数学活动课程讲座

直角三角形的一个性质及应用

沈文选

（湖南师范大学数学奥林匹克研究所，410081）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)01-0002-03

（本讲适合初中）

直角三角形中有如下一条有趣的结论，将其作为性质介绍如下.

性质　设 D 是 $Rt\triangle ABC(\angle C=90°)$ 的边 BC 所在直线上一点（异于点 B）. 则

$$AB^2=BD^2+DA^2\mp 2DB\cdot DC.$$

证明　当点 D 在边 BC 的延长线上时，由勾股定理有

$$\begin{aligned}AB^2-AD^2&=BC^2-CD^2\\&=(BC+CD)(BC-CD)\\&=BD(BD-2CD)\\&=BD^2-2BD\cdot CD;\end{aligned}$$

当点 D 在边 CB 上时，类似有

$$\begin{aligned}AB^2-AD^2&=(BC+CD)(BC-CD)\\&=(BD+2CD)BD\\&=BD^2+2BD\cdot CD;\end{aligned}$$

当点 D 在边 CB 的延长线上时，类似有

$$\begin{aligned}AB^2-AD^2&=(BC+CD)(BC-CD)\\&=(2CD-BD)(-BD)\\&=BD^2-2BD\cdot CD.\end{aligned}$$

显然，若点 D 与 C 重合，则 $DC=0$，有 $AB^2=BC^2+CA^2$，此即为勾股定理.

下面，从三个方面列举一些应用的例子.

1　直接在直角三角形中用

例1　如图1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 在边 CA 上，使得 $CD=1$，$DA=3$，且 $\angle BDC=3\angle BAC$. 求 BC 的长.[1]

（2009，新知杯上海市初中数学竞赛）

收稿日期：2010-07-20

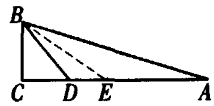

图1

解　由题意知 $\angle ABD=2\angle BAC$.

过点 B 作 $\angle ABD$ 的平分线与 DA 交于点 E. 则 $\triangle AEB$ 为等腰三角形.

令 $AE=x$. 则 $BE=x$，$DE=3-x$.

分别对 $\triangle EBC$、$\triangle ABC$ 应用性质有

$$\begin{aligned}x^2&=BE^2=BD^2+DE^2+2DE\cdot DC\\&=BD^2+(3-x)^2+2(3-x)\\&\Rightarrow BD^2=8x-15,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AB^2&=BD^2+DA^2+2DA\cdot DC\\&=8x-15+9+2\times 3=8x.\end{aligned}$$

又由角平分线性质有

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{EA}\Rightarrow\frac{8x-15}{8x}=\frac{(3-x)^2}{x^2}\Rightarrow x=\frac{24}{11}.$$

故 $BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{8x-16}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$.

2　作垂线构造新直角三角形

例2　已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$.

(1) 如图2，当点 D 在边 AB 上（不含端点）时，求证：

$$\frac{CD^2-BD^2}{BC^2}=\frac{AD-BD}{AB}.$$

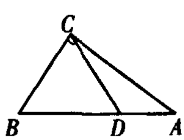

图2

(2) 当点 D 与 A 重合时，(1) 中的等式是否成立？请说明理由.

(3)当点 D 在 BA 的延长线上时,(1)中的等号是否成立?请说明理由.

(2003,"信利杯"全国初中数学联赛)

解　(1)过点 C 作 $CE\perp BD$ 于点 E,则由射影定理有

$BC^2=BA\cdot BE$.

对 Rt△CBE 及点 D 应用性质有

$CD^2=BC^2+BD^2-2BD\cdot BE$.

$$\text{故}\frac{CD^2-BD^2}{BC^2}=\frac{BC^2-2BD\cdot BE}{BC^2}$$

$$=\frac{BA\cdot BE-2BD\cdot BE}{BA\cdot BE}$$

$$=\frac{(BA-BD)-BD}{BA}=\frac{AD-BD}{AB}.$$

(2)当点 D 与 A 重合时,(1)中等式仍然成立.

此时,$AD=0$,$CD=AC$,$BD=AB$.

$$\text{于是},\frac{CD^2-BD^2}{BC^2}=\frac{AC^2-AB^2}{BC^2}=-1,$$

$$\frac{AD-BD}{AB}=\frac{-AB}{AB}=-1.$$

$$\text{故}\frac{CD^2-BD^2}{BC^2}=\frac{AD-BD}{AB}.$$

(3)当点 D 在 BA 的延长线上时,(1)中的等式不成立.

此时,同(1)有

$$\frac{CD^2-BD^2}{BC^2}=\frac{(BA-BD)-BD}{BA}$$

$$=\frac{-AD-BD}{AB}\neq\frac{AD-BD}{AB}.$$

例3　如图3,已知四边形 $ABCD$ 为正方形,$\odot O$ 过正方形的顶点 A 和对角线的交点 P,并分别与 AB、AD 交于点 F、E.

(1)求证:$DE=AF$;

(2)若 $\odot O$ 半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,$AB=\sqrt{2}+1$,求 $\frac{AE}{ED}$ 的值.

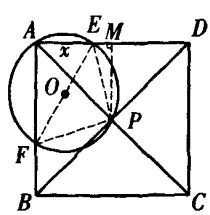

图3

(第21届江苏省初中数学竞赛)

解　显然,EF 为 $\odot O$ 的直径,即点 O 在边 EF 上.

联结 EP、FP. 易知△EPF 为等腰直角三角形. 于是,$EP=\sqrt{2}OE=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(1)由 $DP=AP$,$\angle EDP=45°=\angle FAP$,$\angle DEP=\angle AFP$,知

△$DEP\cong$△$AFP\Rightarrow DE=AF$.

(2)过点 P 作 $PM\perp AD$ 于点 M,则 M 为边 AD 的中点.

$$\text{故 } AM=\frac{\sqrt{2}+1}{2},AP=\sqrt{2}AM=\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

令 $AE=x$. 则 $EM=\frac{\sqrt{2}+1}{2}-x$.

对 Rt△APM 及点 E 应用性质有

$AP^2=AE^2+EP^2+2EA\cdot EM$,

$$\text{即}\quad\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+2x\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}-x\right),$$

亦即　$x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$.

解得 $AE=x=1$ 或 $\sqrt{2}$.

所以,$\frac{AE}{ED}=\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例4　在△ABC 中,$\angle A=75°$,$\angle B=35°$,D 是边 BC 上一点,$BD=2CD$. 求证:

$AD^2=(AC+BD)(AC-CD)$.[2]

(2008,我爱数学初中生夏令营数学竞赛)

证明　如图4,延长 BC 至点 E,使 $CE=AC$.

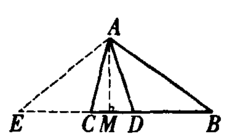

图4

由题设知 $\angle C=70°$,则

$\angle E=35°=\angle B$,

即△ABE 为等腰三角形.

过点 A 作 $AM\perp BE$ 于点 M. 则 M 为边 BE 的中点. 取 BD 的中点 F,则 $BF=FD=DC$. 联结 AF.

对 Rt△ADM 及点 C 应用性质有

$AD^2=AC^2+CD^2-2CD\cdot CM$

$=AC^2+CD(CD-2CM)$

$=AC^2+CD(DM-CM)$

$=AC^2+CD(CE-BD)$

$=AC^2+CD(AC-2CD)$

$=(AC+BD)(AC-CD)$.

3 作出特殊线,证明是垂线

例5 如图5,已知⊙O在矩形$ABCD$内,过顶点A、B、C、D分别作⊙O的切线,切点分别为A_1、B_1、C_1、D_1. 若$AA_1=3$, $BB_1=4$, $CC_1=5$,求DD_1的长.

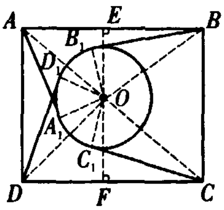

图5

解 联结AO、BO、CO、DO、A_1O、B_1O、C_1O、D_1O. 则

$OA_1\perp AA_1$, $OB_1\perp BB_1$,

$OC_1\perp CC_1$, $OD_1\perp DD_1$.

设⊙O的半径为r. 则由勾股定理知

$AO^2=AA_1^2+r^2$, $BO^2=BB_1^2+r^2$,

$CO^2=CC_1^2+r^2$, $DO^2=DD_1^2+r^2$.

过点O作$OE\perp AB$, $OF\perp DC$,则

$BE=CF$.

对Rt△AOE及点B、Rt△ODF及点C分别应用性质有

$AO^2=OB^2+AB^2-2BA\cdot BE$,

$DO^2=OC^2+CD^2-2CD\cdot CF$.

两式相减得

$AO^2-DO^2=OB^2-OC^2$,

即 $AO^2+OC^2=DB^2+OD^2$. ①

于是,$AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$.

故$DD_1=\sqrt{AA_1^2+CC_1^2-BB_1^2}=3\sqrt{2}$.

【注】式①表明:矩形内一点到两组对顶点的距离的平方和相等.

例6 设H为锐角△ABC的垂心,P是△ABC所在平面内任一点,作$HM\perp PB$于点M与直线AC交于点J,作$HN\perp PC$于点N与直线AB交于点I. 求证:$PH\perp IJ$.

证明 设BE、CF是△ABC的两条高. 则知H为其交点.

由垂心的性质知$BH\cdot HE=CH\cdot HF$.

由$MJ\perp BM$, $BE\perp EJ$,知B、J、E、M四点共圆,即$MH\cdot HJ=BH\cdot HE$.

由$NI\perp CN$, $CF\perp FI$,知C、N、F、I四点共圆,即$NH\cdot HI=CH\cdot HF$.

于是,$MH\cdot HJ=NH\cdot HI$.

联结PI、PJ. 在Rt△PIN、Rt△PJM中分别对点H应用性质有

$PI^2=IH^2+HP^2+2HI\cdot HN$,

$PJ^2=JH^2+HP^2+2HJ\cdot HM$.

两式相减得$PI^2-PJ^2=HI^2-HJ^2$.

故$PH\perp IJ$.

练习题

1. 设P为△ABC的边AB上一点. 求证:

$CP^2=AC^2\cdot\frac{PB}{AB}+BC^2\cdot\frac{AP}{AB}-AP\cdot PB$.

提示:过点C作$CD\perp AB$于点D.

在Rt△ADC、Rt△CDB中对点P应用性质得到AC^2与BC^2的表达式,再分别以PB、PA乘前述两式后相加整理即得结论.

2. 已知⊙O内的弦CD平行于直径AB,P为AB上的一点. 求证:

$PC^2+PD^2=PA^2+PB^2$.

提示:由上题结论得到CP^2、DP^2的表达式,再将两式相加即证.

3. 设P为正△ABC的外接圆劣弧$\overset{\frown}{BC}$上任一点. 求证:$PB+PC=PA$.

提示:分别过点B、C作$BE\perp AP$、$CF\perp AP$于点E、F. 注意到$\angle APB=\angle APC=60°$,即知$PE=\frac{1}{2}BP$, $PF=\frac{1}{2}PC$.

在Rt△ABE、Rt△ACF中分别对点P应用性质有

$AB^2=BP^2+AP^2-2PE\cdot PA$,

$AC^2=CP^2+AP^2-2PF\cdot PA$.

从而,$BP^2-PA\cdot BP+AP^2-AB^2=0$,

$CP^2-PA\cdot CP+AP^2-AB=0$.

于是,BP、CP是一元二次方程

$x^2-PA\cdot x+PA^2-AB^2=0$

不定方程的一些常用解法

李宝毅

（天津师范大学数学科学学院，300387）

中图分类号：O122.1　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)01－0005－06

（本讲适合高中）

不定方程是含有未知整数的等式，它是初等数论的重要内容之一，求解不定方程或者分析解的性质主要是利用初等数论中的常用思想方法和不等式估计结合枚举法等. 本文通过具体题目分类介绍了不定方程的一些常用的研究方法和技巧.

1　利用因子分析法研究不定方程

因子分析法是利用初等数论中整除和同余的基本理论和方法讨论不定方程，是研究不定方程的基本手段之一.

例 1　若正整数 $a、b、c$ 的最大公因子为 1，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，证明：$a+b$ 为完全平方数.

【分析】此题较简单，下面介绍两种证法.

证法 1　设 $x=(a,b)$，$y=(b,c)$，$z=(c,a)$. 则由 $(a,b,c)=1$，得 $x、y、z$ 两两互质.

由 $x\mid a$，$z\mid a$，$(x,z)=1$，可推出 $xz\mid a$，故可设 $a=Axz$.

同理，设 $b=Bxy$，$c=Cyz$，其中，$A、B、C$ 两两互质. 于是，原方程可转化为

$$\frac{1}{Axz}+\frac{1}{Bxy}=\frac{1}{Cyz}\Rightarrow By+Az=\frac{ABx}{C}.$$

因此，$C\mid ABx$.

因为 $A、B、C$ 两两互质，所以，$C\mid x$.

显然，C 是 $a、b、c$ 的公因子，因此，$C=1$.

同理，$A=1$，$B=1$.

收稿日期：2010－10－11

的两个根.

由韦达定理得 $BP+CP=PA$.

4. $\odot O$ 与 $\odot D$ 交于点 $A、B$，BC 为 $\odot D$ 的切线，点 C 在 $\odot O$ 上，且 $AB=BC$.

(1) 证明：点 O 在 $\odot D$ 的圆周上；

(2) 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，求 $\odot D$ 的半径 r 的最小值.

（2008，全国初中数学联赛）

提示：(1) 略.

(2) 延长 BO 与 AC 交于点 E，则 $BE\perp AC$. 由 $S=\frac{1}{2}AC(OB+OE)$，知

$$OB+OE=\frac{2S}{AC}.$$

对 Rt $\triangle ABE$ 及点 O 应用性质有

$$AB^2=OB^2+AO^2+2OB\cdot OE$$
$$=2OB(OB+OE)$$
$$=2OB\cdot\frac{2S}{AC}=4S\cdot\frac{OB}{AC}.$$

由弦切角与圆心角的关系知

$\angle ODB=\angle ABC$.

从而，$\triangle ODB\backsim\triangle ABC$.

于是，$\frac{OD}{AB}=\frac{OB}{AC}$.

$$故\ r=OD=\frac{OB}{AC}\cdot AB=\frac{OB}{AC}\sqrt{4S\cdot\frac{OB}{AC}}$$
$$=2\sqrt{S}\left(\frac{OB}{AC}\right)^{\frac{3}{2}}\geqslant2\sqrt{S}\left(\frac{OB}{2OB}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2S}}{2}.$$

参考文献：

[1]　2009 年新知杯上海市初中数学竞赛[J]. 中等数学，2010(6).

