגיל 13:

$$\int \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx$$

תרגיל 14:

$$\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx$$

תרגיל 15:

$$\int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx$$

אינטגרציה בחלקים –

תרגיל 1:

$$\int x^2 e^x dx$$

תרגיל 2:

$$\int x \sin(x) dx$$

תרגיל 3:

$$\int \ln(x) dx$$

תרגיל 4:

$$\int \cos(x) e^x dx$$

תרגיל 5:

$$\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$$

תרגיל 6:

$$\int x 17^x dx$$

תרגיל 7:

$$\int \sin(x) e^x dx$$

תרגיל 8:

$$\int \ln^2(x) dx$$

תרגיל 9:

$$\int \arctan(x) dx$$

תרגיל 10:

$$\int \arcsin(x) dx$$

תרגיל 11:

$$\int \arccos(x) dx$$

שיטת הצבה –

תרגיל 1:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

תרגיל 2:

$$\int (ax + b)^n dx \quad (n \neq -1)$$

תרגיל 3:

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx$$

תרגיל 4:

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} dx$$

תרגיל 5:

$$\int f'(x) \sin(f(x)) dx$$

תרגיל 6:

$$\int \tan(x) dx$$

תרגיל 7:

$$\int \frac{2 \arctan(x)}{1 + x^2} dx$$

תרגיל 8:

$$\int e^x \sin(e^x) dx$$

תרגיל 9:

$$\int \frac{1}{\sqrt{17 - x^2}} dx$$

תרגיל 10:

$$\int \frac{1}{31 + 2x^2} dx$$

תרגיל 11:

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$$

תרגיל 12:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx$$

אינטגרציה של פונקציה רציונלית:

תרגיל 1:

$$\int \frac{x^2 + 32x + 15}{x + 17} dx$$

תרגיל 2:

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x - 1} dx$$

תרגיל 3:

$$\int \frac{3x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)^2} dx$$

תרגיל 4:

$$\int \frac{x^3 + 17x^2 + 2x + 1}{x - 21} dx$$

תרגיל 5:

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1} dx$$

תרגיל 6:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + x + 1} dx$$

תרגיל 7:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} dx$$

תרגיל 8:

$$\int \frac{3x + 9}{4x^2 + 700} dx$$

תרגיל 9:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x + 1)^2(x - 1)} dx$$

תרגיל 10:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 6x + 9)^2} dx$$

תרגיל 11:

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 4x + 3} dx$$

אינטגרליים טריגונומטריים:

תרגיל 1:

$$\int \sin^2(x) dx$$

תרגיל 2:

$$\int \cos^2(x) dx$$

תרגיל 3:

$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx$$

תרגיל 4:

$$\int \cos^2(x) \sin(x) dx$$

תרגיל 5:

$$\int \sin^2(x) \cos^4(x) dx$$

תרגיל 6:

$$\int \sin^3(x) dx$$

תרגיל 7:

$$\int \cos^3(x) dx$$

תרגיל 8:

$$\int \sin(17x) \cos(32x) dx$$

תרגיל 9:

$$\int \frac{1}{1 + \sin(x) + \cos(x)} dx$$

תרגיל 10:

$$\int \frac{1}{1 + \tan(x)} dx$$

פרק 2 – אינטגרל מסוים

חישוב אינטגרלים בסיסיים

תרגיל 1

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} e^x dx$$

תרגיל 2

חשבו את האינטגרל:

$$\int_1^e \frac{1}{1+x} dx$$

תרגיל 3

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi/3} \tan(x) dx$$

תרגיל 4

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x} dx$$

תרגיל 5

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

תרגיל 6

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} x \cos^2(x) dx$$

תרגיל 7

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} x \sin^2(x) dx$$

תרגיל 8

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi} \min\{x, x^2\} dx$$

משחקי הצבה:

תרגיל 9

תהי f פונקציה רציפה וזוגית, כלומר:

$$f(x) = f(-x)$$

הוכיחו כי לכל $M > 0$ מתקיים:

$$\int_{-M}^M f(x) dx = 2 \int_0^M f(x) dx$$

תרגיל 10

תהי f פונקציה רציפה ואי-זוגית, כלומר:

$$f(x) = -f(-x)$$

הוכיחו כי לכל $M > 0$ מתקיים:

$$\int_{-M}^M f(x) dx = 0$$

תרגיל 11

תהי f פונקציה רציפה ומחזורית כך שקיים $T > 0$ שעבורו:

$$f(x + T) = f(x)$$

לכל x . הוכיחו כי לכל a מתקיים:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

תרגיל 12

תהי f פונקציה רציפה על $[0, 1]$. הוכיחו כי:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

תרגיל 13

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

תרגיל 14

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \sin^2(x)} dx$$

תרגיל 15

תהי f פונקציה רציפה וחיובית על $[0, 1]$. חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx$$

תרגיל 16

תהי f פונקציה רציפה וזוגית על $[-a, a]$, כאשר $a > 0$. הוכיחו כי:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^x} dx = \int_0^a f(x) dx$$

תרגיל 17

חשבו, לכל $n \in \mathbb{N}$, את האינטגרל:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)} dx$$

סכומי רימן-

תרגיל 18

עבור $k > 0$, חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$$

תרגיל 19

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)$$

תרגיל 20

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$$

תרגיל 21

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$$

תרגיל 22

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3 + 1^3} + \frac{1}{n^3 + 2^3} + \dots + \frac{1}{n^3 + n^3} \right)$$

תרגיל 23

תהי f פונקציה רציפה וחיובית על $[0, 1]$. חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

תרגיל 24

חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)$$

תרגיל 25

תהי f פונקציה גזירה ברציפות על $[0, 1]$. הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$$

גבולות ואינטגרלים :

תרגיל 26

תהי f פונקציה רציפה על $[0, 1]$. חשבו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx$$

תרגיל 27

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin t)^{1/t} dt$$

תרגיל 28

תהי:

$$f(x) = \int_0^{\sin(3x)} \cos\left(\frac{\pi}{4} + |t|\right) dt$$

הראו כי הפונקציה f גזירה ב- $x = 0$ וחשבו את:

$$f'(0)$$

תרגיל 29

תהי f פונקציה רציפה על $[0, 1]$, ויהיו $a, b > 0$. מצאו את הגבול:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

תרגיל 30

תהי f פונקציה רציפה על $[0, \infty)$. נגדיר:

$$a_n = \int_0^1 f(n+x) dx$$

נניח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

מצאו את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$$

תרגיל 31

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

תרגיל 32

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^{1/x^2}$$

רציפות ואינטגרלים ו- $f(x) = 0$

תרגיל 33

תהי f פונקציה אינטגרלית רימן על $[a, b]$. הוכיחו שקיים $k \in [a, b]$ כך ש:

$$\int_a^k f(t) dt = \int_k^b f(t) dt$$

תרגיל 34

תהי f פונקציה רציפה על $[a, b]$. נניח כי לכל פונקציה רציפה g על $[a, b]$ מתקיים:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

הוכיחו כי:

$$f \equiv 0$$

על $[a, b]$.

תרגיל 35

תהי f פונקציה רציפה על $[a, b]$. נניח כי לכל פונקציה רציפה g על $[a, b]$ המקיימת:

$$g(a) = g(b) = 0$$

מתקיים:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

הוכיחו כי:

$$f \equiv 0$$

על $[a, b]$.