[2]　2008 我爱数学初中生夏令营数学竞赛[J]. 中等数学，2009(1).

从而，$x=y+z$.

故 $a+b=x(y+z)=x^2$ 为完全平方数.

证法2 显然，$c>a,c>b$,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow\frac{a-c}{c}=\frac{c}{b-c}$.

设 $\frac{a-c}{c}=\frac{c}{b-c}$ 为既约正有理数 $\frac{p}{q}$. 则

$a=\frac{p+q}{q}\cdot c,b=\frac{p+q}{p}\cdot c$.

由 $(p,q)=1$，得

$(p+q,q)=1,(p+q,p)=1$.

故 $q\mid c,p\mid c\Rightarrow pq\mid c$.

记 $c=kpq$. 则

$a=kp(p+q),b=kq(p+q)$.

由 $(a,b,c)=1$，得 $k=1$.

故 $a+b=p(p+q)+q(p+q)=(p+q)^2$ 为完全平方数.

【说明】证法1利用 $(a,b,c)=1$ 时常用的变量代换将方程进行等价变形，利用因子分析的方法进行研究；证法2巧妙地将方程写为比例形式，利用既约分数 $\frac{p}{q}$ 计算 a 和 b 的值，从而解决问题.

例2 设 A、B 是两个不相等的 $2n(n\in\mathbf{N}_+)$ 位数，A 的前 n 位数等于 B 的后 n 位数，A 的后 n 位数等于 B 的前 n 位数，且 $A\mid B$. 求 $A+B$ 的值.

【分析】此题改编自2003年日本数学奥林匹克[1].

设 x 为 A 的前 n 位数所对应的正整数，y 为 A 的后 n 位数所对应的正整数. 则

$A=10^nx+y,B=10^ny+x$.

设 $B=kA(2\leqslant k\leqslant 9)$，即

$10^ny+x=k(10^nx+y)$.

故 $A+B=(x+y)(10^n+1)$

$=A+kA=(k+1)(10^nx+y)$.

若 $(k+1,10^n+1)=1$，则

$10^nx+y\equiv 0(\bmod 10^n+1)$,

即 $-x+y\equiv 0(\bmod 10^n+1)$.

注意到 $B>A\Rightarrow y>x$，且 $y-x<10^n$.

因此，$(10^n+1)\mid(y-x)$ 是不可能的.

故 $d=(k+1,10^n+1)>1(2\leqslant d\leqslant 10)$.

利用 $d\mid(10^n+1)$，易得 $d\neq 2,3,4,5,6,8,9,10$，即 d 只能为 7，$k=6$.

显然，$10^n+1\equiv 0(\bmod 7)$，$n=0,1,\cdots,5$ 中只可能 $n=3$.

结合费马小定理得 $n\equiv 3(\bmod 6)$.

记 $m=\frac{10^n+1}{7}$. 则由

$(x+y)(10^n+1)=7(10^nx+y)$

$\Rightarrow m(x+y)=(7m-1)x+y$

$\Rightarrow(m-1)y=(6m-1)x$.

由 $(m-1,6m-1)=(m-1,5)=1$（m 的个位数字只能为3，故 $(m-1,5)\neq 5$），得

$\begin{cases}x=(m-1)l,\\y=(6m-1)l.\end{cases}$

注意到当 $l\geqslant 2$ 时，

$y\geqslant 2(6m-1)>7m=10^n+1$,

这是不可能的. 故 $l=1$.

综上，当 $n\equiv 3(\bmod 6)$ 时，

$x=\frac{10^n-6}{7},y=\frac{6\times 10^n-1}{7}$.

因此，$A+B=10^{2n}-1(n\equiv 3(\bmod 6))$.

【说明】本题综合应用了初等数论中的常用思想和方法（数的进制、同余理论、最大公因子性质等）进行讨论，关键的一步是 $A+B$ 两种形式的因式分解.

例3 求正整数 x、y，使得

$x+y^2+(x,y)^3=xy(x,y)$.

【分析】设 $z=(x,y)$，$x=az$，$y=bz$. 则 $(a,b)=1$.

方程转化为 $a+b^2z+z^2=abz^2$. 故 $z\mid a$.

设 $a=cz$，即 $x=cz^2$. 则方程变为

$c+b^2+z=bcz^2\Rightarrow c=\frac{b^2+z}{bz^2-1}$.

下面对变量 z 进行讨论.

(1)若 $z=1$，则

$c=\frac{b^2+1}{b-1}=(b+1)+\frac{2}{b-1}$,

正整数 b 只可能为 2 或 3，易得到两组解

$$(x,y)=(5,2)\text{或}(5,3).$$

(2) 若 $z=2$，则 $c=\frac{b^2+2}{4b-1}$，即

$$16c=\frac{16b^2+32}{4b-1}=(4b+1)+\frac{33}{4b-1},$$

$4b-1$ 只可能为 3 或 11（显然不可能为 33），易得到两组解

$$(x,y)=(4,2)\text{或}(4,6).$$

(3) 若 $z\geqslant 3$，则

$$cz^2=\frac{b^2z^2+z^3}{bz^2-1}=b+\frac{z^3+b}{bz^2-1}.$$

由 $\frac{z^3+b}{bz^2-1}\geqslant 1$，得

$$b\leqslant\frac{z^3+1}{z^2-1}=\frac{z^2-z+1}{z-1}=z+\frac{1}{z-1},$$

即正整数 $b\leqslant z$.

因此，$c=\frac{b^2+z}{bz^2-1}\leqslant\frac{z^2+z}{z^2-1}<2$，正整数 c 只能为 1.

此时，$b^2-bz^2+(z+1)=0$.

注意到 $\Delta=z^4-4(z+1)\in((z^2-1)^2,z^4)$.

故方程无正整数解.

综上，$(x,y)=(5,2),(5,3),(4,2),(4,6)$.

【说明】处理多变量的不定方程时，通过观察方程的特点，选择一个变量作为主变量进行研究，可以适当地减少计算量. 当 $z\geqslant 3$ 时，通过不等式估计变量的取值范围，证明方程无解.

2 利用不等式估计结合枚举法研究不定方程

通过不等式估计变量的取值范围，是初等数论中研究不定方程的常用方法之一. 当变量的取值范围缩小到可以容忍的程度内时，利用枚举法可以将问题分解为若干个简单问题，化整为零，各个击破.

例 4 设 $n\in\mathbf{N}_+$，$f(n)$ 为 n 在十进制下的各位数字之积. 解方程 $f(n)=\frac{2}{3}n+8$.

【分析】显然，n 不是一位数.

设 n 是 $k+1$ 位数，即 $n=\overline{x_kx_{k-1}\cdots x_1x_0}$. 通过不等式估计研究 k 的取值范围.

$$n=\sum_{i=0}^{k}10^ix_i\geqslant 10^kx_k=9^k\left(\frac{10}{9}\right)^kx_k$$

$$\geqslant\left(\frac{10}{9}\right)^k\prod_{i=0}^{k}x_i=\left(\frac{10}{9}\right)^kf(n),$$

即 $f(n)\leqslant\left(\frac{9}{10}\right)^kn$.

当 $k\geqslant 4$ 时，$\left(\frac{9}{10}\right)^k\leqslant 0.6561<\frac{2}{3}$，原方程无解.

下面枚举讨论 $k=1,2,3$ 这三种情况.

(1) 当 n 为两位数 $10a+b$ 时，

$$f(n)=ab=\frac{20a+2b}{3}+8,$$

即 $a=\frac{2b+24}{3b-20}$.

由 $3b>20$，知 b 只有 7、8、9 这三种情形.

当 $b=7$ 或 8 时，$a>9$，不可能；

当 $b=9$ 时，$a=6$.

(2) 当 n 为三位数 $100a+10b+c$ 时，

$$f(n)=abc=\frac{200a+20b+2c}{3}+8,$$

即 $a=\frac{20b+2c+24}{3bc-200}$.

由 $3bc>200$，知 $bc\geqslant 67$.

从而，b、c 只能为 8 或 9，且不可能同时为 8.

经检验，a 不存在整数解.

(3) 当 n 为四位数 $1\,000a+100b+10c+d$ 时，同理，

$$a=\frac{200b+20c+2d+24}{3bcd-2\,000}.$$

由 $3bcd>2\,000$，知 $bcd\geqslant 667$.

只可能为 $b=c=d=9$，此时，可验证 a 无解.

【说明】不等式估计时要选择适当的变量作为研究对象，枚举讨论时一定要认真细致.

例 5 求正整数 a、b、c，使得

$$[a,b,c]=a+b+c.$$ [2]

(2005,奥地利数学奥林匹克)

【分析】显然,当 $a=b=c$ 时,方程不可能成立.

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,其中等号不能同时成立.

因此,$a+b<2c\Rightarrow c<a+b+c<3c$.

结合 $lc=[a,b,c]=a+b+c$,得 $l=2$,即 $a+b=c$.

另一方面,$kb=[a,b,c]=a+b+c=2a+2b$.

故 $b\mid 2a$.

结合 $2a\leqslant 2b$,得 $b=a$ 或 $b=2a$.

(1)当 $b=a$ 时,$c=a+b=2a$.

则 $[a,a,2a]=2a\neq a+b+c$,方程无解.

(2)当 $b=2a$ 时,$c=3a$.

则 $[a,2a,3a]=6a=a+b+c$,方程恒成立.

例6 求 $k、n\in\mathbf{N}_+$,使得

$(n+1)^k=n!+1$.[3]

(2002—2003,芬兰高中数学竞赛)

【分析】从质数角度入手,设 p 是 $n+1$ 的质因子.则 $p\mid(n!+1)$.

显然,当 $p\leqslant n$ 时,此式不可能成立.

故 $n+1$ 必为质数 p,即 $p^k=(p-1)!+1$.

通过枚举法先研究几种简单情况.

当 $p=2$ 或 3 时,$k=1$;当 $p=5$ 时,$k=2$.

下面证明:当 $p\geqslant 7$ 时,方程无解.

当 $p\geqslant 7$ 时,显然,$k\geqslant 2$.

设 $n=p-1=2m(m\geqslant 3)$.则 $n!=(2m)!$ 中有 $2、m、2m$ 三项.故 $(2m)^2\mid n!$,即 $n^2\mid n!$.从而,$n^2\mid[(n+1)^k-1]$.

由二项式定理知

$(n+1)^k-1\equiv kn(\bmod n^2)\equiv 0(\bmod n^2)$.

于是,$n\mid k,k\geqslant n$.

故 $(n+1)^k-1\geqslant(n+1)^n-1\geqslant n^n>n!$.

方程不可能成立.

【说明】对于不定方程,枚举法不但可以讨论简单情形,得到一些解,而且可以总结经验,为最终彻底解决问题做准备.

例7 设 $x、y、z$ 为大于 2 的整数,且

$xy\equiv 2(\bmod z),yz\equiv 2(\bmod x)$,

$zx\equiv 2(\bmod y)$.

求 $x+y+z$ 的值.

【分析】此题改编自 2005 年中国台湾数学奥林匹克[4].

三个同余式等价于

$x\mid(yz-2),y\mid(zx-2),z\mid(xy-2)$.

因此,$xyz\mid[(yz-2)(zx-2)(xy-2)]$.

注意到

$(yz-2)(zx-2)(xy-2)$

$=Axyz+4(xy+yz+zx)-8$.

故 $4(xy+yz+zx)-8=kxyz$,即

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{8}{xyz}=k. \quad ①$$

利用整数 $x、y、z>2$ 可以估计变量 k 的取值范围,

$$k<4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leqslant 4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=4,$$

即正整数 $k\leqslant 3$.

由于 $x、y、z$ 两两不等(假设 $x=y$,则由 $x\mid(yz-2)$,得 $x\mid 2$,与 x 为大于 2 的整数矛盾),不妨设 $x<y<z$.

(1)当 $k=3$ 时,若 $x\geqslant 4$,则

$$k<4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leqslant 4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)<3,$$

矛盾,故 $x=3$.

代入方程①得

$$y=\frac{12z-8}{5z-12}\Rightarrow 5y=12+\frac{104}{5z-12}.$$

结合 $x<y<z$,得 $z=5,y=4$.

经检验,$x=3,y=4,z=5$ 不满足题设中的同余式组,舍去.

(2)当 $k=2$ 时,若 $x\geqslant 6$,则

$$k<4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leqslant 4\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)<2,$$

矛盾,故 $x=3,4,5$.

将 $k=2,x=3$ 代入方程①得

$$y=\frac{6z-4}{z-6}=6+\frac{32}{z-6}.$$

结合 $x<y<z$,可得三组解

$(z,y)=(14,10),(22,8),(38,7)$.

经检验,可得满足题设同余式组的两组解

$(x,y,z)=(3,8,22),(3,10,14)$.

同理,由 $x=4$ 可得满足题设同余式组的两组解

$(x,y,z)=(4,5,18),(4,6,11)$.

(3)当 $k=1$ 时,若 $x\leqslant4$,则

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{8}{xyz}=\frac{4}{x}+\frac{4xz}{xyz}+\frac{4}{z}-\frac{8}{xyz}>1,$$

方程不可能成立;

若 $x\geqslant12$,则

$$k<4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\leqslant4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right)<1,$$

矛盾. 故 $x=5,6,\cdots,11$.

同理,枚举讨论七种情形,可以得到满足题设同余式组的两组解

$(x,y,z)=(6,14,82),(6,22,26)$.

对上述各组解,计算 $x+y+z$ 的值即可.

【说明】将三个同余式组转化为一个不定方程时,解集扩大了,因此,需要对根检验. 枚举法研究问题的各种情形时,先从相对简单情形入手,相对复杂的情形放到最后.

3 与有理数有关的不定方程

含有未知有理数的等式是一类特殊的不定方程,通过将有理数转化为既约分数形式,可以将方程转化为一般的不定方程.

例 8 设 $a、b、c$ 为正有理数,且 $a+\frac{1}{bc}$、$b+\frac{1}{ca}$、$c+\frac{1}{ab}$ 均为整数. 求 $a+b+c$ 的值.

【分析】此题改编自 2006 年巴尔干地区数学奥林匹克[5].

本题含有三个未知有理数,若直接将它们写成既约分数,则问题转化为含有九个未知正整数的三个方程组成的不定方程组,显然,求解比较困难. 通过观察三个式子的特点,可以发现均含有项 abc,且三个式子的乘积只含有此项.

三个式子之积

$$M=\left(a+\frac{1}{bc}\right)\left(b+\frac{1}{ac}\right)\left(c+\frac{1}{ab}\right)=\frac{(abc+1)^3}{a^2b^2c^2}$$

为正整数.

设 abc 为既约分数 $\frac{p}{q}$ $(p、q\in\mathbf{Z}_+)$. 则

$$M=\frac{(p+q)^3}{p^2q}\Rightarrow(p+q)^3=Mp^2q.$$

由 $p\mid(p+q)^3$, $q\mid(p+q)^3$,可分别推出 $p\mid q^3$, $q\mid p^3$.

结合 $(p,q)=1$ 得

$p=1$, $q=1$.

由 $abc=1$,得

$$a+\frac{1}{bc}=2a\in\mathbf{N}_+,\ b+\frac{1}{ca}=2b\in\mathbf{N}_+,$$

$$c+\frac{1}{ab}=2c\in\mathbf{N}_+.$$

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$. 则可以得到三组解

$$(a,b,c)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},4\right),\left(\frac{1}{2},1,2\right),(1,1,1).$$

于是,$a+b+c$ 的值分别为 5、3.5、3.

【说明】研究含有未知有理数的方程时,先通过变形减少未知有理数的个数或者简化方程的形式,然后再用既约分数替代未知有理数,可以减少计算量.

例 9 求方程 $x^{x+y}=(x+y)^y$ 的有理数解.

【分析】若 $x=0$,则 $x^{x+y}=0$, $(x+y)^y=0$.

因此,$y=0$,但是,0^0 无意义,故 $x\neq0$.

若 $y=0$,则 $x^x=1$,即 $x=1$.

显然,$x=1$, $y=0$ 是一组有理数解.

以下不妨设 $x\neq0$, $y\neq0$.

令 $y=xz$. 则原方程等价于

$$x^{x(1+z)}=[x(1+z)]^{xz}$$

$$\Leftrightarrow x^{1+z}=x^z(1+z)^z\Leftrightarrow x=(1+z)^z. \qquad ①$$

设 $x、z$ 分别为既约分数 $\frac{m}{n}$、$\frac{p}{q}$ $(n、q\in\mathbf{Z}_+)$.

代入式①得

$$\left(\frac{m}{n}\right)^q=\frac{(p+q)^p}{q^p}\Rightarrow q^pm^q=n^q(p+q)^p.$$

当 $p>0$ 时，$q^p\mid n^q(p+q)^p$.

由 $(p,q)=1$，得 $(q,p+q)=1$.

因此，$q^p\mid n^q,n^q\mid q^p m^q$.

由 $(m,n)=1$，得 $n^q\mid q^p$.

所以，$q^p=n^q$.

若 q 为大于 1 的正整数，设 q 的算术分解式 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 则

$q^p=p_1^{\alpha_1 p}p_2^{\alpha_2 p}\cdots p_k^{\alpha_k p}=n^q$.

因此，$q\mid\alpha_i p$，即 $q\mid\alpha_i(i=1,2,\cdots,k)$.

记 $Q=p_1^{\frac{\alpha_1}{q}}p_2^{\frac{\alpha_2}{q}}\cdots p_k^{\frac{\alpha_k}{q}}$. 则 $q=Q^q$.

利用数学归纳法易证：

对于正整数 $q>1$，有 $2^q>q$.

因此，$Q^q\geqslant 2^q>q$，矛盾.

故 $q=1$，随之而来的是 $n=1$.

同理，当 $p<0$ 时，$(p+q)^{-p}m^q=n^q q^{-p}$，可以推出 $q^{-p}=|m|^q$.

因此，$q=1,|m|=1$.

综上，原方程的有理数解为

$x=(1+z)^z,y=z(1+z)^z$，

其中，$z\neq-1$ 为整数.

练习题

1. 设 A、B、C 为三个三位数，且 $A+B+C=2\,010$. 求 $S_{10}(A)+S_{10}(B)+S_{10}(C)$ 的最小值和最大值（$S_{10}(A)$ 表示 A 在十进制下的各位数字之和）.

提示：设 $A=100a_2+10a_1+a_0$,

$B=100b_2+10b_1+b_0$,

$C=100c_2+10c_1+c_0$.

记 $x=a_2+b_2+c_2,y=a_1+b_1+c_1$,

$z=a_0+b_0+c_0$.

问题转化为：设整数 $3\leqslant x\leqslant 27,0\leqslant y\leqslant 27,0\leqslant z\leqslant 27$，且 $100x+10y+z=2\,010$. 求 $x+y+z$ 的最小值和最大值.

2. 设 A 是一个 2 010 位数（十进制）. 若可通过交换 A 的各位数字的位置得到一个新数 B，使得 $A+B=10^{2\,010}$，则 $50\mid A$.

提示：设 $A=\overline{x_{2\,009}x_{2\,008}\cdots x_1x_0}$,

$B=\overline{y_{2\,009}y_{2\,008}\cdots y_1y_0}$.

则存在 $t(0\leqslant t\leqslant 2\,009)$，使得

$x_k=y_k=0(0\leqslant k<t)$,

$x_t+y_t=10,x_k+y_k=9(t<k\leqslant 2\,009)$，

且 $y_0,y_1,\cdots,y_{2\,009}$ 是 $x_0,x_1,\cdots,x_{2\,009}$ 的一个重新排列.

只需证明：$t\geqslant 1$，且 $x_t=5$.

3. 设 $A=\{a^2-b^2\mid a、b\in\mathbf{N}_+,a>b\}$,

$B=\{a^2+b^2\mid a、b\in\mathbf{N}_+\}$,

x_n 是 $\mathbf{N}_+\backslash(A\cup B)$ 中最大的 n 位数. 求所有的 $n\in\mathbf{N}_+$，使得 x_n 的各位数字的平方和为一个完全平方数.

提示：$x_1=6$ 满足条件，$x_2=94$ 不满足条件. 当 $n\geqslant 3$ 时，$x_n=10^n-2$，x_n 的各位数字的平方和为 $81(n-1)+64$.

4. 求方程 $x^k+y^k=3^n(k>1)$ 的正整数解.

提示：设 $d=(x,y)=3^\alpha$. 问题可转化为 $\alpha=0$ 的情形. 再对 k 分奇偶性讨论.

5. 设 $n\in\mathbf{N}_+$. 求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{n}$ 存在正整数解的充要条件.

提示：当 $n=2k$ 时，$\frac{4}{2k}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$.

当 $n=m(4k-1)$ 时，

$$\frac{4}{m(4k-1)}=\frac{1}{km}+\frac{1}{km(4k-1)}.$$

当 n 只含 $4k+1$ 型因子时，$n\equiv 1(\bmod 4)$.

故原方程等价于 $(4x-n)(4y-n)=n^2$.

若存在正整数解，则

$4x-n\equiv -1(\bmod 4)$,

即 n 必含 $4k-1$ 型因子，矛盾.

参考文献：

[1] 2003 日本数学奥林匹克[J]. 中等数学，2004（增刊）.

[2] 第 36 届奥地利数学奥林匹克（2005）[J]. 中等数学，2006（增刊）.

[3] 2002—2003 芬兰高中数学竞赛[J]. 中等数学，2004（增刊）

[4] 2005 中国台湾数学奥林匹克摘选[J]. 中等数学，2006（增刊）.

[5] 第 23 届巴尔干地区数学奥林匹克（2006）[J]. 中等数学，2007（增刊）.

命题与解题

由一道竞赛题想到的

宿晓阳

(四川成都实验外国语学校,610031)

中图分类号: O123.1　文献标识码: A　文章编号: 1005-6416(2011)01-0011-02

题目 如图 1,在正方形 $ABCD$ 中,已知 E、F 分别是边 BC、CD 上的点,满足 $EF=BE+DF$,AE、AF 分别与对角线 BD 交于点 M、N. 求证:

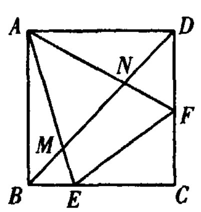

图 1

(1) $\angle EAF=45°$;

(2) $MN^2=BM^2+DN^2$.

(2007,四川省初中数学联赛)

本文在该题基础上进行拓展,即将题中的点 E、F 分别拓展到 CB、CD 延长线上,同样可以得到类似结论. 同时,利用此结论还可以编制和解决更多新的试题.

命题 在正方形 $ABCD$ 中,E、F 分别是 CB、CD 延长线上的点. 则 $EF=BE+DF$ 的充要条件是 $\angle EAF=135°$.

证明 如图 2,将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 到 $\triangle ADG$ 的位置. 则

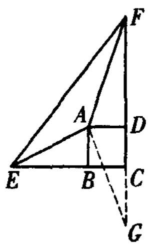

图 2

$AE=AG$,$BE=DG$,

$\angle EAG=90°$.

故 $EF=BE+DF=FG$

$\Leftrightarrow\triangle AEF\cong\triangle AGF$

$\Leftrightarrow\angle EAF=\angle GAF$

$=\frac{1}{2}(360°-\angle EAG)=135°$.

题 1 如图 3,在正方形 $ABCD$ 中,E、F 分别是 CB、CD 延长线上的点,且 $EF=BE+DF$,EA、FA 的延长线分别与直线 BD 交于点 M、N. 试证:

$$MN^2=BM^2+DN^2.$$

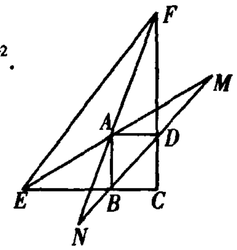

图 3

证明 由命题知 $\angle EAF=135°$. 则

$\angle MAN=135°$.

又在正方形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=90°$,则 $\angle NAB+\angle DAM=45°$.

由 $\angle N+\angle NAB=\angle ABD=45°$,得 $\angle N=\angle DAM$.

同理,$\angle NAB=\angle M$.

故 $\triangle ABN\backsim\triangle MDA\Rightarrow\frac{AB}{BN}=\frac{DM}{AD}$.

设 $AB=AD=1$,$BN=a$,$DM=b$. 则 $BD=\sqrt{2}$,$ab=1$.

故 $MN^2=(a+b+\sqrt{2})^2$

$=a^2+b^2+2\sqrt{2}(a+b)+4$.

而 $BM^2+DN^2=(b+\sqrt{2})^2+(a+\sqrt{2})^2$

$=a^2+b^2+2\sqrt{2}(a+b)+4$,

故 $MN^2=BM^2+DN^2$.

题 2 如图 4,在正方形 $ABCD$ 外作 $\angle EAF=135°$ 分别与 CB、CD 的延长线交于点 E、F,BA、DA 的延长线分别与 EF 交于点 M、N. 试证:

$$MN^2=MF^2+NE^2.$$

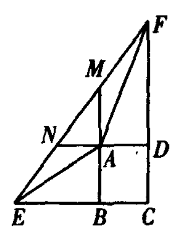

图 4

证明 由命题的证明,易知

收稿日期:2010-02-08

$\angle MFA=\angle AFD$.

又 $BM /\!/ CF$,则

$\angle MAF=\angle AFD=\angle MFA$.

于是,$MA=MF$.

同理,$NA=NE$.

又在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中,有

$MN^2=MA^2+NA^2$.

因此,$MN^2=MF^2+NE^2$.

题3 如图5,E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CB、CD 延长线上的点,且 $EF=BE+DF$,EA、FA 的延长线与直线 BD 交于点 M、N. 试证:$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle AMN}$.

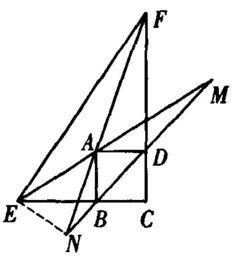

图5

证明 由命题知 $\angle EAF=135°$.

则 $\angle EAN=45°$.

又 $\angle EBN=\angle CBD=45°$,得

$\angle EAN=\angle EBN$.

于是,A、B、N、E 四点共圆.

联结 EN. 则 $\angle ENA=\angle ABE=90°$.

从而,$\triangle AEN$ 是等腰直角三角形.

所以,$AE=\sqrt{2}AN$.

同理,$AF=\sqrt{2}AM$.

于是,$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AMN}}=\dfrac{AE}{AN}\cdot\dfrac{AF}{AM}=2$,即

$S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle AMN}$.

题4 如图6,E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CB、CD 延长线上的点,且 $\angle EAF=135°$. 试证:

$$\frac{AE^2}{AF^2}=\frac{EF-FC}{EF-EC}.$$

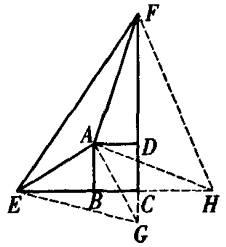

图6

证明 如图6,将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得 $\triangle ADG$. 则由命题的证明易知

$AE=AG$,$EF=FG$.

从而,$EF-FC=CG$.

同理,将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得 $\triangle ABH$. 则 $EF-EC=CH$.

联结 EG. 则易知 $\triangle AEG$ 是等腰直角三角形,且 $AF\perp EG$.

故 $EG=\sqrt{2}AE$,$\angle AFG+\angle CGE=90°$.

又 $\angle CEG+\angle CGE=90°$,则

$\angle AFG=\angle CEG$.

从而,$\mathrm{Rt}\triangle CGE\backsim\mathrm{Rt}\triangle DAF$.

所以,$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{GE}{CG}=\dfrac{\sqrt{2}AE}{CG}$. ①

联结 FH. 同理,

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{FH}{CH}=\dfrac{\sqrt{2}AF}{CH}$. ②

由式①、②并结合 $AD=AB$,整理得

$\dfrac{AE^2}{AF^2}=\dfrac{CG}{CH}$.

故 $\dfrac{AE^2}{AF^2}=\dfrac{EF-FC}{EF-EC}$.

赛题新解

利用等价形式证明一道 IMO 预选题

娄姗姗

（天津师范大学《中等数学》编辑部，300387）

中图分类号：O144 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)01－0013－01

题目 设 $k+l$ 元实数集

$$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k+l}\}$$

满足 $0\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,k+l,k、l\in\mathbf{Z}_+)$.

如果满足

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{x_i\in A}x_i-\frac{1}{l}\sum_{x_i\in S\setminus A}x_i\right|\leqslant\frac{k+l}{2kl},$$

则称 S 的一个 k 元子集 A 是"好的".

证明：好的子集数目至少有 $\frac{2}{k+l}\mathrm{C}_{k+l}^{k}$ 个.[1]

（第 49 届 IMO 预选题）

证明 设 $x_0=\frac{1}{k+l}\sum_{x_i\in S}x_i$,

$y_i=x_i-x_0(i=1,2,\cdots,k+l)$.

则 $\sum_{i=1}^{k+l}y_i=0$.

不妨设 $0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{k+l}\leqslant 1$. 则

$-x_0\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_{k+l}\leqslant 1-x_0$.