תרגיל 36

תהי f פונקציה רציפה על $\mathbb{R}$. נניח כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int_x^{2x} f(t) dt = 0$$

הוכיחו כי:

$$f \equiv 0$$

חדו"א 1 בחדו"א 2

תרגיל 37

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נסמן:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

אז:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = 1$$

ב. אם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = 1$$

אז:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

תרגיל 38

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש המקיימת:

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0$$

תרגיל 39

תהי פונקציה רציפה וחיובית על $[0, \infty)$. נגדיר לכל $x > 0$:

$$g(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$$

הוכיחו כי $g(x)$ פונקציה יורדת בקטע $(0, \infty)$.

תרגיל 40

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרלית על כל תת-קטע סגור $[a, b]$ של $[0, \infty)$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס בהחלט, אז בהכרח קיימת סדרה $x_n \rightarrow \infty$ כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(x_n) = 0$$

ב. אם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס, אז בהכרח קיימת סדרה $x_n \rightarrow \infty$ כך ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(x_n) = 0$$

תרגיל 41 :

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כך ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

סעיף א נגדיר $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ הוכיחו שאם $L > 0$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

סעיף ב: הוכיחו שאם $L > 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) = L$

סעיף ג: הוכיחו שאם $L = 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) = 0$

תרגיל 42:

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

הוכיחו כי קיים $c \in (a, b)$ כך ש-

$$\int_a^c f(x)dx = f(c)$$

תרגיל 43:

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחיובית

סעיף א:

הוכיחו כי לכל $n \geq 1$ טבעי קיים $x_n \in [0,1]$ עבורו

$$\frac{1}{n} \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{x_n} f(x)dx + \int_{1-x_n}^1 f(x)dx$$

סעיף ב:

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

סעיף ג:

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$$

התכנסות והתבדרות אינטגרליים

מבחני השוואה:

רמת קושי: קל

תרגיל 1

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

תרגיל 2

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

תרגיל 3

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^{x^2}} dx$$

תרגיל 4

קבע האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$$

רמת קושי: בינוני

תרגיל 5

חקור את התכנסות האינטגרל כתלות בפרמטר p :

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} dx$$

תרגיל 6

בדוק מתי האינטגרל מתכנס כתלות בפרמטר p :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^p}{1+x^{2p^2}} dx$$

תרגיל 7

יהי p מספר ממשי. בדוק מתי האינטגרל מתכנס:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+\sqrt{x})^p} dx$$

רמת קושי: קשה

תרגיל 8

חקור את התכנסות האינטגרל כתלות בפרמטרים p, q :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p + x^q} dx$$

תרגיל 9

בדוק עבור אילו ערכים של a האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^a(x^a + \sin(x))} dx$$

תרגיל 10

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sin(x) + x^2}$$

רמת קושי: קל-בינוני

תרגיל 11

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}(1-x)^2} dx$$

תרגיל 12

קבע האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

תרגיל 13

קבע האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_0^1 \frac{\tan(x^2)}{\ln(1+x^2)} dx$$

רמת קושי: בינוני

תרגיל 14

בדוק את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$$

תרגיל 15

בדוק האם האינטגרל מתכנס או מתבדר:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{(\sin(x))^{5/3}} dx$$

תרגיל 16

עבור אילו ערכים של α האינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x))^\alpha dx$$

רמת קושי: קשה

תרגיל 17

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^1 \frac{1}{x - \sin(x)} dx$$

תרגיל 18

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{1/5}(x-1)^{1/3}} dx$$

שיפוץ דריכלה!

תרגיל 19

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

תרגיל 20

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_2^{\infty} \frac{\sin(x)}{x \ln(x)} dx$$

תרגיל 21

בדוק האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_1^{\infty} \sin(x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

רמת קושי: בינוני

תרגיל 22

בדוק האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$$

תרגיל 23

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

תרגיל 24

בדוק את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos(x) \sin(\sin(x))}{x} dx$$

רמת קושי: קשה

תרגיל 25

בדוק את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \sin(x \ln(x)) \, dx$$

תרגיל 26

יהי $p > 0$. חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^p) \, dx$$

תרגיל 27

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_0^{\infty} x^{2023} \cos(e^x) \, dx$$

תרגיל 28

חקרו את התכנסות האינטגרל לכל $p > 0$:

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln(x))^p \sin(x)}{x} \, dx$$

תרגיל 29

חקור את התכנסות האינטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]^2} \, dx$$

כאשר $[x]$ הוא החלק השלם של x .

רמת קושי: קשה

תרגיל 30

בדקו האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1+\{x\}}} \, dx$$

כאשר $\{x\}$ הוא החלק השברי של x

רמת קושי: בינוני

תרגיל 31

קבע האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^4+x^3+x^2}} dx$$

רמת קושי: קשה

תרגיל 32

קבע האם האינטגרל מתכנס:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^4+x^3-x^2})\ln(x+2)} dx$$

שאלות חשיבה

רמת קושי: בינוני

תרגיל 33

נניח ש f, g -פונקציות חיוביות בתחום $[a, \infty)$, וכן נתון כי

$$\int_a^{\infty} g(x) dx$$

מתבדר.

הוכיחו שלפחות אחד מן האינטגרלים הבאים מתבדר:

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$$

או

$$\int_a^{\infty} \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

תרגיל 34

תהי f פונקציה רציפה, ונניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

כאשר

$$L \neq 0.$$

הוכיחו כי האינטגרל

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin(x) \, dx$$

מתבדר.

תרגיל 35

תהי f פונקציה רציפה. נתון כי

$$\int_0^{\infty} |f(x)| \, dx$$

מתכנס.

האם בהכרח האינטגרל

$$\int_0^{\infty} f^2(x) \, dx$$

מתכנס? הוכיחו או הפריכו.

תרגיל 36:

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית.

נניח ש $K < 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ הוכיחו ש- $\int_0^{\infty} f(x) \, dx$

תרגיל 37:

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרלית בכל התחום $(0, \infty)$ ונניח ש- $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = L$

וגם נניח ש- $\int_t^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ מתכנס לכל $t > 0$ חשבו את הגבול הבא:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

לכל $b > a > 0$

תרגיל 38

מצאו לאילו ערכי $a > 0$ האינטגרל הבא מתכנס בהחלט מתכנס בתנאי או מתבדר

$$\int_0^\infty \arctan(x) \cos(x^a) dx$$

תרגיל 39:

תהי f פונקציה רציפה ב- $[0, \infty)$ ואי שלילית כך ש- $\int_0^\infty f(x) dx$ מתכנס

האם בהכרח הדברים הבאים מתקיימים?

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים וסופי?

2. f חסומה ב- $[0, \infty)$?

3. אם בנוסף $f(x) > 0$ לכל $x \geq 0$ אז $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

4. האם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$?

5. האם $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$ קיים וסופי?

שאלות חשיבה באינטגרלים

תרגיל 1

תהי f פונקציה חיובית על $[0, \infty)$, ונניח כי

$$\int_0^\infty f(x) dx < \infty$$

האם בהכרח מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0?$$

תרגיל 2

תהי f פונקציה חיובית על $[a, \infty)$, ונניח כי

$$\int_a^\infty f(x) dx < \infty$$

וכן קיים חסם

$$|f'(x)| \leq 2$$

לכל $x \geq a$.

האם בהכרח מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0?$$

תרגיל 3

תהי f פונקציה רציפה במידה שווה על $[a, \infty)$, ונניח כי האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

מתכנס.

הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

תרגיל 4

תהי

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

פונקציה מונוטונית יורדת, ונניח כי

$$\int_0^\infty f(x) dx < \infty$$

הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = 0$$

תרגיל 5

תהי

$$f: (0,1] \rightarrow [0, \infty)$$

פונקציה יורדת, ונניח כי האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^1 f(x) dx$$

מתכנס.