故 S 的 k 元子集 A 是好的

$$\Leftrightarrow\left|\frac{1}{k}\sum_{x_i\in A}x_i-\frac{1}{l}\sum_{x_i\in S\setminus A}x_i\right|\leqslant\frac{k+l}{2kl}$$

$$\Leftrightarrow\left|\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l}\right)\sum_{x_i\in A}x_i-\frac{1}{l}\sum_{x_i\in S}x_i\right|\leqslant\frac{k+l}{2kl}$$

$$\Leftrightarrow\left|\sum_{x_i\in A}x_i-kx_0\right|\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\sum_{x_i\in A}y_i\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以，S 的好的 k 元子集 A 与满足

$$\left|\sum_{i\in A'}y_i\right|\leqslant\frac{1}{2} \quad ①$$

的 $\{1,2,\cdots,k+l\}$ 的 k 元子集 A' 一一对应.

记 $f(A')=\sum_{i\in A'}y_i$.

将 $\{1,2,\cdots,k+l\}$ 的所有 k 元子集按下列规则分组：

k 元子集 $A、B$ 同组

$\Leftrightarrow$ 存在 $i\in\mathbf{N}_+$，使得 $A=\{t+i|t\in B\}$，

其中，子集元素是在模 $k+l$ 意义下的.

上述每一组至多有 $k+l$ 个子集，故至少有 $\frac{\mathrm{C}_{k+l}^{k}}{k+l}$ 组. 对任意一组，设为 $A_1,A_2,\cdots,A_{k+l}$（可能有相同的集合，但不会全相同），其中，

$A_{j+1}=\{t+1|t\in A_j\}$.

下面证明两个引理.

引理 1 对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,k+l\}$，有

$$0<|f(A_j)-f(A_{j+1})|<1. \quad ②$$

引理 1 的证明 设 $A_j=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，其中，$1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant k+l$.

则 $|f(A_j)-f(A_{j+1})|$

$$=\left|\sum_{i\in A_j}y_i-\sum_{i\in A_{j+1}}y_i\right|=\left|\sum_{s=1}^{k}(y_{t_s}-y_{t_s+1})\right|.$$

当 $t_k<k+l$ 时，

$$\left|\sum_{s=1}^{k}(y_{t_s}-y_{t_s+1})\right|=\sum_{s=1}^{k}(y_{t_s+1}-y_{t_s})$$

$$\in(0,y_{k+l}-y_1)\subseteq(0,1);$$

当 $t_k=k+l$ 时，

$$\left|\sum_{s=1}^{k}(y_{t_s}-y_{t_s+1})\right|=\sum_{s=1}^{k}(y_{t_s}-y_{t_{s-1}+1})$$

$$\in(0,y_{k+l}-y_1)\subseteq(0,1),$$

其中，$t_0=0$.

故式②成立.

引理 2 在 $A_1,A_2,\cdots,A_{k+l}$ 中存在两个不同的集合 $A_u、A_v$，满足

$$|f(A_u)|\leqslant\frac{1}{2},|f(A_v)|\leqslant\frac{1}{2}.$$

（下转封底）

收稿日期：2010－09－27

从最小数入手证明一道 IMO 预选题

李奋平

（山西大学附属中学，030006）

中图分类号：O156　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2011)01-0014-01

题目　设 n 是一个正整数. 证明：$C_{2^n-1}^0$，$C_{2^n-1}^1$，…，$C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ 模 2^n 与 $1,3,\cdots,2^n-1$ 的某一排列同余.[1]

（第 49 届 IMO 预选题）

证明　显然，当 $n=1,2,3$ 时，命题成立，且对任意的 $n(n\geqslant 2)$，$0\leqslant k\leqslant 2^{n-1}-1$，有

$$C_{2^n-1}^{2k}+C_{2^n-1}^{2k+1}=C_{2^n}^{2k+1}$$

$$=\frac{2^n}{2k+1}C_{2^n-1}^{2k}\equiv 0\pmod{2^n},\qquad ①$$

$$C_{2^n-1}^{2k}=\prod_{i=1}^{2k}\frac{2^n-i}{i}$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{2^n-(2i-1)}{2i-1}\cdot\prod_{i=1}^{k}\frac{2^{n-1}-i}{i}$$

$$\equiv(-1)^kC_{2^{n-1}-1}^{k}\pmod{2^n}.\qquad ②$$

由式①、②得

$$C_{2^n-1}^{2k+1}\equiv(-1)^{k+1}C_{2^{n-1}-1}^{k}\pmod{2^n}.\qquad ③$$

下面证明：不存在正整数 $n\ (n>2)$ 及整数 k、$l(0\leqslant k、l\leqslant 2^{n-1}-1,k\neq l)$ 满足

$$C_{2^n-1}^{k}\equiv C_{2^n-1}^{l}\pmod{2^n}.\qquad ④$$

否则，取满足式④的所有 (n,k,l) 中最小的 n.

设 $k=4k_0+\varepsilon_1$，$l=4l_0+\varepsilon_2$，其中，ε_1、$\varepsilon_2\in\{0,1,2,3\}$.

由对称性，只需考虑

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

$=(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),$
$(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3).$

将式②、③代入式④分情况讨论.

(1) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)$.

则 $k_0\neq l_0$.

前两项得 $C_{2^{n-1}-1}^{2k_0}\equiv C_{2^{n-1}-1}^{2l_0}\pmod{2^n}$，

后两项得 $C_{2^{n-1}-1}^{2k_0+1}\equiv C_{2^{n-1}-1}^{2l_0+1}\pmod{2^n}$.

(2) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(0,3),(1,2)$.

则 $C_{2^{n-1}-1}^{2k_0}\equiv C_{2^{n-1}-1}^{2l_0+1}\pmod{2^n}$.

(3) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(0,1),(2,3)$.

前一项得

$$C_{2^{n-1}-1}^{2k_0}\equiv -C_{2^{n-1}-1}^{2l_0}\pmod{2^n}$$

$$\overset{①}{\equiv}C_{2^{n-1}-1}^{2l_0+1}\pmod{2^{n-1}},$$

后一项得

$$C_{2^{n-1}-1}^{2k_0+1}\equiv -C_{2^{n-1}-1}^{2l_0+1}\pmod{2^n}$$

$$\overset{①}{\equiv}C_{2^{n-1}-1}^{2l_0}\pmod{2^{n-1}}.$$

故(1)～(3)都能推出当 $n-1$ 时式④有解，与 n 的最小性矛盾.

(4) $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(0,2),(1,3)$.

则 $C_{2^{n-1}-1}^{2k_0}\equiv -C_{2^{n-1}-1}^{2l_0+1}\pmod{2^n}$

$$\overset{①}{\equiv}C_{2^{n-1}-1}^{2l_0}\pmod{2^{n-1}}.$$

若 $k_0\neq l_0$，则当 $n-1$ 时式④有解，与 n 的最小性矛盾.

若 $k_0=l_0$，则两项均得到

$$C_{2^n-1}^{4k_0}\equiv C_{2^n-1}^{4k_0+2}\pmod{2^n}$$

$$\overset{①}{\Rightarrow}C_{2^n-1}^{4k_0+1}+C_{2^n-1}^{4k_0+2}\equiv 0\pmod{2^n}.\qquad ⑤$$

但 $C_{2^n-1}^{4k_0+1}+C_{2^n-1}^{4k_0+2}=C_{2^n}^{4k_0+2}=\frac{2^n}{4k_0+2}C_{2^n-1}^{4k_0+1}$

$$=\frac{2^{n-1}}{2k_0+1}\prod_{i=1}^{4k_0+1}\frac{2^n-i}{i}\equiv 2^{n-1}\pmod{2^n},$$

与式⑤矛盾.

综上，$C_{2^n-1}^0$，$C_{2^n-1}^1$，…，$C_{2^n-1}^{2^{n-1}-1}$ 模 2^n 两两不同余.

又由 $C_{2^1-1}^0=C_{2^1-1}^1=1$ 及式②、③，易知 $C_{2^n-1}^k(0\leqslant k\leqslant 2^n-1)$ 均为奇数.

故命题成立.

参考文献：

[1] 李建泉　译. 第 49 届 IMO 预选题（四）[J]. 中等数学，2009(11).

收稿日期：2010-07-18

一道 IMO 预选题的另证

李 赛
(天津市第一中学,300051)

中图分类号: O174 文献标识码: A 文章编号: 1005 - 6416(2011)01 - 0015 - 01

题目 对于整数 m,在 $\{1,2,3\}$ 中存在唯一的一个数 $t(m)$,使得 $m+t(m)$ 是 3 的倍数. 函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足 $f(-1)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$,且对于所有满足 $2^n>m$ 的非负整数 m、n,有

$$f(2^n+m)=f(2^n-t(m))-f(m).$$

证明:对于任意的非负整数 p,均有 $f(3p)\geqslant 0$. [1]

(第 49 届 IMO 预选题)

文[1]通过一个命题的铺垫给出了该题的一个证法. 本文将从该命题出发,从另一角度去证明结论.

证明 设 $n=\sum\limits_{i=0}^{s}2^{a_i}$,其中,$a_0>a_1>\cdots>a_s\geqslant 0$. 则

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{j=0}^{l}[(-1)^j f(2^{a_j}-t(n_{j+1}))]+(-1)^{l+1}f(n_{l+1})\\&=\sum_{j=0}^{l+1}(-1)^j f(n_j'),\end{aligned}\quad ①$$

其中,$n_j=\sum\limits_{i=j}^{s}2^{a_i}(j=1,2,\cdots,s)$,且当 $a_s=0$ 时,$l=s-1$;当 $a_s>0$ 时,$l=s$,$n_{l+1}=0$.

从而,所有的 $f(n)$ 均可由 $f(2^k-i)(i=1,2,3;k=1,2,\cdots)$ 决定.

显然,$t(2^{2k}-1)=t(2^{2k+1}-2)=3$,
$t(2^{2k}-2)=t(2^{2k+1}-3)=1$,
$t(2^{2k}-3)=t(2^{2k+1}-1)=2$.

由数学归纳法易证下面命题.

命题 对于任意的非负整数 k 有

$f(2^{2k+1}-3)=0$, $f(2^{2k+1}-2)=3^k$,
$f(2^{2k+1}-1)=-3^k$, $f(2^{2k+2}-3)=-3^k$,
$f(2^{2k+2}-2)=-3^k$,
$f(2^{2k+2}-1)=2\times 3^k$.

回到原题.

易知数对

$$(2^{a_j}-t(n_{j+1}),2^{a_{j+1}}-t(n_{j+2}))\neq(2^{2u+2}-1,2^{2v+1}-1)(u、v\in\mathbf{N}).$$

故当 $(a_j,a_{j+1})\equiv(0,1)$ 或 $(1,1)\pmod 2$ 时,

$$|f(2^{a_j}-t(n_{j+1}))-f(2^{a_{j+1}}-t(n_{j+2}))|\leqslant 2\times 3^{\left[\frac{a_j-1}{2}\right]},\quad ②$$

其中,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

对 $3\mid n$,有

$$n=2^{a_0}+n_1\equiv 2^{a_0}-t(n_1)\equiv 0\pmod 3.$$

下面利用命题及式①、②分情况讨论.

(1) 当 $a_0=2b+1$ 时,$a_1\leqslant 2b$. 则

$$f(n)\geqslant f(2^{a_0}-t(n_1))-\left|\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^j f(n_j')\right|.$$

将 $\{f(n_j')\mid j=1,2,\cdots,l+1\}$ 按 a_j 的奇偶性分组:在偶数 a_k 前分开,将 $\{a_j\}$ 分成若干段,每段内的奇数 a_j 除了第 1 个与前面的 a_k 同组,其余的奇数两两一组.

$$\begin{aligned}故 f(n)&\geqslant 3^b-\sum_{j=0}^{\left[\frac{a_1-1}{2}\right]}2\times 3^j-1\\&=3^b-3^{\left[\frac{a_1+1}{2}\right]}\geqslant 0.\end{aligned}$$

(2) 当 $a_0=2b+2$ 时,$a_1\leqslant 2b+1$, $a_2\leqslant 2b$.

类似(1)有

$$\begin{aligned}f(n)&\geqslant f(2^{a_0}-t(n_1))-f(2^{a_1}-t(n_2))-\left|\sum_{j=2}^{l+1}(-1)^j f(n_j')\right|\\&\geqslant 2\times 3^b-3^b-\sum_{j=0}^{\left[\frac{a_2-1}{2}\right]}2\times 3^j-1\\&=3^b-3^{\left[\frac{a_2+1}{2}\right]}\geqslant 0.\end{aligned}$$

综上,$f(3p)\geqslant 0(p\in\mathbf{N})$.

参考文献:

[1] 李建泉 译. 第 49 届 IMO 预选题(一)[J]. 中等数学,2009(8).

收稿日期:2010 - 05 - 18

· 专题写作

不 要 滥 用 反 证 法

单 墫

（南京师范大学数学系，210097）

中图分类号：O141.2　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)01－0016－02

反证法是一种重要的证明方法.在证题过程中，当直接证法难以奏效时，可采用间接证法.就像打仗一样，正面攻击不能奏效，迂回到侧后或许是一种好的策略.但是，并非任何问题都得用反证法，笔者建议能够直接证明的还是以直接证明为好.

例1　实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

证明：$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中至少有两个数的积小于或等于 $-\frac{1}{n}$.

很多同学选择反证法.

证明　假设结论不成立，即

$$x_ix_j>-\frac{1}{n}(1\leqslant i<j\leqslant n).$$

由已知得

$$\begin{aligned}0&=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\\&=\sum x_i^2+2\sum x_ix_j=1+2\sum x_ix_j.\end{aligned}$$

因此，$\sum x_ix_j=-\frac{1}{2}$. ①

另一方面，由反证法的假设有

$$\sum x_ix_j>-\frac{1}{n}\mathrm{C}_n^2=-\frac{n-1}{2}. \quad ②$$

式①、②矛盾.所以，结论成立.

事实上，式①、②并不矛盾，可见，证明是错的.

出现这种错误的同学不在少数.笔者在某地两个竞赛班试验.第一天下午是一个悲惨的下午，因为上黑板的三名同学全做错了.没想到第二天更为悲惨，自告奋勇上来的四名同学竟也没有一个做对.更为悲剧的是有几名同学坚持认为从式①与反证法的假设可以导出矛盾.其实这已经是一条死胡同了.式①与反证法的假设并不矛盾.要找矛盾还得回到已知的两个条件.

正确的证法是直接证明.

证明　不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，x_1 最大，x_n 最小.则

$$(x_1-x_i)(x_i-x_n)\geqslant0(i=1,2,\cdots,n). \quad ③$$

将式③的左边展开，对 i 求和得

$$x_1\sum x_i-\sum x_i^2-nx_1x_n+x_n\sum x_i\geqslant0,$$

即　$x_1x_n\leqslant-\frac{1}{n}$.