הוכיחו כי

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$$

תרגיל 6

תהי

$$g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, R]$ לכל $R > 0$.
נניח שקיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$$

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(x) dx = c$$

תרגיל 7

תהי f פונקציה רציפה ואי שלילית על $[0, \infty)$, ונניח כי

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס.

הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx = 0$$

תרגיל 8

תהי g פונקציה אינטגרבילית בקטע $[-1, 1]$ ורציפה בנקודה 0.
הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g\left(\frac{x}{n}\right) dx = 2g(0)$$

תרגיל 9

תהי f פונקציה מונוטונית יורדת בקטע $[0, \infty)$, ונניח כי האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתכנס.
הוכיחו כי

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^\infty f(x) dx$$

תרגיל 10

תהי f פונקציה רציפה על $[a, \infty)$, כאשר $a > 0$.
נניח שהאינטגרל הלא אמיתי

$$\int_a^\infty xf(x) dx$$

מתכנס.
הוכיחו שגם האינטגרל

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

מתכנס.

רמה קשה

תרגיל 11

תהי

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה ברציפות, אי שלילית ומונוטונית יורדת.
נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = L > 0$$

הוכיחו כי האינטגרל

$$\int_1^\infty f(x) \cos(x) dx$$

מתכנס, אך אינו מתכנס בהחלט.

$$f, g: [a, c) \rightarrow \mathbb{R}$$

כך שלכל $a < b < c$, הפונקציות f, g אינטגרביליות רימן על $[a, b]$.
נניח כי

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - g(x)| = 0$$

בכל סעיף הוכיחו את הטענה או תנו דוגמה נגדית.

א. עבור $c = \infty$, האם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

מתכנס אם ורק אם האינטגרל

$$\int_a^\infty g(x) dx$$

מתכנס?

ב. עבור $c \in \mathbb{R}$, האם האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_a^c f(x) dx$$

מתכנס אם ורק אם האינטגרל

$$\int_a^c g(x) dx$$

מתכנס?

ג. עבור $c = \infty$, האם האינטגרל

$$\int_a^\infty e^{g(x)} dx$$

מתכנס אם ורק אם האינטגרל

$$\int_a^\infty e^{f(x)} dx$$

מתכנס?

תרגיל 13

תהי

$$f: [1, \infty) \rightarrow (e, \infty)$$

פונקציה מונוטונית עולה, ונניח כי

$$\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)}$$

מתבדר ל- ∞

הוכיחו כי

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x \ln(f(x))}$$

מתבדר ל- ∞

נושא 5: אינטגרלים עם פרמטרים, מעריכיות ונורמות

תרגיל 14

יהי $P(x)$ פולינום עם מקדמים ממשיים.

הוכיחו כי

$$\int_0^\infty e^{-x} P(x) dx = P(0) + P'(0) + P''(0) + \dots$$

כאשר הסכום באגף ימין הוא סופי, משום שנגזרות הפולינום מתאפסות החל מסדר מסוים.

תרגיל 15

תהי f פונקציה רציפה על $[0, 1]$.

הוכיחו כי

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

תרגיל 16

נתונה פונקציה רציפה

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

הוכיחו כי לכל $t > 0$ מתקיים

$$\frac{1}{t} \ln \left(\int_0^1 e^{-tf(x)} dx \right) \leq - \min_{x \in [0,1]} f(x)$$

וכן הוכיחו כי

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\int_0^1 e^{-tf(x)} dx \right) = - \min_{x \in [0,1]} f(x)$$

תרגיל 17

נתונה פונקציה רציפה וחיובית

$$f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

ונניח כי

$$\int_0^\infty f(x) dx$$

מתבדר.

הוכיחו שקיימת פונקציה אי שלילית

$$g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

האינטגרלית על כל תת־קטע סופי של $[0, \infty)$, כך ש-

$$\int_0^\infty f(x)g(x) dx$$

מתבדר, וגם

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

תרגיל 18

תהי f פונקציה רציפה על $[0, \infty)$ כך ש

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t) dt \right) < \infty$$

ונראה ש

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

תרגיל 19

תהי $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור $T > 0$ תהי $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

פונקציה מונוטונית גזירה ברציפות המקיימת

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

א. נניח כי $\int_a^{a+T} f(x) dx = 0$ הוכיחו כי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

ב. נניח כי $\int_a^{a+T} f(x) dx \neq 0$ הוכיחו כי $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_a^\infty g(x)dx$ מתכנס.

תרגיל 20

נניח ש $\int_a^\infty (f''(x))^2 dx$, $\int_a^\infty (f(x))^2 dx$ מתכנסים ונראה ש

$$\int_a^\infty (f'(x))^2 dx$$

מתכנס.

פרק 3 – התכנסות נקודתית ובמידה שווה

תרגיל 1

הראו כי $f_n \rightarrow 0$ במידה שווה.

$$f_n(x) = x^n$$

בתחום $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

תרגיל 2

בדקו האם

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

תרגיל 3

בדקו האם

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

תרגיל 4

בדקו האם

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$$

מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

תרגיל 5

בדקו האם

$$f_n(x) = x^n(1-x^n)$$

מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$.

תרגיל 6

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = \cos^n(x)(1 - \cos^n(x))$$

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

תרגיל 7

בדקו האם

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{n}e^x}$$

מתכנסת במידה שווה ב. $[0, 1]$.

תרגיל 8

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)$$

בתחום $\mathbb{R}$.

תרגיל 9

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

בתחום $[1, a]$.

קשה

תרגיל 10 — מקור: ללא מספר

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)$$

בתחום $\mathbb{R}$.

תרגיל 11

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = n \ln\left(\frac{1 + nx}{nx}\right).$$

תרגיל 12

חקרו את ההתכנסות במידה שווה של

$$f_n(x) = \sqrt{n+1} \sin^n(x) \cos(x)$$

בתחום $\mathbb{R}$.

תרגיל 13

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר

$$f_n(x) = xn^\alpha e^{-nx}$$

בתחום $[0,1]$.

קבעו עבור אילו ערכי α הסדרה מתכנסת במידה שווה לפונקציית האפס.

תרגיל 14

נגדיר

$$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{|\sin(nx)|}{n^2}}$$

בתחום $[0, \infty)$.

א. מצאו את הגבול הנקודתי.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה ב- $[0,1]$.

ג. בדקו התכנסות במידה שווה ב- $[1, \infty)$.

תרגיל 15

נגדיר

$$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{x^2}{n}}$$

בתחום $[0, \infty)$.

א. מצאו את הגבול הנקודתי.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה ב- $[0,1]$.

ג. בדקו התכנסות במידה שווה ב- $[1, \infty)$.

תרגיל 16

נגדיר

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (nx - 1)^2}$$

בתחום $(0,1)$.

קבעו האם הסדרה מתכנסת במידה שווה.

תרגיל 17

תהי a_n סדרת מספרים.

נגדיר

$$f_n(x) = a_n x^n$$

הוכיחו כי אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$ אז קיים N כך שלכל $n \geq N$:

$$a_n = 0$$

תרגיל 18

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{x^2/n} dx$$

תרגיל 19

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n (1 - x^n) dx = \int_0^1 0 dx.$$

תרגיל 20

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} dx = \int_0^1 0 dx.$$

תרגיל 21

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx = \int_0^1 0 dx.$$

תרגיל 22

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n} dx = \int_0^1 1 dx.$$

תרגיל 23

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx.$$

תרגיל 24

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi x^{1/n} \sin(x) dx$$

תרגיל 25

חשבו את הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-n \sin x} dx$$

תרגיל 26

בדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2} dx = \int_0^1 0 dx.$$

תרגיל 27

נתון

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$$

הסדרה מתכנסת נקודתית ב- $[0,1]$ אך לא במידה שווה.
הראו שבכל זאת מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

תרגיל 28

תהי f רציפה ב- $[0,1]$ כך ש-

$$f(0) = 0, f(1) = 17.$$

נגדיר

$$g_n(x) = f(x^n).$$

האם g_n מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$?

תרגיל 29

תהי $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ואי-שלילית, כך ש- $g(1) = 0$ נגדיר

$$f_n(x) = x^n g(x)$$

הוכיחו כי $f_n \rightarrow 0$ במידה שווה ב- $[0,1]$.

תרגיל 30

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ נגדיר

$$f_n(x) = f(nx)$$

נניח כי $f_n \rightarrow 0$ במידה שווה ב- $(0, \infty)$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$:

$$f(x) = 0$$

תרגיל 31

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אינה זהותית אפס, ומקיימת

$$0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

נגדיר

$$h_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right), g_n(x) = f(nx).$$

א. הראו כי h_n, g_n מתכנסות נקודתית לאפס, אך לא במידה שווה ב- $[0, \infty)$.
ב. הראו כי $h_n g_n \rightarrow 0$ במידה שווה ב- $[0, \infty)$.

תרגיל 32

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל קטע סופי. נגדיר

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(y) dy.$$

הראו כי אם f רציפה, אז $f_n \rightarrow f$ במידה שווה על כל קטע קומפקטי.

תרגיל 33

נניח ש $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה כך ש- f' רציפה במידה שווה.
הראו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \rightarrow f'(x)$$

במידה שווה.

תרגיל 34

נניח ש $f_n \rightarrow f$ במידה שווה וגם $g_n \rightarrow g$ במידה שווה בתחום I .
הראו כי

$$f_n + g_n \rightarrow f + g$$

במידה שווה בתחום I .

תרגיל 35

תהי f פונקציה המוגדרת על $[a, b]$

נגדיר

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$$

הראו כי

$$f_n \rightarrow f$$

במידה שווה.

בינוני

תרגיל 36

נניח ש $f_n \rightarrow f$ במידה שווה וגם $g_n \rightarrow g$ במידה שווה בתחום I .
בנוסף, קיים קבוע $M > 0$ כך ש-

$$|f(x)|, |g(x)| < M$$

הראו כי

$$f_n g_n \rightarrow f g$$

במידה שווה.

תרגיל 37

תהי $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות כך ש $f_n \rightarrow f$ במידה שווה.
הראו כי f רציפה.

תרגיל 38

תהי $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות במידה שווה לפונקציה f .
תהי $a_n \rightarrow L$, כאשר כל איברי a_n נמצאים $[a, b]$
הראו כי

$$f_n(a_n) \rightarrow f(L).$$

תרגיל 39

נניח כי $f_n \rightarrow f$ במידה שווה, ולכל n הפונקציה f_n חסומה.
הוכיחו כי $\sup f$ קיים, ובדקו האם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} f_n(x) = \sup_{x \in I} f(x)$$

תרגיל 40

תהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות על $\mathbb{R}$

נניח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

מתכנס.

הוכיחו כי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה.

תרגיל 41

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן בכל קטע סגור, ונניח כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

א. הראו כי לכל $\varepsilon > 0$, האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\varepsilon|x|} dx$$

קיים וסופי.

ב. הראו כי

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\varepsilon|x|} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

תרגיל 42

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה וחסומה.

הראו כי

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M \int_0^{\infty} e^{-Mx} f(x) dx = f(0).$$

תרגיל 43:

תהא A קבוצה ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A ותהי $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

נניח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית ל- f .

הוכיחו או הפריכו:

1. אם f רציפה וקיים $n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ הפונקציה f_n רציפה במידה שווה אז f רציפה במידה שווה.
2. אם f רציפה במידה שווה אז קיים $n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ הפונקציה f_n רציפה במידה שווה.
3. אם $f_n \neq f$ וקיים $n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ הפונקציה f_n רציפה במידה שווה אז f רציפה במידה שווה.
4. אם $f_n \neq f$ וגם f_n רציפה במידה שווה אז קיים $n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ הפונקציה f_n רציפה במידה שווה.

פרק 4 – טורי חזקות

תרגיל 1: מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x + 17)^n$

תרגיל 2: מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

תרגיל 3:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

תרגיל 4:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} n(\tan(x))^n$

תרגיל 5:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sin(x))^n$

תרגיל 6:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

תרגיל 7:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$

תרגיל 8:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$

תרגיל 9:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

תרגיל 10:

מצא את רדיוס התכנסות של טור החזקות $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln(n))^2}$

תרגיל 11:

נניח שרדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ הינו R

מה רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$

פרק 5 – טורי פונקציות

תרגיל 1

האם הטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [\frac{1}{2}, 2]$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n - x^{-n})$$

תרגיל 2

האם הטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in (-a, a)$?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2(n)} \right)$$

תרגיל 3

האם הטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [2, \infty)$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx)}{nx^n}$$

תרגיל 4

האם הטור הבא מתכנס במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n^2(1 + x^2)) \right)$$

תרגיל 5

קבעו האם טור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx}$$

מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$.

תרגיל 6

חקרו את ההתכנסות במידה שווה בתחום $[-1,1]$ של הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 (1 - x^2)^{n-1}$$

תרגיל 7
האם הטור הבא

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-|x-n|}$$

מתכנס במידה שווה בתחום $[0, A]$, ובתחום $[0, \infty)$?

תרגיל 8
האם הטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $\mathbb{R}$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2 |x|}$$

נושא 2 התכנסות במידה שווה בעזרת לייבניץ, דריכלה ואבל

תרגיל 9
הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

תרגיל 10
הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^4} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

תרגיל 11
הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [1, \infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$$

תרגיל 12
הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

תרגיל 13

הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה ב- $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+x^2} + x^2}$$

תרגיל 14:

קבעו האם הטור הפונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx}$$

מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$

סעיף ב:

תהי $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ סדרת פונקציות כך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$ מקיים את התכונות הבאות.

לכל $x \in I$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ ו- $f_n(x) > 0$.

הוכיחו שאם התכנסות של $\{f_n(x)\}$ לאפס במידה שווה ב- I אז הטור מתכנס במידה שווה בקטע.

תרגיל 15

נתון הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x e^{-nx}$$

הוכיחו ש הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$

תרגיל 16.

הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, כאשר $0 < \delta < \pi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

תרגיל 17:

הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

תרגיל 18:

הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה ב- $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + \cos(x)}$$

תרגיל 19:

הראו שהטור הבא מתכנס במידה שווה בתחום $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^4} \arctan(nx)$$

נושא 3 — אינטגרציה איבר איבר של טורי פונקציות

תרגיל 18:

הראו שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x}$$

בתחום $x \in [1, a]$

תרגיל 19.

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא בתחום $x \in [1, a]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$$

תרגיל 20.

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא בתחום $x \in [1, a]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(\sin(nx))}{e^{nx}}$$

תרגיל 21.