这道题的证法很多.下面再介绍一种.

另证　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，正数为 $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_s$，其余的为 $z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_t$，$s+t=n$.

$$\begin{aligned}\text{则 }1&=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_s^2+z_1^2+z_2^2+\cdots+z_t^2\\&\leqslant y_1(y_1+y_2+\cdots+y_s)+z_1(z_1+z_2+\cdots+z_t)\\&=-y_1(z_1+z_2+\cdots+z_t)-z_1(y_1+y_2+\cdots+y_s)\\&\leqslant-ty_1z_1-sz_1y_1=-ny_1z_1.\end{aligned}$$

因此，$y_1z_1\leqslant-\frac{1}{n}$.

这种证法可以改成反证法，但毫无必要.不过已知条件中的1及（要证明的）结论中的 $-\frac{1}{n}$，启示解题者应取 n 个 x_ix_j 的和，而不是 C_n^2 个.该证法正是这样做的.

例2　100个互不相同的实数写在一个

收稿日期：2010－11－03

圆周上.证明:一定可以找到四个相邻的数,两端的两个数的和大于中间两个数的和.

此题很多同学毫不犹豫地采用反证法.

证明 假设结论不成立.设圆周上 100 个实数依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$.则

$$a_i+a_{i+3}\leqslant a_{i+1}+a_{i+2},$$

其中,$i=1,2,\cdots,100$,约定 $a_{i+100}=a_i$,即

$$a_{i+3}-a_{i+2}\leqslant a_{i+1}-a_i. \quad ①$$

将式①对 i 求和,知式①全取等号,即

$$a_{2i}-a_{2i-1}=c(c\text{ 为常数}). \quad ②$$

同理,$a_{2i+1}-a_{2i}=d(d$ 为常数). ③

在式②、③中令 $i=1,2,\cdots,50$,然后相加得

$$0=50c+50d.$$

从而,$c=-d$,

$$a_3-a_2=d=-c=a_1-a_2.$$

这就导出 $a_3=a_1$,与已知矛盾.

证明是正确的.但很繁琐.

另证 设 a 为 100 个数中最小的.a 的左邻为 b,右邻为 c.不妨设 $b>c$.又设 c 的右邻为 d,则 $d>a$.因此,$b+d>c+a$.

看来一些同学误以为存在性的问题一定要用反证法,其实,存在性的证明用构造法或极端性原理(即取最大的或最小的元素)为好.证明"不存在"才用到反证法.一般说来,结论中有"不"或隐含"不"的问题才用反证法.大多数的问题还是应当用直接证法.

此题是俄罗斯的一道竞赛题.可能有一些同学知道标准答案.但这个标准答案并不高明.看别人的解答也要有判别好坏的能力,不要被别人牵着鼻子走.

例 3 整数数列 $\{a_n\}$ 中,

$$a_1=1,a_{n+1}=a_n+S(a_n)(n=1,2,\cdots),$$

$S(a)$ 是 a 的各位数字和.问:12 345 是不是这个数列的项?

此题可以用反证法.

证明 假设 12 345 是这个数列的项 a_{n+1}.

因为 $a_{n+1}=a_n+S(a_n)\equiv 2a_n(\bmod 3)$,而

$$12\,345\equiv 0(\bmod 3),$$

所以,$2a_n\equiv 0(\bmod 3)$,$a_n\equiv 0(\bmod 3)$.

同理,$a_{n-1}\equiv 0(\bmod 3)$,$\cdots\cdots$ $a_1\equiv 0(\bmod 3)$,这与 $a_1=1$ 矛盾.

这道题也可以直接证明(不用反证法).

另证 因

$$a_{n+1}=a_n+S(a_n)\equiv 2a_n(\bmod 3)\equiv -a_n(\bmod 3),$$

而 $a_1=1$,所以,

$$a_n\equiv(-1)^{n-1}(\bmod 3). \quad ①$$

因为 $12\,345\equiv 0(\bmod 3)$,所以,12 345 不是数列 $\{a_n\}$ 的项.

两种证法都能解决问题.不用反证法的证法稍好一点.因为反证法虽然解决了这个问题,却没有留下任何"正面的"结果.不用反证法的证明,得出一个结果(即式①).如果要求证明本题的数列 $\{a_n\}$ 中,相邻两项的和被 3 整除,那么,式①就发挥了作用.

例 4 已知正整数 m、n 和质数 p 满足:对任意正整数 k,都有

$$(pk-1,m)=(pk-1,n).$$

证明:存在某个整数 t,使得 $m=p^tn$.

本题的结论表明,对任意质数 $q\neq p$,q 在 m、n 中的次数都是相等的.mn 的质因数可能很多,而解题者对它们一无所知,因此,直接证明它们在 m、n 中的次数相等相当困难.这道题以用反证法为宜.

证明 设 q 为 mn 的质因数,$q\neq p$,且 $q^\alpha\parallel m$,$q^\beta\parallel n$,$\alpha\neq\beta$.不妨设 $\alpha>\beta$.

因为 $q\neq p$,所以,$(q,p)=1$,k 的同余方程

$$pk-1\equiv 0(\bmod q^\alpha)$$

有解.

对这个 k,$q^\alpha\parallel(pk-1,m)$,但

$$q^\beta\parallel(pk-1,n),\alpha\neq\beta,$$

与已知 $(pk-1,m)=(pk-1,n)$ 矛盾.

大致说,在结论涉及的对象很多(任意的,每一个等等)时,可以考虑采用反证法.如果结论的反面涉及很多对象,则不宜采用反证法.

总之,能够用直接证法解决的问题,应当采用直接证法.反证法不可滥用.

学生习作

浅谈递推计数法

孙 岳

(天津市实验中学高二(1)班,300074)

中图分类号:O141.3 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2011)01-0018-02

先来看一道小学数学竞赛题.

例1 同一平面上 n 条直线最多有几个交点?

解 当 $n=1$ 时,无交点;当 $n=2$ 时,最多有一个交点;当 n 不断变大时,每加一条直线,为保证交点最多,可令新加的直线与之前在平面上已有的所有直线均相交,此时,n 条直线最多有 $0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 个交点.

以上过程可用如下方法表示:令 a_n 表示 n 条直线交点个数的最大值,则有

$a_1=0, a_n=a_{n-1}+n-1$.

故 $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$.

这就是递推计数法的思想.对于某一事件的数目 a_n,可以找到它与 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$ 的递推关系,进而得到问题的解.

例2 将圆分成 $n(n\geqslant2)$ 个扇形,每个扇形用 r 种不同颜色之一染色,要求相邻扇形所染颜色不同.问:有多少种染色方法?

解法1[1] 设圆分成的扇形为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$,且一共有 a_n 种染色方法.则

$a_1=0, a_2=r(r-1)$.

当 $n\geqslant2$ 时,S_1 有 r 种染法,S_2 有 $r-1$ 种染法,……S_n 有 $r-1$ 种染法.共有 $r(r-1)^{n-1}$ 种方法,且可分为两类:

(1) S_n 与 S_1 颜色不同,有 a_n 种方法.

(2) S_n 与 S_1 颜色相同,有 a_{n-1} 种方法.

故 $r(r-1)^{n-1}=a_n+a_{n-1}(n\geqslant2)$.

于是,$a_n=(r-1)(-1)^n+(r-1)^n$.

解法2 按解法1设出 $S_1, S_2, \cdots, S_n, a_n$,$a_1=0, a_2=r(r-1)$.

收稿日期:2010-09-07

当 $n\geqslant3$ 时,若 S_{n-1} 与 S_1 颜色相同,则 S_n 有 $r-1$ 种染法,S_1 到 S_{n-2} 有 a_{n-2} 种染法.若 S_{n-1} 与 S_1 颜色不同,则 S_n 有 $r-2$ 种染法,S_1 到 S_{n-1} 有 a_{n-1} 种染法.

故 $a_n=(r-2)a_{n-1}+(r-1)a_{n-2}$.

于是,$a_n=(r-1)(-1)^n+(r-1)^n$.

【注】解法1实质是先将 S_n 与 S_1 断开,不考虑二者关系,而后再将 S_n 与 S_1 并上;解法2则是倒退一格,根据 S_1 与 S_{n-1} 的关系进行讨论.

下面用倒退的思路解2010年全国高中数学联赛加试第四题.

例3 一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值0和1两个数中的一个,同时,在每个顶点处染红、蓝两种颜色之一,使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同.问:该种密码锁共有多少种不同的密码设置?[2]

解 若 X 与 Y 有两元素相同,记为 $X=Y$;若 X 与 Y 有一元素相同,记为 $X\neq Y$;若 X 与 Y 两元素均不同,记为 $X\#Y$.

记 S_n 为所求结果,令 a_n、b_n、c_n 分别表示 $A_n=A_1$、$A_n\neq A_1$、$A_n\#A_1$ 时密码设置的方法数.

则 $S_n=a_n+b_n$. ①

易知,$(a_1,b_1,c_1)=(4,0,0)$,

$(a_2,b_2,c_2)=(4,8,4)$,

$(a_3,b_3,c_3)=(12,16,8)$.

当 $n\geqslant4$ 时,分三种情况讨论.

(1) $A_n=A_1$,将 A_n 与 A_1 等效为一点,则

$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$. ②

(2) $A_n\neq A_1$,考虑 A_{n-1}.

(i) $A_{n-1}=A_1$,则 A_1 到 A_{n-1} 有 a_{n-1} 种方法,A_n 有2种,故有 $2a_{n-1}$ 种方法.

(ii) $A_{n-1}\neq A_1$,则 $A_{n-1}=A_n$,将 A_{n-1} 与 A_n 等效为一点,有 b_{n-1} 种方法.

(iii) $A_{n-1} \# A_1$，考虑 A_{n-2}.

若 $A_{n-2}=A_1 \# A_{n-1}$，矛盾.

若 $A_{n-2}\neq A_1$，则 A_1 到 A_{n-2} 有 b_{n-2} 种方法，A_{n-1}、A_n 分别有1、2种方法，故有 $2b_{n-2}$ 种方法；

若 $A_{n-2} \# A_1$，则 $A_{n-2}=A_{n-1}$，将 A_{n-2}、A_{n-1} 等效为一点，有 $2C_{n-2}$ 种方法.

综上，$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}+2b_{n-2}+2c_{n-2}$. ③

(3) $A_n \# A_1$，类似(2)有

$c_n=b_{n-1}+c_{n-1}$. ④

综合式①～④解得

$S_n=3^n+(-1)^n+2$.

例4 设 n 为正整数，$f(n)$ 表示满足以下条件的 n 位数(称为波形数) $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 的个数.

(i) 每一位数码 $a_i\in\{1,2,3,4\}$，且 $a_i\neq a_{i+1}(i=1,2,\cdots)$；

(ii) 当 $n\geqslant3$ 时，a_i-a_{i+1} 与 $a_{i+1}-a_{i+2}$ $(i=1,2,\cdots)$ 的符号相反.

(1) 求 $f(10)$ 的值；

(2) 确定 $f(2\,008)$ 被13除得的余数.[3]

解 当 $n\geqslant2$ 时，记 $a_n>a_{n-1}$ 的波形数个数为 $g(n)$. 则由对称性有

$$g(n)=\frac{1}{2}f(n).$$

故 $a_{n-1}=1,a_n=2,3,4$；

$a_{n-1}=2,a_n=3,4$；

$a_{n-1}=3,a_n=4$.

用 $m(i)$ 表示末位为 i 的 $a_{n-2}>a_{n-1}$ 的 $n-1$ 位波形数个数. 则

$m(1)+m(2)+m(3)+m(4)=g(n-1)$，

$m(4)=0$.

当 $a_{n-1}=1$ 时，$a_{n-2}=2,3,4$. 则

$m(1)=g(n-2)$.

当 $a_{n-1}=3$ 时，$a_{n-2}=4,a_{n-3}=1,2,3$. 则

$m(3)=g(n-3)$.

故 $g(n)=3m(1)+2m(2)+m(3)$

$=2g(n-1)+g(n-2)-g(n-3)$.

易知，$g(2)=6,g(3)=14,g(4)=31$，……$g(10)=4\,004$.

故 $f(10)=2g(10)=8\,008$.

又注意到 $g(n)$ 被13除的余数列为：

6,1,5,5,1,2,0,1,0,1,1,3,6,1,5,5,…

最小正周期为12.

故 $g(2\,008)\equiv g(4)\equiv5\pmod{13}$.

因此，$f(2\,008)\equiv10\pmod{13}$.

参考文献：

[1] 叶 军. 数学奥林匹克教程[M]. 长沙：湖南师范大学出版社. 1998.7.

[2] 2010年全国高中数学联赛[J]. 中等数学，2010(12).

[3] 第五届中国东南地区数学奥林匹克[J]. 中等数学，2009(5).

编读往来

1. 浙江读者陈昆明指出，本刊2009年第8期第34页选择题第2题中“$\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\underbrace{bb\cdots b}_{n个}$”应为“$\underbrace{aa\cdots a}_{n个}\times\underbrace{bb\cdots b}_{n个}$”，答案为D.

2. 浙江读者应立君指出，本刊2009年第11期第38页第二试第一题中“$ab+bc+ca=0$”应为“$ab+bc+ca=1$”；第二题“切于 E、F、D”应为“切于 D、E、F”，“$\triangle ABC$ 是直角三角形”应为“$\angle ACB=90°$；第37页选择题第5题中“$\tan\frac{B}{2}=\frac{b}{b+c}$”应为“$\tan\frac{B}{2}=\frac{b}{a+c}$”，答案为B.

3. 湖北读者赵寿华指出，本刊2010年第4期第24页第5题中“$B\left(\frac{1}{4},y_2\right)$”应为“$B\left(-\frac{1}{4},y_2\right)$”；第26页结尾加“与题意不符，舍去. 综上，此题无解”.

4. 江苏读者张慧丰指出，本刊2010年第10期第18页“Mircea Lasca不等式的推广”一文中推广应加条件“$\alpha\leqslant\lambda$”.

5. 天津读者韩松奇指出，本刊2010年第4期第33页第9题中椭圆C应为“$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$”；第5期第40页第8题中“$+\sin x\cdot\sin y$”应为“$-\sin x\cdot\sin y$”.

6. 江西读者许杰奇指出，本刊2010年第5期数学奥林匹克问题高272的证明中第三个等号后应为“$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{\lambda}{a^4}+\frac{\lambda}{b^4}\right)+\left(\frac{\lambda^2}{a^6}+\frac{\lambda^2}{b^6}\right)+\cdots$”

感谢以上热心读者的指正.