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n^{17}x)}{n^2}$$

תרגיל 22:

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא בתחום $x \in [1, a]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x}$$

תרגיל 23:

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא בתחום $x \in [1, a]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx) \ln(1+nx)}{n^2+17}$$

תרגיל 24:

הראה שאפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר לטור הפונקציות הבא בתחום $x \in [1, a]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx) \ln(1+nx) \arctan(n^{60}x)}{n^2+17}$$

נושא 4 — גזירה איבר איבר של טורי פונקציות

קל

תרגיל 25.

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^3}$$

איבר איבר בתחום $x \in [1, \infty)$.

תרגיל 26.

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$$

איבר איבר בכל $x \in [0, M]$.

תרגיל 27.

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^3}$$

איבר איבר בכל $\mathbb{R}$.

בינוני

תרגיל 28.

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{1+n^3}$$

איבר איבר כאשר $x \in [1, a]$.

תרגיל 29

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

איבר איבר כאשר $x \in [3, \infty)$.

תרגיל 30

הראו שניתן לגזור את הטור

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^6 x)}{1 + n^3}$$

איבר איבר בתחום $x \in [1, a]$.

תרגיל 31

הראו שהפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{1 + n^2}$$

גזירה בתחום

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$$

תרגיל 32.

הוכיחו כי הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right), x > -1$$

גזירה עבור $x > -\frac{1}{2}$, וחשבו את $f'(0)$ ואת

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

תרגיל 33.
הראו שהפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2 + n^2}$$

רציפה בכל הישר הממשי.
האם הפונקציה גזירה בכל הישר הממשי?

תרגיל 34
הראו כי הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ורציפה ב- $(0, 2\pi)$

רמז: ניתן להשתמש בזהות

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

תרגיל 35
הראו כי הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$$

מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ורציפה ב- $(0, 2\pi)$

נושא 6 — גבולות של טורי פונקציות ומעבר גבול דרך טור

תרגיל 36.

הראה כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} = \frac{1}{2}$$

תרגיל 37.

הראה כי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = 1$$

תרגיל 38.

הראה כי

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

תרגיל 39.

הראה כי

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \ln(2)$$

תרגיל 40.

הוכח את משפט אבל נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ מתכנס הראה שטור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

1. מתכנס במידה שווה בתחום $[0,1]$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = L$$

תרגיל 41:

הראו ש-

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(2)$$

תרגיל 41.
נתון טור החזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

הוכיחו כי הטור מתכנס לפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, גזירה פעמיים ברציפות, המקיימת:

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

תרגיל 42
הראו שהפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

כלומר

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

מוגדרת היטב, מונוטונית ורציפה ב- $(0, \infty)$.

תרגיל 43.
תהי $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים חסומה.
הוכיחו שקיימת פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים, המקיימת:

$$f^{(n)}(0) = c_n$$

לכל $n \geq 0$.

תרגיל 44.
תהי f פונקציה רציפה בתחום $[0,1]$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

הראו כי

$$f(x) = 0$$

לכל $x \in [0,1]$.

תרגיל 45.
נגדיר טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

כאשר לכל $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{n} \sin^2(2^n \pi x), & \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0, & \frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

הראו כי הטור מתכנס במידה שווה ב- $[0,1]$ אבל לא קיים עבורו טור מספרים חוסם של ויירשטראס.

פרק 6 – מספרים מרוכבים

תרגיל 1: מצא את $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

תרגיל 2: מצא את $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$

$$\begin{cases} z_1 = 7 + 2i \\ z_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

תרגיל 3: מצא את $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$

$$\begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 89 \end{cases}$$

תרגיל 4: מצא את $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$

$$\begin{cases} z_1 = 23 + 2i \\ z_2 = 4 - 6i \end{cases}$$

תרגיל 5: מצא את $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$

$$\begin{cases} z_1 = 7 + 8i \\ z_2 = -8 - 3i \end{cases}$$

תרגיל 1: חשב את המספר הצמוד $z = 6 + 5i$

תרגיל 2: חשב את המספר הצמוד $z = 4 - 5i$

תרגיל 3: חשב את המספר הצמוד $z = 5i$

תרגיל 4: חשב את המספר הצמוד $z = 6$

תרגיל 5: חשב את המספר הצמוד $z = 13 + i$

תרגיל 1: פשט את השבר

$$\frac{17 - i}{1 + i}$$

תרגיל 2: פשט את השבר

$$\frac{1 - i}{2 + 4i}$$

תרגיל 3: פשט את השבר

$$\frac{2 - 3i}{4 + 7i}$$

תרגיל 4: פשט את השבר

$$\frac{3 - 2i}{8 + 9i}$$

תרגיל 5: פשט את השבר

$$\frac{12 - 2i}{4 + 3i}$$

תרגיל 6: פשט את השבר

$$\frac{5 - 7i}{2 + 3i}$$

תרגיל 7: הראה ש $\frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z)$

תרגיל 8: $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im}(z)$

תרגיל 1: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = -1 - i$$

תרגיל 2: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = 3 + 2i$$

תרגיל 3: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = 4 + 5i$$

תרגיל 4: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = \frac{3i}{1 + i}$$

תרגיל 5: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = (1 + i)(3 - 2i)$$

תרגיל 6: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = \frac{4i + 5}{2i + 1}$$

תרגיל 7: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = 1 + 4i$$

תרגיל 8: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = -1 - 4i$$

תרגיל 9: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = 12 - 2i$$

תרגיל 10: הפוך מהצגה מפורשת להצגה פולרית

$$z = \frac{7 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

תרגיל 1: חשב את הביטוי $(2 + 3i)^{200}$

תרגיל 2: חשב את הביטוי $(-2 - 3i)^{201}$

תרגיל 3: חשב את הביטוי $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{35}$

תרגיל 4: חשב את הביטוי $\left(\frac{3+i}{17-i}\right)^{24}$

תרגיל 5: חשב את הביטוי $(1 + 2i)^{18}$

תרגיל 6: חשב את הביטוי $(1 - 2i)^{20}$

תרגיל 7: חשב את הביטוי $\left(\frac{1+2i}{2i}\right)^{24}$

תרגיל 1: פתור את המשוואה $z^4 = 1$

תרגיל 2: פתור את המשוואה $z^{32} = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)$

תרגיל 3: פתור את המשוואה $(z^2 + 2z + 17)^2 = 1$

תרגיל 4: פתור את המשוואה $z^7 = \left(\frac{2i}{16+7i}\right)$

תרגיל 1: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = -1 - i$$

תרגיל 2: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = 3 + 2i$$

תרגיל 3: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = 4 + 5i$$

תרגיל 4: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = \frac{3i}{1+i}$$

תרגיל 5: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = (1+i)(3-2i)$$

תרגיל 6: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = \frac{4i+5}{2i+1}$$

תרגיל 7: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = 1 + 4i$$

תרגיל 8: הפוך מהצגה מפורשת להצגה $Re^{i\theta}$

$$z = \frac{7 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

תרגיל 1:

הראו ש

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad , \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

תרגיל 2:

הראו ש

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \quad , \sin(3x) = 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x)$$

תרגיל 3

הראו ש-

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

תרגיל 4:

הראו ש-

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

פרק 7 – טורי פוריה

תרגיל 1

מצא את טור פורייה הממשי של

$$f(x) = \sin x$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 2

מצא את טור פורייה הממשי של

$$f(x) = \cos x$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 3

מצא את טור פורייה הממשי של

$$f(x) = |x|$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 4

מצא את טור פורייה הממשי של

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

בינוני

תרגיל 5

מצא את טור פורייה המרוכב של

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 6

חשב את טור פורייה הממשי של

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

בתחום

$$0 < x < 2\pi.$$

תרגיל 7

יהי

$$[a, b] \subset (-\pi, \pi].$$

מצא את טור פורייה של פונקציית האינדיקטור

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b] \\ 0, & t \notin [a, b] \end{cases}$$

המוגדרת על

$$(-\pi, \pi]$$

ומורחבת באופן 2π -מחזורי.