本刊编辑部

竞赛之窗

2010 青少年数学国际城市邀请赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)01-0020-07

个 人 赛

一、填空题（每小题5分，共60分）

1. 已知实数 p、q、r 满足

$$p+q+r=26,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=31.$$

则 $\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}=$______.

2. 在某次慈善募款餐会上，每人吃了半盘米饭、三分之一盘蔬菜和四分之一盘肉. 此餐会总共提供了65盘食物. 则这次募款餐会共有______人参加.

3. 满足 $xyz=3^{2\,010}$ 与 $x\leqslant y\leqslant z<x+y$ 的三元正整数组 (x,y,z) 共有______个.

4. 如图1，已知 E 是长方形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，沿着 AE 折叠，顶点 B 刚好与边 CD 上的点 F 重合. 若 $AD=16$，$BE=10$，则 $AE=$______.

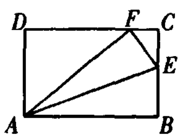

图1

5. 满足恰好有14个因子（包括1和它本身），且它的一个质因子的个位是3的最小四位数为______.

6. 设 $f(x)$ 表示关于 x 的一个四次多项式. 若

$$f(1)=f(2)=f(3)=0,f(4)=6,f(5)=72,$$

则 $f(2\,010)$ 之值的末位数字是______.

7. 如图2，一个圆和两个半圆两两相切，它们的半径都为1. 则正方形 $ABCD$ 的面积为______.

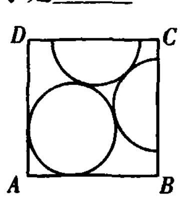

图2

8. 设 p、q 为质数，且满足 $p^3+q^3+1=p^2q^2$. 则 $p+q$ 的最大值为______.

9. 已知 n 个正整数（不一定全相异），它们的和为100，其中任何七个数的和小于15. 则 n 的最小值为______.

10. 已知点 P 在 $\triangle ABC$ 内，满足 $\angle ABP=20°$，$\angle PBC=10°$，$\angle ACP=20°$ 和 $\angle PCB=30°$. 则 $\angle CAP=$______.

11. 一农民养了100头猪和100只鸡. 他有四个相邻的正方形院子，形成了 2×2 的方格. 该农民想按以下要求把牲畜分配到各个院子里面去：第一行有120个头，第二行有300只脚；第一列有100个头，第二列有320只脚. 则一共有______种不同的分配方式.

12. 有五只笼子排成一排，从左到右的标签如表1所示.

表 1

红色狼	银色狮子	棕色狐狸	白色牛	灰色马

每只笼子里面各恰有一只动物，满足以下条件：

（1）这五只动物的确是一匹狼，一只狮子，一只狐狸，一头牛和一匹马，并且它们的颜色的确是红色、银色、棕色、白色和灰色；

（2）没有任何一张标签标示的颜色或动物与笼子内的动物符合；

（3）每只动物都不在与标签上所标示的颜色或种类相符的笼子内，也不在与其相邻的笼子内.

如果马不在中间的那只笼子里，则马的颜色是______.

二、计算题（每小题20分，共60分）

1. 线段 AB 把一个正方形分割成两个多边形（点 A 和 B 在正方形的边上），每个多边形都有内切圆，其中，一个内切圆的半径为

6, 而另外一个内切圆的半径大于 6. 问：正方形的边长与两倍的线段 AB 的长度之差为多少？

2. 在一个糖果店里卖的糖果有三种包装，分别是小包有 6 颗、中包有 9 颗和大包有 20 颗. 如果只按整包购买糖果，则不能购买到的糖果数最多是多少颗？

3. 有一数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2010}$. 对于 $1 \leqslant n \leqslant 2010$（$n$ 为正整数），令

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

若 $a_1 = 2010$ 且对所有的 n，都有 $S_n = n^2 a_n$，则 a_{2010} 是多少？

队际赛

1. (40 分) 求关于 w、x、y、z 的方程组的实数解：

$$\begin{cases} w+8x+3y+5z=20, & ① \\ 4w+7x+2y+3z=-20, & ② \\ 6w+3x+8y+7z=20, & ③ \\ 7w+2x+7y+3z=-20. & ④ \end{cases}$$

2. (40 分) 在凸四边形 $ABCD$ 中，AB 是最短的边，CD 是最长的边. 求证：

$\angle A > \angle C$，且 $\angle B > \angle D$.

3. (40 分) 设整数 m、n 满足 $m \geqslant n$ 与 $m^3 + n^3 + 1 = 4mn$. 求 $m - n$ 的最大值.

4. (40 分) 平面上的 64 个点组成一个 8×8 点阵. 同一行或同一列上相邻的两个点的距离都是 1. 问：以这 64 个点中的四个点为顶点且面积为 12 的长方形有多少个？

5. (40 分) 求出最大的正整数 n，使得存在唯一的正整数 k 满足 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$.

6. (40 分) 在一个 9×9 的方表格的每个小方格内填写一个数，每一行和每一列最多只能有四个不同的数. 则这个方表格中总共最多可以有多少个不同的数？

7. (40 分) 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD = 16°$，$\angle DBC = 48°$，$\angle BCA = 58°$，$\angle ACD = 30°$. 求 $\angle ADB$ 的度数.

8. (40 分) 求所有有序三元组 (x, y, z)，满足 x、y、$z \in \mathbf{Q}_+$，且 $x + \frac{1}{y}$、$y + \frac{1}{z}$、$z + \frac{1}{x}$ 都是整数.

9. (40 分) 把数 1 ~ 15 不重复地填入图 3 所示的圆中，每个圆内恰好填一个数，使得：

(1) 对于每个圆，将该圆中的数加上所有与它相切的圆中的数所得的和写出，如图 4 所示；

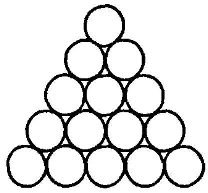

图 3

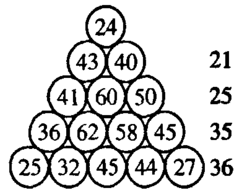

图 4

(2) 除了第一行，其他每一行的所有圆中的数之和写出，如图 4 右侧所示.

10. (40 分) 把 "KOREAIMC" 依图 5 所示方式写成八行，其中，第一行有一个 K、第二行有两个 O，依序下去，最后一行有八个 C.

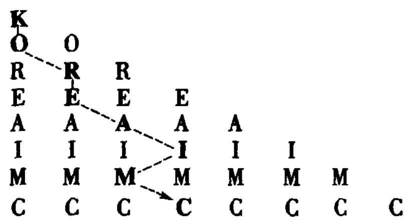

图 5

由最上端的 K 开始，从上往下逐行移动，试图拼出 "KOREAIMC" 的字样，每次移动只能移至该字母正下方的字母或与正下方的字母相邻的字母上. 图 5 用黑体表示的就是其中一种路径. 如果删除图 5 中的某个字母，使得所有剩下的不同路径只有 516 种，请指出被删除的字母的位置.

参考答案

个人赛

一、**1.** 803.

把题设的两个等式相乘得

$$\frac{p}{p}+\frac{p}{q}+\frac{p}{r}+\frac{q}{p}+\frac{q}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{r}{q}+\frac{r}{r}$$

$= 26 \times 31 = 806$.

故 $\frac{p}{q}+\frac{q}{r}+\frac{r}{p}+\frac{p}{r}+\frac{r}{q}+\frac{q}{p}=803$.

2. 60.

每个人吃了$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$盘食物，且

$65\div\frac{13}{12}=60$.

故此慈善餐会共有60人参加.

3. 336.

令 $x=3^a, y=3^b, z=3^c$. 则

$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c, a+b+c=2\ 010$.

若 $c\geqslant b+1$，则

$x+y=3^a+3^b<3^{b+1}\leqslant 3^c=z$,

与 $z<x+y$ 矛盾. 故 $c=b$.

于是，$a+2b=2\ 010$.

所以，$670\leqslant b\leqslant 1\ 005$.

因此，这样的三元正整数组的个数，即 b 的个数有 $1\ 005-670+1=336$.

4. $10\sqrt{5}$.

由题设得

$EF=BE=10, EC=AD-BE=6$.

由勾股定理得 $CF=\sqrt{EF^2-EC^2}=8$.

显然，$\mathrm{Rt}\triangle AFD\backsim\mathrm{Rt}\triangle FEC$.

则$\frac{DF}{DA}=\frac{EC}{CF}=\frac{3}{4}$. 所以，$DF=12$.

此时，$AB=CD=CF+DF=20$.

再次由勾股定理得

$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=10\sqrt{5}$.

5. 1 458.

设这个四位数为 n.

因为 $14=14\times 1=7\times 2$，所以，

$n=p^{13}$或p^6q（p、q 为不同的质数）.

若 $n=p^{13}$，由题设知 p 的个位数字是3，于是，$p\geqslant 3$.

从而，$n\geqslant 3^{13}=1\ 594\ 323$，矛盾.

所以，$n=p^6q$.

若 $p\geqslant 5$，则 n 的位数将超过4位，矛盾.

若 $p=3$，则 $p^6=729$，且当 $q=2$ 时，$n=p^6q=1\ 458$，满足条件.

若 $p=2$，则 $p^6=64$，此时，q 必须选自3，13，23，43，…这些个位数为3的质数.

用64乘以这些数得到的最小四位数是

$p^6q=64\times 23=1\ 472>1\ 458$.

所以，满足条件的最小四位数是1 458.

6. 2.

因为$f(1)=f(2)=f(3)=0$，所以，四次多项式可设为

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(ax+b)$.

由$f(4)=6, f(5)=72$，得

$\begin{cases}6(4a+b)=6,\\24(5a+b)=72\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\b=-7.\end{cases}$

则$f(2\ 010)$

$=(2\ 010-1)(2\ 010-2)(2\ 010-3)(2\ 010\times 2-7)$

$=2\ 009\times 2\ 008\times 2\ 007\times 4\ 013$.

故$f(2\ 010)$的末位数字是2.

7. $3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

如图6，设 P、Q、R 分别为圆和两个半圆的圆心. 这个图形关于正方形的对角线 AC 对称，且 $AP=\sqrt{2}$.

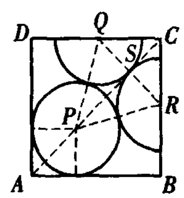

图6

易得 $PS=\sqrt{3}$,

$SC=SR=1$,

$AC=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

故 $S_{正方形ABCD}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

$=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

8. 5.

不妨设 $q\leqslant p$. 注意到

$p^3+q^3+1=p^2q^2$

$\Rightarrow q^3+1=p^2q^2-p^3$

$\Rightarrow(q+1)(q^2-q+1)=p^2(q^2-p)$.

因此，$p^2\mid(q+1)(q^2-q+1)$.

因为 $q\leqslant p$，所以，$0<q^2-q+1<p^2$.

由此可得 $p\mid(q+1)$.

又因为 $q\leqslant p$，所以，$q+1=p$.

由 p、q 均为质数知，只能是 $p=3$ 和 $q=2$.

从而，$p+q$ 的最大值为5.

9. 50.

设这 n 个数为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 则

$a_1+a_2+\cdots+a_{49}\leqslant 14\times 7=98$.

故 $n\geqslant 50$，且取这50个数均为2时，满足条件.

10. 20.

如图 7，以 BC 为边在点 A 的同侧作正$\triangle QBC$.

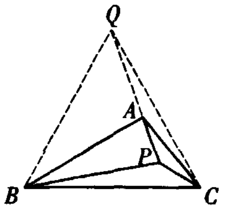

图 7

注意到 BA 是正$\triangle QBC$ 的角平分线，所以，$\angle AQC=\angle ACQ=10°$.

又 CP 也是正$\triangle QBC$ 的角平分线，故
$\angle PQC=\angle PBC=10°$.

因为点 A、P 在 QC 的同一侧，所以，点 A 在线段 PQ 上.

于是，$\angle CAP=\angle AQC+\angle ACQ=20°$.

11. 341.

如图 8，分别给四个院子标上字母 $A_i(i=1,2,3,4)$. 设 A_i 院中有猪 x_i 头、鸡 y_i 只.

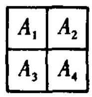

图 8

由题设得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=100,\\ y_1+y_2+y_3+y_4=100,\\ x_1+y_1+x_2+y_2=120,\\ 4(x_3+x_4)+2(y_3+y_4)=300,\\ x_1+y_1+x_3+y_3=100,\\ 4(x_2+x_4)+2(y_2+y_4)=320.\end{cases}$$

解得$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,30-x,40-x,30+x)$，
$(y_1,y_2,y_3,y_4)=(y,90-y,60-y,y-50)$，
其中，x 有 0 ~ 30 这 31 种取值，y 有 50 ~ 60 这 11 种取值.

所以，共有 $11\times31=341$ 种方式把牲畜按要求分配到各个院子里.

12. 白色.

考虑中间三只笼子的标签. 由(3)知狮子、狐狸、牛都不在中间的笼子里面. 又马也不在中间的笼子里面，故只能是狼在里面.

因为第一个标签是“红色·狼”，所以，狼不是红色. 又由(3)知它也不是银、棕、白三色. 从而，狼是灰色.

牛和马都不能在第 4 或第 5 只笼子里，于是，这两只笼子里面是狮子和狐狸.

注意到狐狸不能与第 3 只笼子相邻，所以，它在第 5 只笼子，狮子在第 4 只笼子.

因为第二个标签是“银色·狮子”，所以，狮子不是银色. 又由(3)知它也不是棕、白、灰三色. 从而，狮子是红色.

因为第三个标签是“棕色·狐狸”，所以，狐狸不是棕色. 又由(3)知它也不是灰、白二色. 因为已知狮子是红色，所以，狐狸是银色.

因为第四个标签是“白色·牛”，所以，牛不是白色，只能是棕色，并且在第一只笼子里面. 于是，第二只笼子只能是马，且马是白色.

二、**1.** 如果线段 AB 把正方形分割成两个三角形，则 AB 只能是正方形的对角线. 但此时两个内切圆的半径相等，与条件矛盾.

如果其中一个多边形是四边形，则 AB 与它的对边的长度之和大于另外两条边的长度之和，这与该四边形有内切圆矛盾.

故只可能是 AB 把正方形分割成一个三角形和一个五边形，且五边形的内切圆也是原来正方形的内切圆(如图 9).

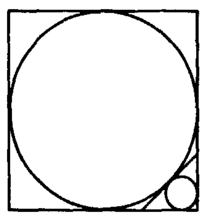
图 9

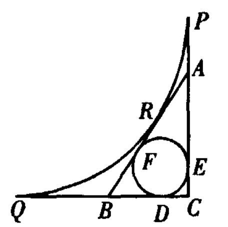

图 10

如图 10，设$\triangle ABC$ 的内切圆分别与 BC、CA、AB 切于点 D、E、F，正方形的内切圆也即$\triangle ABC$ 的旁切圆分别与 CA、BC、AB 切于点 P、Q、R. 则原来的正方形的边长为 $CP+CQ$.

故 $CP+CQ-2AB$

$$\begin{aligned}&=(AP+AE+6)+(BQ+BD+6)-\\&\quad(AF+BF+AR+BR)\\&=12+(AP-AR)+(BQ-BR)+\\&\quad(AE-AF)+(BD-BF)\\&=12.\end{aligned}$$

2. 把非负整数写成如下六行的数表：

0	6	12	18	24	30	36	42	48
1	7	13	19	25	31	37	43	**49**
2	8	14	**20**	26	32	38	44	50
3	**9**	15	21	27	33	39	45	51
4	10	16	22	28	34	**40**	46	52
5	11	17	23	**29**	35	41	47	53

每行的数从左往右逐个增加6.

若一行中的某个数能够得到(即能购买到这个颗数的糖果),则这一行中排在这个数后面的数都可以得到. 于是,只要是找出每行中第一个可以得到的数(可以表示成 $9k+20l(k、l\in\mathbf{N})$ 的形式),已在数表中用黑体标出.

显然,这六个数中最大的数是49.

于是,与它同一行并恰好在它前面的43是最大的不能得到的数.

3. 由已知得

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1},$$

即 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$.

此时,$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\cdots=\dfrac{2}{(n+1)n}a_1$.

故 $a_{2\,010}=\dfrac{2\times2\,010}{2\,011\times2\,010}=\dfrac{2}{2\,011}$.

队际赛

1. ①+④得 $8(w+z)+10(x+y)=0$.

②+③得 $10(w+z)+10(x+y)=0$.

从而,$w+z=0$ 和 $x+y=0$.

再将 $y=-x$ 和 $z=-w$,代入式①、②得

$5x-4w=20, w+5x=-20$.

消去 x 得 $-5w=40$,即 $w=-8$.

由此可得 $x=-\dfrac{12}{5}, y=\dfrac{12}{5}, z=8$.

2. 如图11,联结 AC、BD. 在 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 中,$BC>BA$, $CD>AD$,从而,

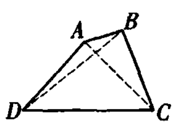

图11

$\angle BAC>\angle BCA$,

$\angle DAC>\angle DCA$.

故 $\angle A=\angle BAC+\angle DAC$

$>\angle BCA+\angle DCA=\angle C$.

同样,考虑 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BCD$,可证 $\angle B>\angle D$.

3. 令 $s=m+n, p=mn$. 则

$m^3+n^3=(m+n)^3-3m^2n-3mn^2$

$=s^3-3ps$.

由 $s^3-3ps+1=4p$,得 $p=\dfrac{s^3+1}{3s+4}$.

因 m、n 是整数,所以,$27p$ 也是整数,且

$$27p=9s^2-12s+16-\frac{37}{3s+4}.$$

故 $3s+4$ 必须整除37.

从而,$3s+4=\pm1$ 或 ±37.

若 $3s+4=-1$ 或 -37,则 s 不是整数;

若 $3s+4=37$,则 $s=11$ 和 $p=36$,但整数 m、n 不存在;

若 $3s+4=1$,则 $s=-1$ 和 $p=0$.

于是,$m=0, n=-1$.

故 $m-n$ 的最大值为1.

4. 联结同一行和同一列的点可构成一个网格.

首先,考虑边平行于网格线的长方形. 对于形状为 2×6 的长方形,它的方向有两种选择(水平和竖直),其中一组对边有 $8-6=2$ 种选择,另外一组对边有 $8-2=6$ 种选择. 所以,这样的长方形一共有 $2\times2\times6=24$ 个.

同理,形状为 3×4 的长方形,一共有 $2\times4\times5=40$ 个.

其次,考虑边平行于网格的对角线的长方形,其形状分别为 $\sqrt{2}\times6\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$.

这两种长方形也分别有两种方向可选择. 先考虑长方形的最长边从左下方伸到右上方的这个方向. 第一种形状的长方形只有1个(如图12);第二种形状的长方形有9个,其中一个已在图12中标出. 这9个长方形的左上角的顶点已在图12中用黑点标出. 所以,这两种形状的长方形一共有 $2\times(1+9)=20$ 个.

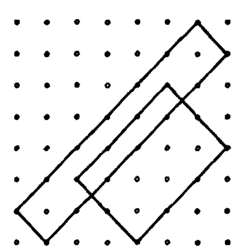

图12

因为 $12=2^2\times3$,而3不能表示为两个完全平方数的和,所以,再也没有其他形状的长方形.

因此,符合要求的长方形一共有

$24+40+20=84$(个).

5. 题设不等式可写成

$$1+\frac{7}{8}>1+\frac{k}{n}>1+\frac{6}{7},$$

或 $\frac{98}{112}>\frac{k}{n}>\frac{96}{112}$.

若 $n=112$,则 k 的唯一值是 97.

假设 $n>112$,则 $\frac{98n}{112n}>\frac{112k}{112n}>\frac{96n}{112n}$.

在 $96n$ 和 $98n$ 之间至少有两个数是 112 的倍数,此时,k 的值不是唯一的.

所以,n 的最大值为 112.

6. 假设这个方表格中有 29 个不同的数. 根据抽屉原理,必有某行有四个不同的数,不妨设是第一行. 剩下的 25 个数在 2 ~ 9 行. 同样根据抽屉原理,必有某行有四个,不妨设是第二行.

接下来观察方表格每一列的数,每列的最上面已经有两个不同的数,于是,第二行下面的每一列最多有两个不同的数. 这样,不同的数最多有 $8+9\times2=26$ 个,矛盾. 因此,不同数的个数小于 29.

图 13 构造了一个 9×9 的方表格含有 28 个不同的数,且每行、每列恰好有四个不同的数. 另外一种填法如图 14.

1	2	3	0	0	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0	0	0
7	8	9	0	0	0	0	0	0
0	0	0	10	11	12	0	0	0
0	0	0	13	14	15	0	0	0
0	0	0	16	17	18	0	0	0
0	0	0	0	0	0	19	20	21
0	0	0	0	0	0	22	23	24
0	0	0	0	0	0	25	26	27

图 13

1	10	19	28	28	28	28	28	28
28	2	11	20	28	28	28	28	28
28	28	3	12	21	28	28	28	28
28	28	28	4	13	22	28	28	28
28	28	28	28	5	14	23	28	28
28	28	28	28	28	6	15	24	28
28	28	28	28	28	28	7	16	25
26	28	28	28	28	28	28	8	17
18	27	28	28	28	28	28	28	9

图 14

7. 易知,$\angle BDC=44°$,$\angle BAC=58°$.

所以,$BA=BC$.

如图 15,令 E 为边 CD 上的一点,使得 $\angle EBC=4°$.

则 $BE=BC=BA$.

又 $\angle ABE=60°$,因此,$\triangle ABE$ 是等边三角形.

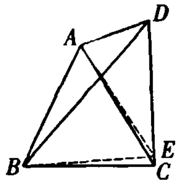

图 15

因为 $\angle DBE=44°$,所以,$ED=EB=EA$.

注意到 $\angle DEA=32°$,于是,

$\angle EAD=\angle EDA=74°$.

由此可得 $\angle ADB=30°$.

8. 注意到

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)$$
$$=xyz+\frac{1}{xyz}+x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}.$$

故 $h=xyz+\frac{1}{xyz}$ 是整数.

则 $xyz=\frac{h\pm\sqrt{h^2-4}}{2}$.

由差为 4 的两个完全平方数只能是 0 和 4,知 $h=2$,$xyz=1$.

若 x、y、z 中的两个为 1,则第三个必须也是 1. 故 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

若 x、y、z 中只有一个为 1,不妨设 $z=1$. 则 $y+1$ 和 $1+\frac{1}{x}$ 都是整数. 从而,

$$y=m,x=\frac{1}{n}(m、n\in\mathbf{N}_+).$$

又 $x+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\in\mathbf{N}_+\Rightarrow m=n=2$.

故 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},2,1\right)$ 及其轮换.

若 x、y、z 都不等于 1,不妨设 $x>1$ 和 $z<1$.

令 $z=\frac{p}{q}(p、q\in\mathbf{N}_+,(p,q)=1)$,

$$z+\frac{1}{x}=k\in\mathbf{N}_+.$$

则 $x=\frac{q}{kq-p}$.

若 $k\geqslant 2$，则 $kq-p\geqslant 2q-p>q$，这与 $x>1$ 矛盾. 所以，$k=1$，$x=\dfrac{q}{q-p}$.

从而，$y=\dfrac{1}{xz}=\dfrac{q-p}{q}\times\dfrac{q}{p}=\dfrac{q-p}{p}$.

由 $y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2q-p}{p}\in \mathbf{N}_+\Rightarrow p\mid 2q\Rightarrow p\leqslant 2$.

又由 $x+\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{2p}{q-p}\in \mathbf{N}_+\Rightarrow (q-p)\mid 2p$.

当 $p=1$ 时，$q-p=2$，从而，$q=3$；

当 $p=2$ 时，$q-p=1$，从而，$q=3$.

故 $(x,y,z)=\left(\dfrac{3}{2},2,\dfrac{1}{3}\right),\left(3,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right)$ 及其轮换.

9. 如图 16，用字母表示每个圆中的数.

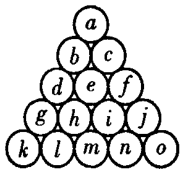

图 16

由 $a+b+c=24$，$b+c=21$，得 $a=3$.

由 $a+b+c=24$，
$a+b+c+d+e=43$，
$a+b+c+e+f=40$，
$d+e+f=25$，得
$e=10$，$d=9$，$f=6$.

由 $d+g+h+k+l=36$，
$f+i+j+n+o=45$，
$g+h+i+j=35$，
$k+l+m+n+o=36$，
得 $m=5$.

由 $b+c+d+e+f+h+i=60$，得 $h+i=14$.

因为 $d+e+g+h+i+l+m=62$，所以，$g+l=24$.

由 $k+g+l=25$，得 $k=1$.

同样，由 $e+f+h+i+j+m+n=58$，得 $j+n=23$. 所以，$o=4$.

由 $d+g+h+k+l=36$，得 $h=2$. 所以，$i=12$.

由 $h+i+l+m+n=45$，得 $l+n=26$.

注意到已经有 $i=12$，因此，
$\{l,n\}=\{11,15\}$.

若 $l=15$，则 $g=9=d$，矛盾.

因此，$l=11$，$n=15$，$g=13$，$j=8$.

最后，由 $c+e+f+i+j=50$，得 $c=14$.

所以，$b=7$.

10. 先列出如图 17 的数表，每格对应一个字母，方格内的数表示从字母"K"开始按要求读到该字母的不同路径的个数，其中，最上面的那个方格填 1，从第二行开始，每个方格中的数等于上一行中与其有公共顶点的方格中的数之和.

1							
1	1						
2	2	1					
4	5	3	1				
9	12	9	4	1			
21	30	25	14	5	1		
51	76	69	44	20	6	1	
127	196	189	133	70	27	7	1

图 17

再列出如图 18 的数表，每格同样对应一个字母，其中的数表示从该字母开始读到最后一行一共有几种不同的路径，填写这些数的方法与图 17 的数表类似.

750							
267	483						
96	171	216					
35	61	75	80				
13	22	26	27	27			
5	8	9	9	9	9		
2	3	3	3	3	3	3	
1	1	1	1	1	1	1	1

图 18

于是，对每个字母来说，图 17 的数表给出了从字母"K"到该字母的 m 种路径，而图 18 的数表给出了从该字母到最后一行的 n 种路径.

若取消该字母，则路径就将减少 mn 种.

若不删除字母，则总的不同路径为 750 种.

因为现在只剩下 516 种，所以，共减少了

$$750-516=234=2\times 3^2\times 13$$

种路径.

易发现，只有图 18 的数表的第五行中的 13 和 26 是 13 的倍数.

此时，$13\times 9=117$，$26\times 9=234$.

因此，被删除的字母是图 5 中第五行的第三个字母"A".

（熊　斌　提供）

2010 中国西部数学奥林匹克

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)01-0027-04

第一天

1. 设 m、k 为给定的非负整数，$p=2^{2^m}+1$ 为质数. 求证：

(1) $2^{2^{m+1}p^k}\equiv 1\pmod{p^{k+1}}$；

(2) 满足同余方程 $2^n\equiv 1\pmod{p^{k+1}}$ 的最小正整数 n 为 $2^{m+1}p^k$.　（新　平　供题）

2. 如图 1，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，C、D 是圆周上异于点 A、B 且在 AB 同侧的两点，分别过点 C、D 作圆的切线，它们交于点 E，线段 AD 与 BC 的交点为 F，直线 EF 与 AB 交于点 M. 求证：E、C、M、D 四点共圆.　（刘诗雄　供题）

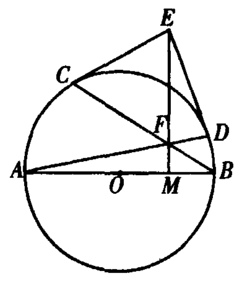

图 1

3. 求所有的正整数 n，使得集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有 n 个两两不同的三元子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，满足对任意的 $k(1\leqslant i<j\leqslant n)$，都有

$|A_i\cap A_j|\neq 1$.　（冯志刚　供题）

4. 设非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足以下条件：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$.

求证：对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，都有

$\max\{a_k,b_k\}\leqslant\dfrac{10}{10+k^2}$.（李胜宏　供题）

第二天

5. 设 k 为大于 1 的整数，数列 $\{a_n\}$ 定义如下：

$a_0=0, a_1=1$,

$a_{n+1}=ka_n+a_{n-1}(n=1,2,\cdots)$.

求所有满足如下条件的 k：存在非负整数 l、$m(l\neq m)$，及正整数 p、q，使得

$a_l+ka_p=a_m+ka_q$.　（熊　斌　供题）

6. 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 B 为圆心、BC 为半径作圆，点 D 在边 AC 上，直线 DE 切 $\odot B$ 于点 E，过点 C 垂直于 AB 的直线与直线 BE 交于点 F，AF 与 DE 交于点 G，作 $AH/\!/BG$ 与 DE 交于点 H. 求证：$GE=GH$.