תרגיל 8

מצא את טור פורייה המרוכב של

$$f(x) = \cos^{13}(x)$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 9

מצא את טור פורייה המרוכב של

$$f(x) = \sin^{10}(x)$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

תרגיל 10:

רשמו פורמט עבודה איך לחשב את האינטגרל

$$\int \sin^n(x) \cos^m(x) dx$$

כאשר n, m מספרים טבעיים.

חלק 2-

תרגיל 11

חשב את טור פורייה של

$$x^2$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

והסק כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

תרגיל 12

חשב את טור פורייה של

$$x^2$$

בתחום

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

והסק כי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

תרגיל 13

חשב את סכום הטור עבור

$$x \in (0, 2\pi):$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

תרגיל 14

חשב את סכום הטור עבור

$$x \in (0, 2\pi):$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

תרגיל 15

נסמן ב f -את הפונקציה 2π -מחזורית הנתונה על ידי

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ -1, & t \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

עבור

$$-\pi \leq t < \pi.$$

קבע האם הטור

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$$

מתכנס, ואם כן חשב את ערכו.

קל

תרגיל 16

חשב את האינטגרל

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx} \right|^2 dx$$

תרגיל 17

חשב את

$$a, b, c$$

הממזערים את

$$\int_0^{2\pi} |e^{ix} - a - be^{ix} - ce^{i2x}|^2 dx.$$

תרגיל 18

חשב את

$$a, b$$

הממזערים את

$$\int_0^{2\pi} |\cos x - a e^{ix} - b e^{-ix}|^2 dx.$$

תרגיל 19
חשב את

$$a, b, c$$

הממזערים את

$$F(a, b, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - b e^{ix} - c e^{i2x}|^2 dx.$$

תרגיל 20
חשב את

$$a, b, c$$

הממזערים את

$$\int_0^{2\pi} |\sin^2 x - a - b e^{ix} - c e^{i2x}|^2 dx.$$

תרגיל 21
חשב את

$$a, b, c$$

הממזערים את

$$\int_0^{2\pi} |x - a - b e^{ix} - c e^{i2x}|^2 dx.$$

תרגיל 22
חשב את הקבוע או הקבועים הממזערים את

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x^2 - a \sin x|^2 dx.$$

תרגיל 23

נניח כי f גזירה ברציפות בקטע $[0, \pi]$, אינה קבועה, ומקיימת

$$f(0) = 0 = f(\pi).$$

מצא את הקבוע הטוב ביותר c כך שיתקיים

$$\frac{\int_0^\pi |f'(x)|^2 dx}{\int_0^\pi |f(x)|^2 dx} \geq c$$

תרגיל 24

תהי $f \in R(T)$ פונקציה גזירה ברציפות כך ש

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx < 2\pi.$$

הראה כי

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 < 1$$

בנוסף, הראה שקיים קבוע c כך ש

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - c|^2 dx < 2\pi$$

תרגיל 25

תהי $f_n \in R(T)$

הוכח או הפרך:

א. אם

$$f_n \rightarrow 0$$

ב- L^2 אז לכל $g \in R(T)$ מתקיים

$$\langle f_n, g \rangle \rightarrow 0.$$

ב. אם לכל $g \in R(T)$ מתקיים

$$\langle f_n, g \rangle \rightarrow 0,$$

אז

$$f_n \rightarrow 0$$

ב- L^2

תרגיל 26
הראה כי

$$D_N * f = S_N f.$$

תרגיל 27
הראה שלכל

$$x \in [-\pi, \pi]$$

מתקיים

$$|D_N(x)| \leq 2N + 1.$$

תרגיל 28
הראה כי

$$D_N(x) = \begin{cases} 2N + 1, & x = 0 \\ \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

תרגיל 29
הראה כי

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

תרגיל 30
הראה כי

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$$

תרגיל 31
הראה כי

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1.$$

תרגיל 32
הראה כי

$$\sigma_N f = f * F_N.$$

תרגיל 33
חשב את

$$\sigma_N * e_k$$

לכל

$$N \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

לאחר מכן קבע האם בהכרח

$$\sigma_N f \rightarrow f$$

ב- L^2 לכל $f \in R(T)$, ונמק.

תרגיל 34
הראה שלכל

$$\delta, \varepsilon > 0$$

החל ממקום מסוים מתקיים

$$\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x) dx \leq \varepsilon.$$

תרגיל 35
תהי

$$f \in C(T).$$

הראה כי

$$\sigma_N f \rightarrow f$$

במידה שווה.

תרגיל 36
תהי

$$f \in R(T).$$

הראה כי

$$\sigma_N f(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

תרגיל 37
נגדיר

$$P_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2}.$$

הראה כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) dx = \pi$$

לכל n , וכי לכל $\delta > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\infty} P_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-\delta} P_n(x) dx = 0.$$

לאחר מכן, אם $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f$ פרציפה ו- 2π -מחזורית, נגדיר

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) P_n(t) dt.$$

הראה כי

$$f_n \rightarrow f$$

במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.

תרגיל 38

נסמן ב- f את הפונקציה 2π -מחזורית הנתונה על ידי

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

עבור

$$-\pi \leq t < \pi.$$

נגדיר

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \cos(nt).$$

הוכח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

מתכנס במידה שווה לפונקציה f .

תרגיל 39

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n$$

מתכנס. הוכח שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

מתכנס לפונקציה גזירה בקטע

$$[-\pi, \pi].$$

תרגיל 40

נסמן ב- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ את הפונקציה 2π מחזורית שמקיימת

$$f(t) = e^t$$

לכל

$$-\pi \leq t < \pi.$$

קבע האם הסדרה

$$\{S_N f\}_{N=1}^{\infty}$$

מתכנסת במידה שווה ב- $\mathbb{R}$

תרגיל 41

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה 2π מחזורית הנתונה בקטע $[-\pi, \pi]$ על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq |x| < \frac{\pi}{2} \\ a|x| + b, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}.$$

מצא עבור אילו ערכים של a, b טור פורייה של f מתכנס במידה שווה ב- $\mathbb{R}$ ל- f .

תרגיל 42
 תהי $f \in C(T)$
 נגדיר

$$g(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$$

עבור

$$x \in [-\pi, \pi]$$

נגדיר את $h(x)$ להיות ההמשכה המחזורית עם מחזור 2π של

$$g(x) - \hat{f}(0)x$$

מן הקטע $[-\pi, \pi)$ אל $\mathbb{R}$.

א. הוכח כי

$$h \in C^1(T)$$

והראה כי

$$\hat{h}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}$$

לכל $n \neq 0$.

ב. הוכח כי טור הפונקציות המתאים מתכנס במידה שווה ב- $[-\pi, \pi]$ לפונקציה $g(x)$.

תרגיל 43
 הוכח כי לכל

$$f \in R[-\pi, \pi]$$

ולכל

$$c \in \mathbb{R}$$

מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx + c) dx = 0.$$

תרגיל 44
 לכל פונקציה רציפה f בקטע $[0, \pi]$, הוכח כי

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right) dx = 0.$$

בינוני

תרגיל 45
תהי

$$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה גזירה המקיימת

$$f(0) = 0.$$

הראה כי

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((N + \frac{1}{3})x)}{x} dx = 0.$$

תרגיל 46
תהי $f \in C(T)$ המקיימת

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

לכל $n \geq 0$.

הראה כי פונקציה קבועה.

תרגיל 47
תהי $f \in C^1(T)$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

הוכח כי פונקציה זוגית.

ב. האם הטענה נשארת נכונה אם מחליפים את ההנחה

$$f \in C^1(T)$$

בהנחה

$$f \in R(T)?$$

הוכח או תן דוגמה נגדית.

נושא 7: קונבולוציה ומקדמי פורייה

בינוני

תרגיל 48
תהי $f \in C(\mathbb{T})$ פונקציה רציפה ומחזורית 2π עם מקדמי פורייה $\hat{f}(n)$ בקטע $[0, 2\pi]$
נגדיר את הפונקציה הבאה :

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \overline{f(-t)} dt$$

הוכיחו כי $h \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$

אם נתון ש- f פולינום טריגונומטרי מדרגה לכל היותר N .

ונראה ש-המקדמים של h הם $\hat{h}(n) = |\hat{f}(n)|^2$

תרגיל 49

תהי $f \in \mathcal{C}(T)$ המקיימת

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(2018n)$$

לכל

$$n \in \mathbb{Z}.$$

הוכח כי f קבועה.

תרגיל 50

האם קיימת פונקציה

$$g \in R(T)$$

כך שלכל

$$f \in R(T)$$

מתקיים

$$f * g = f?$$

תרגיל 51

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נגדיר

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in [-1, 1] \setminus \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

נבנה

$$h_n(x) = \int_{-1}^1 f(x-y) g_n(y) dy$$

הראה כי h_n הן פונקציות גזירות ברציפות.

תרגיל 52

חשב במפורש את הקונבולוציה

$$f(x) = (\chi_{[0,\pi]} * \chi_{[0,\pi]})(x).$$

קבע עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$ טור פורייה של f בנקודה x מתכנס לערך $f(x)$, ונמק.

תרגיל 53
תהי

$$\varphi \in C(T)$$

פונקציה לא קבועה כך ש

$$0 \leq \varphi \leq 1.$$

נגדיר

$$A_\varphi: C(T) \rightarrow C(T), A_\varphi(f) = \varphi * f.$$

א. הוכח כי A_φ היא העתקה מכווצת ביחס למטריקה

$$d_\infty(g, h) = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |g(x) - h(x)|$$

ב. הוכח כי אם

$$\varphi * f = f,$$

אז

$$f = 0.$$

אין להשתמש בעובדה

$$\widehat{\varphi * f}(n) = \hat{\varphi}(n) \hat{f}(n).$$

תרגיל 54
הראה כי הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ורציפה ב- $(0, 2\pi)$

האם קיימת פונקציה

$$g \in R(T)$$

כך שטור פורייה שלה הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

נמק.

תרגיל 55
הראה כי הפונקציה

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$$

מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ורציפה ב- $(0, 2\pi)$

האם קיימת פונקציה אינטגרבילית רימן

$$g \in R(T)$$

כך שטור פורייה שלה הוא

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$$

תרגיל 56

ידוע כי אם $f \in C(\mathbb{T})$ כלומר $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה רציפה ו- 2π מחזורית אז

הטור הבא מתכנס

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))$$

הוכיחו כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} (\sin(nx))$$

אינו טור פורייה של אף פונקציה $f \in C(\mathbb{T})$.

תרגיל 57
האם קיימת פונקציה

$$f \in R(T)$$

שעבורה

$$n\hat{f}(n) \rightarrow 0$$

כאשר

$$n \rightarrow +\infty?$$

תרגיל 58
מצא את כל הפונקציות

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

הגזירות ברציפות פעמיים והמחזוריות במחזור 2π , המקיימות

$$e^{ix} f''(x) + 5f'(x) + f(x) = 0.$$

תרגיל 59
יהי α מספר אי־רציונלי. הוכח כי לכל $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x + n\alpha\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

בכל אחד מן המקרים הבאים:

א.

$$f(x) = e^{ikx}$$

כאשר

$$k \in \mathbb{Z}.$$

ב.

f פולינום טריגונומטרי, כלומר

$$f(x) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikx}.$$

ג.

$$f \in C(T).$$

פרק 8 – טופולוגיה רב מימדית

תרגיל 1:

חשב את המרחק בין הנקודות $\begin{cases} x = (1,2,3) \\ y = (4,5,6) \end{cases}$

תרגיל 2:

חשב את המרחק בין הנקודות $\begin{cases} x = (a, b, c) \\ y = (a - 1, b + 3, c - 2) \end{cases}$

תרגיל 3:

חשב את המרחק בין הנקודות $\begin{cases} x = (1,2,3,4) \\ y = (1,4,5,6) \end{cases}$

תרגיל 1:

מצא את נקודות הפנים ונקודות השפה של $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

תרגיל 2:

מצא את נקודות הפנים ונקודות השפה של $\{0 \leq x + y + z \leq 1\}$

תרגיל 3:

מצא את נקודות הפנים ונקודות השפה של $\{x^2 + 2xy + 3y^2 \leq 1\}$

תרגיל 4:

מצא את נקודות הפנים ונקודות השפה של $\{2x^2 + 3xy + 3y^2 < 1\}$

תרגיל 1:

מצא את $int(A)$, ∂A , $\overline{A}$ של $A = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

תרגיל 2:

מצא את $int(A)$, ∂A , $\overline{A}$ של $A = \{0 \leq x + y + z \leq 1\}$

תרגיל 3:

$$A = \{x^2 + 2xy + 3y^2 \leq 1\} \quad \text{מצא את } \text{int}(A), \partial A, \bar{A}$$

תרגיל 4:

$$A = \{2x^2 + 3xy + 3y^2 < 1\} \quad \text{מצא את } \text{int}(A), \partial A, \bar{A}$$

תרגיל 1:

יהיו $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ פונקציות רציפות ונראה ש $A = \{x \in R^n | f(\vec{x}) < g(\vec{x})\}$ זו קבוצה פתוחה.
פתרון:

תרגיל 2 :

יהיו $f(\vec{x}), g(\vec{x})$ פונקציות רציפות ונראה ש $A = \{x \in R^n | f(\vec{x}) \leq g(\vec{x})\}$ זו קבוצה סגורה.

תרגיל 3:

תהי $f: R \rightarrow R$ פונקציה רציפה ונראה כי הגרף שלה

$$A = \{(x, f(x)) | x \in R\}$$

זו קבוצה סגורה.

תרגיל 4:

תהי $f: R^n \rightarrow R$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x) \rightarrow \infty$ כאשר $\|x\| \rightarrow \infty$ ונראה כי

$$A = \{x \in R^n | f(x) = f(1, 0, \dots, 0)\}$$

פרק 9 – מבוא למרחבים מטרים

תרגיל 1

יהי (X, d) מרחב מטרי.

סדרה

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

תיקרא סדרת קושי מהירה אם

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty.$$

א. הוכיחו שכל סדרת קושי מהירה היא סדרת קושי.

ב. הוכיחו ש- X שלם אם ורק אם כל סדרת קושי מהירה מתכנסת.

תרגיל 2

יהי (X, d) מרחב מטרי.

נאמר ששתי סדרות קושי

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

ו-

$$(b_n)_{n=1}^{\infty}$$

שקולות זו לזו אם הסדרה

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

היא סדרת קושי.

הערה: במידת הצורך, ניתן להשתמש בכך שזה אכן יחס שקילות, ללא הוכחה.

נתונות שתי סדרות קושי

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}.$$

א. הוכיחו כי קיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n).$$

ב. הוכיחו כי

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

שקולה ל-

$$(b_n)_{n=1}^{\infty}$$

אם ורק אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

ג. נתון ש-

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}$$

שקולה ל-

$$(b_n)_{n=1}^{\infty}.$$

נתונה סדרת קושי נוספת

$$(c_n)_{n=1}^{\infty}$$

שאינה בהכרח שקולה לקודמות.

ד. הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, c_n).$$

תרגיל 3

יהיו

$$(X, d_X), (Y, d_Y)$$

מרחבים מטריים.

נניח כי X קומפקטי, ותהי

$$f: X \rightarrow Y$$

פונקציה רציפה וחד־חד־ערכית.

הוכיחו כי הפונקציה ההופכית

$$f^{-1}: f(X) \rightarrow X$$

היא רציפה.

תרגיל 4

יהי (X, d) מרחב מטרי, ויהיו

$$K_1, K_2 \subset X$$

קבוצות קומפקטיות זרות ולא ריקות.

א. הוכיחו כי המרחק בין הקבוצות חיובי:

$$d(K_1, K_2) := \inf_{x \in K_1, y \in K_2} d(x, y) > 0.$$

ב. הראו כי קיימות קבוצות פתוחות זרות

$$U_1, U_2 \subset X$$

כך ש־

$$K_i \subset U_i$$

עבור $i = 1, 2$.

תרגיל 5

יהי (X, d) מרחב מטרי.

תת־קבוצה A של X היא קומפקטית אם ורק אם, לכל אוסף

$$\{U_i\}_{i \in I}$$

של תת־קבוצות פתוחות של X , כך ש־

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

קיים תת־אוסף סופי

$$\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$$

כך ש־

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

אין צורך להוכיח זאת.

א. תהי

$$(x_n)_{n=1}^\infty$$

סדרה ב־ X שמתכנסת לגבול c

.הוכיחו שתת־הקבוצה

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$$

של X היא קומפקטית.

ב. נניח שכל תת־קבוצה קומפקטית של X היא סופית.

הוכיחו ש־ X הוא דיסקרטי, כלומר, כל תת־קבוצה של X היא פתוחה.

תרגיל 6

א. יהי (X, d) מרחב מטרי ונתון כי

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

הן סדרות קושי ב־ X .

הראו כי הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

קיים.

ב. יהי (X, d) מרחב מטרי לא קומפקטי.

הוכיחו כי קיימת תת־קבוצה אינסופית

$$Y \subset X$$

כך שבמרחב (Y, d) כל תת־קבוצה היא פתוחה.

תרגיל 7

נתונה קבוצה

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

שאיננה ריקה.

נגדיר, עבור נקודה

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

את

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

כאשר $\|z\|$ מציינת את הנורמה האוקלידית של הווקטור z .

א. הראו כי הפונקציה

$$f(x) = d(x, A)$$

הינה רציפה.

ב. הראו כי

$$d(x, A) = 0$$

אם ורק אם

$$x \in \bar{A}.$$

ג. הראו כי אם A, B שתיהן קבוצות קומפקטיות ומתקיים

$$d(A, B) = 0,$$

אז

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

תרגיל 8

א. הוכיחו או הפריכו:

אם

$$K \subset \mathbb{R}^n$$

קבוצה סגורה ו־

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציה רציפה, אז גם התמונה

$$f(K)$$

היא קבוצה סגורה.

ב. נתונה קבוצה קומפקטית

$$K \subset \mathbb{R}^n$$

ופונקציה רציפה

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

הראו כי קבוצת הגרף

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)): x \in K\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

היא קבוצה קומפקטית.

תרגיל 9

תהי

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

אינטגרבילית רימן בקטעים סגורים סופיים.

א. נתון גם שהאינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

מתכנס.

נגדיר

$$\text{med}(f) = \left\{ c \in \mathbb{R}: \int_{-\infty}^c f(x) dx = \int_c^{\infty} f(x) dx \right\}.$$

הוכיחו כי

$$\text{med}(f)$$

היא תת־קבוצה סגורה ב־ $\mathbb{R}$.

ב. נניח גם ש־ f רציפה ו־

$$f \geq 0.$$

נגדיר לכל x, y פונקציה

$$d_f(x, y) = \left| \int_x^y f(t) dt \right|.$$

הוכיחו כי d_f היא פונקציית מרחק, כלומר מטריקה, על

$$X = \text{int}(Z),$$

כאשר

$$Z = \{x \in \mathbb{R}: \bar{f}(x) \neq 0\}.$$

תרגיל 10

נתבונן במרחב המטרי

$$C_b = \{f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: f \text{ רציפה וחסומה}\}$$

עם המטריקה האוניפורמית

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x) - g(x)|$$

נגדיר את תת־המרחב

$$C_0 = \{f \in C_b: \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

א. מצאו את הפנים

$$\text{int}(C_0).$$

ב. האם C_0 סגורה? נמקו את תשובותיכם.

תרגיל 11

נתון מרחב מטרי

$$X = [a, b] \times [a, b]$$

עם המטריקה האוקלידית המושרית של $\mathbb{R}^2$.

א. נתונה פונקציה רציפה

$$K: X \rightarrow \mathbb{R}.$$

עבור פונקציה רציפה

$$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

נגדיר פונקציה

$$v(x) = \int_a^b K(x, y)u(y) dy.$$

הוכיחו כי v רציפה ב- $[a, b]$.

ב. נניח שלכל

$$(x, y) \in X$$

מתקיים

$$|K(x, y)| < M,$$

ונניח כי

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

כך ש-

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

בנוסף, נתונה פונקציה רציפה

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

הוכיחו שקיימת ויחידה פונקציה

$$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

רציפה ב- $[a, b]$ כך ש-

$$u(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y) dy$$

לכל

$$a \leq x \leq b.$$

תרגיל 12

לכל

$$u, v \in \mathbb{R}$$

נגדיר:

$$\rho(u, v) := \frac{|u - v|}{\sqrt{1 + |u|^2} \sqrt{1 + |v|^2}}.$$

זוהי מטריקה על הקבוצה $\mathbb{R}$. אתם לא נדרשים להוכיח זאת.

א. לכל סדרה

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

של מספרים ממשיים, אם הסדרה מתכנסת במובן הרגיל לגבול

$$x_0,$$

כמו בחדו"א 1, אז היא מתכנסת במרחב המטרי

$$(\mathbb{R}, \rho)$$

לאותו גבול x_0 .

ב. לכל סדרה

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

של מספרים ממשיים, אם סדרת הערכים המוחלטים

$$\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$$

מתבדרת ל- ∞ , כמו בחדו"א 1, אז

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}$$

היא סדרת קושי במרחב המטרי

$$(\mathbb{R}, \rho)$$

ג. לכל סדרה של מספרים ממשיים יש תת-סדרה שהיא סדרת קושי במרחב המטרי

$$(\mathbb{R}, \rho)$$

פרק 10 – שאלות ברמת מבחן

תרגיל 1:

חשב את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 \int_n^{n+1} \frac{x}{x^5+1})$

תרגיל 2:

חשב $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \ln\left(x + \frac{x^5}{n}\right)$

תרגיל 3:

שאלה תהי f פונקציה רציפה על $[a, b]$ כך ש $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$ עבור $n = 0, \dots, N$

הוכיח שלפונקציה יש לפחות $N + 1$ שורשים.

תרגיל 4:

חשב את האינטגרל

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$$