（边红平　供题）

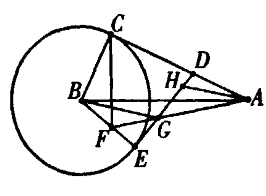

图 2

7. 有 $n(n\geqslant 3)$ 名选手参加乒乓球比赛，每两名选手之间恰比赛一场且没有平局. 若选手 A 的手下败将不都是 B 的手下败将，则称 A 不亚于 B. 试求所有可能的 n，使得存在一种比赛结果，其中每一名选手都不亚于其他任何一名选手.　（李秋生　供题）

8. 求所有的整数 k，使得存在正整数 a 和 b，满足

$\dfrac{b+1}{a}+\dfrac{a+1}{b}=k$.　（陈永高　供题）

参考答案

第一天

1. (1)用数学归纳法证明:对任意非负整数k,有

$$2^{2^{m+1}p^k}=p^{k+1}t_k+1(p\nmid t_k).\quad ①$$

当$k=0$时,由$2^{2^m}=p-1$,得

$$2^{2^{m+1}}=(p-1)^2=p(p-2)+1,$$

取$t_0=p-2$即可.

假设已有$2^{2^{m+1}p^k}=p^{k+1}t_k+1(p\nmid t_k)$,则

$$2^{2^{m+1}p^{k+1}}=(p^{k+1}t_k+1)^p=\sum_{s=0}^{p}\mathrm{C}_p^s(p^{k+1}t_k)^s$$

$$=1+p\cdot p^{k+1}t_k+\sum_{s=2}^{p}\mathrm{C}_p^s(p^{k+1}t_k)^s.$$

所以,$2^{2^{m+1}p^{k+1}}=p^{k+2}t_{k+1}+1(p\nmid t_{k+1})$.

综上,对任意非负整数k,有

$$2^{2^{m+1}p^k}=p^{k+1}t_k+1(p\nmid t_k).$$

(2)设$2^{m+1}p^k=nl+r(0\leqslant r<n)$.则

$$1\equiv 2^{2^{m+1}p^k}\equiv 2^{nl+r}\equiv 2^r(2^n)^l$$

$$\equiv 2^r(\mathrm{mod}\ p^{k+1}).$$

由$0\leqslant r<n$,及n的最小性,知$r=0$,即$n\mid 2^{m+1}p^k$.

设$n=2^tp^s$.若$t\leqslant m$,则

$$2^{2^mp^k}=(2^{2^tp^k})^{2^{m-t}}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p).$$

而同时又有

$$2^{2^mp^k}=(2^{2^m})^{p^k}\equiv(-1)^{p^k}\equiv -1(\mathrm{mod}\ p),$$

矛盾.

所以,$t=m+1$.

由(1)结论知

$$p^{s+1}t_s+1=2^n\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^{k+1})(p\nmid t_s).$$

所以,$s\geqslant k$.

从而,$n=2^{m+1}p^k$.

2. 联结EO、CO、DO、CA.

由$\angle COE=\angle CAF$,知

$\mathrm{Rt}\triangle COE\backsim\mathrm{Rt}\triangle CAF$.

所以,$\dfrac{CE}{CF}=\dfrac{CO}{CA}$.

又$\angle ECF=90^\circ-\angle BCO=\angle OCA$,则

$\triangle ECF\backsim\triangle OCA$.

故$\angle CAO=\angle CFE=\angle BFM$.

于是,$\angle FMB=\angle ACB=90^\circ$.

因此,O、M、D、E、C五点共圆.

3. (1)当$n=4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,构造$A_1,A_2,\cdots,A_{4k}$如下:

对任意$1\leqslant i\leqslant k,0\leqslant j\leqslant 3$,

$$A_{4i-j}=\{4i-3,4i-2,4i-1,4i\}\setminus\{4i-j\}.$$

(2)当$n\neq 4k(k\in\mathbf{N}_+)$时,假设集合$\{1,2,\cdots,n\}$有$n$个两两不同的三元子集$A_1,A_2,\cdots,A_n$,满足题目条件.

对于$A_1=\{a,b,c\}$,考虑所有与A_1交集非空的子集,不妨设为$A_2,A_3,\cdots,A_m$,并记

$$U=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m.$$

若$|U|=3$,则$m=1<|U|$;

若$|U|=4$,则$m\leqslant\mathrm{C}_4^3=4=|U|$;

若$|U|\geqslant 5$,下面证明:必有$m<|U|$.

假设$m\geqslant|U|$.则对任意$2\leqslant i$、$j\leqslant m$,有

$|A_1\cap A_i|=2,|A_1\cap A_j|=2$.

结合$|A_1|=3$,知$A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

又由题意知$|A_i\cap A_j|\neq 1$.

所以,$|A_i\cap A_j|=2$.

这表明,$A_1,A_2,\cdots,A_m$中任何两个集合都恰有两个公共元素.

考虑$A_1\cap A_2,A_1\cap A_3,A_1\cap A_4,A_1\cap A_5$.

由抽屉原理,其中必有两个交集相等,不妨设

$$A_2=\{a,b,d\},A_3=\{a,b,e\}.$$

则对任意$4\leqslant i\leqslant m$,有a、$b\in A_i$(否则,A_i包含a、b中的一个与c、d、e,与已知条件矛盾).

所以,$|U|=m+2>m$.

根据上述分析,可将$A_1,A_2,\cdots,A_n$分成若干组,同一组中的集合两两交集非空,不同组中的集合两两交集为空集.在每一组中,集合的数量不大于占用元素的数量.而由于集合的总数等于$\{1,2,\cdots,n\}$中的元素个数,所以,每一组都恰有4个集合,但这与n不是4的倍数矛盾.

综上,所求的正整数n为所有4的倍数.

4. 对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,有

$$(ka_k)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} ib_i\right)^2$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} i^2b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\leqslant(10-k^2a_k)(1-a_k)$$

$$=10-(10+k^2)a_k+k^2a_k^2.$$

从而,$a_k\leqslant\dfrac{10}{10+k^2}$.

同理,$b_k\leqslant\dfrac{10}{10+k^2}$.

所以,$\max\{a_k,b_k\}\leqslant\dfrac{10}{10+k^2}$.

第 二 天

5. 当 $k=2$ 时,$a_0=0,a_1=1,a_2=2$,则由 $a_0+2a_2=a_2+2a_1=4$,知取 $l=0,m=2,p=2,q=1$ 即可.

对 $k\geqslant3$,由递推式知,$\{a_n\}$ 为严格递增的自然数数列且 $k\mid(a_{n+1}-a_{n-1})$.

则 $a_{2n}\equiv a_0=0\pmod k$,

$a_{2n+1}\equiv a_1=1\pmod k\ (n=0,1,\cdots)$. ①

若存在 $l,m\in\mathbf{N},p,q\in\mathbf{N}_+,l\neq m$,满足 $a_l+ka_p=a_m+ka_q$,不妨设 $l<m$.

下面分情况讨论:

(1) $p<l<m$. 此时,

$$a_1+ka_p\leqslant a_l+ka_{l-1}<ka_1+a_{l-1}$$
$$=a_{l+1}\leqslant a_m<a_m+ka_q,$$

矛盾.

(2) $l=p<m$. 此时,若 $l=p=m-1$,则

$$a_m+ka_q=a_l+ka_p=(k+1)a_{m-1}$$
$$\Rightarrow a_m\equiv a_{m-1}\pmod k.$$

由式①知,这是不可能的.

若 $l=p<m-1$,则

$$a_l+ka_p<a_{m-2}+ka_{m-1}=a_m<a_m+ka_q,$$

矛盾.

(3) $l<p<m$. 此时,注意到 $q\in\mathbf{N}_+$,因而,$a_q>0$,由

$$a_l+ka_p\leqslant ka_p+a_{p-1}=a_{p+1}$$
$$\leqslant a_m<a_m+ka_q,$$

矛盾.

(4) $l<m\leqslant p$. 此时,

$$a_p>\frac{a_l+ka_p-a_m}{k}=a_q.$$

由 $ka_q+a_m=ka_p+a_l\geqslant ka_p$, ①

知 $a_q\geqslant a_p-\dfrac{a_m}{k}\geqslant a_p-\dfrac{a_p}{k}=\dfrac{k-1}{k}a_p$. ②

注意到 $a_p\geqslant ka_{p-1}$. 于是, ③

$$a_p>a_q\geqslant\frac{k-1}{k}a_p\geqslant(k-1)a_{p-1}\geqslant a_{p-1}. \quad ④$$

由式④知 $a_q=a_{p-1}$.

所以,式①、②、③的等号都必须成立.

由式②、③分别得

$m=p,p=2$.

所以,$a_q=a_{p-1}=a_1=1$.

又由式①知 $l=0$.

因此,由 $a_l+ka_p=a_m+ka_q$,得 $k^2=k+k$,即 $k=2$,矛盾.

所以,$k\geqslant3$ 不满足题设.

故 k 只能取 2.

6. **证法 1**　如图 3,设 AB 分别与 DE、CF 交于点 K、M. 联结 FK、AE、ME.

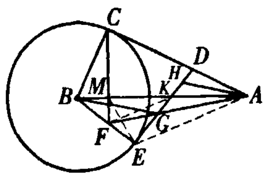

图 3

在 $\triangle ABC$ 中,由射影定理得

$BM\cdot BA$
$=BC^2=BE^2$.

所以,$\triangle BEM\backsim\triangle BAE$.

故 $\angle BEM=\angle BAE$.

又 M、F、E、K 四点共圆,故

$\angle BAE=\angle BEM=\angle FKM$.

所以,$FK/\!/AE$.

于是,$\dfrac{BF}{FE}=\dfrac{BK}{KA}$. ①

由直线 FGA 截 $\triangle EBK$ 知

$$\frac{EG}{GK}\cdot\frac{KA}{AB}\cdot\frac{BF}{FE}=1. \quad ②$$

又 $BG/\!/AH$,则 $\dfrac{BK}{AK}=\dfrac{GK}{KH}$.

所以，$\frac{BK}{AB}=\frac{GK}{HG}$. ③

由式①、②、③得 $EG=HG$.

证法2 如图3，同证法1得

$\frac{BK}{AB}=\frac{GK}{HG}$, ①

$BE^2=BM\cdot BA$. ②

又 M、F、E、K 四点共圆，故

$BE\cdot BF=BM\cdot BK$. ③

②÷③得 $\frac{BE}{BF}=\frac{BA}{BK}$.

所以，$KF/\!/EA$.

故 $\frac{KG}{GE}=\frac{FK}{AE}=\frac{BK}{BA}$. ④

由式①、④得 $GE=GH$.

7. (1) 当 $n=3$ 时，可构造如图4所示的比赛结果，易见，此时符合要求.

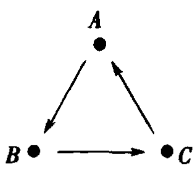

图4

(2) 当 $n=4$ 时，假设存在一种比赛结果，使得每一名选手不亚于其他任何一名选手，则显然不可能有某名选手战胜了其他所有选手（其他选手无法不亚于他），也不可能有某名选手输给了其他所有选手（他无法不亚于其他选手）.

若每名选手都战胜了1或2人，不妨设选手 A 战胜了 B 和 D，输给了 C，则 B、D 都战胜了 C（否则就无法不亚于 A）. 于是，在选手 B 和 D 之间比赛的负者（只战胜了 C）就一定无法不亚于胜者（战胜了 C 和对方）.

所以，当 $n=4$ 时，不存在满足要求的比赛结果.

(3) 当 $n=6$ 时，可构造比赛结果，如图5.

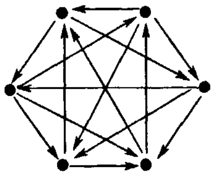

图5

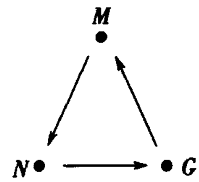

图6

(4) 若存在一种 n 名选手的比赛结果，其中每一名选手不亚于其他任何一名选手，记比赛结果可用图 G 来表示，则增加两名选手 M 和 N，构造比赛结果如图6.

首先，M 不亚于 N，N 也不亚于 M.

其次，对于 G 中的任意一名选手 P，由于 P 的手下败将有 M 而没有 N，M 的手下败将有 N 而没有 M，所以，P 不亚于 M，M 也不亚于 P；由于 P 的手下败将有 M 而没有 P，N 的手下败将有 P 而没有 M，因此，P 不亚于 N，N 也不亚于 P.

所以，这个比赛结果符合要求.

综上，满足题目要求的 n 的集合是

$\{n\in\mathbf{N}\mid n\geqslant3, n\neq4\}$.

8. 对于固定的 k，在满足题设等式的 (a,b) 中，取一组 (a,b) 使得 b 最小，则

$x^2+(1-kb)x+b^2+b=0$

的一根为 $x=a$.

设另一根为 $x=a'$. 则由 $a+a'=kb-1$，知 $a'\in\mathbf{Z}$，且 $aa'=b(b+1)$.

因此，$a'>0$.

又 $\frac{b+1}{a'}+\frac{a'+1}{b}=k$，由 b 的假定知

$a\geqslant b, a'\geqslant b$.

故 a、a' 中必有一个为 b，不妨设 $a=b$.

于是，$k=2+\frac{2}{b}$.

所以，$b=1,2$.

从而，$k=3,4$.

（熊 斌 提供）

2010 年北京市中学生数学竞赛初赛(高一)

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2011)01-0031-03

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位,所得到的图像对应的函数为奇函数. 则 φ 的最小值是(　　).

(A)$\frac{\pi}{3}$　(B)$\frac{\pi}{4}$　(C)$\frac{\pi}{6}$　(D)$\frac{\pi}{8}$

2. 已知 $P(a,b)$ 是第一象限内的矩形 $ABCD$(含边界)中的一个动点,A、B、C、D 的坐标如图 1 所示. 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是(　　).

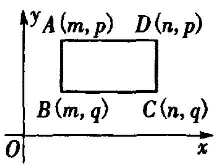

图 1

(A)$\frac{q}{m},\frac{p}{n}$　　(B)$\frac{p}{m},\frac{q}{n}$

(C)$\frac{q}{m},\frac{q}{n}$　　(D)$\frac{p}{m},\frac{p}{n}$

3. 已知 P 是△ABC 所在平面上一点,满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$. 若 $S_{\triangle ABC}=6$,则 $S_{\triangle PAB}=$(　　).

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1

4. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$,且其图像过点 $(2,0)$,则 $\frac{f(-1)}{f(1)}$ 的值是(　　).

(A)-3　(B)-2　(C)2　(D)3

5. 在△ABC 中,中线 AD 与 BE 垂直交于点 G. 则 $\sin C$ 的最大值是(　　).

(A)$\frac{2}{5}$　(B)$\frac{3}{5}$　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{4}{5}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且满足 $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=4x$. 则 $f(2)f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值等于(　　).

(A)31.5　　(B)30.5

(C)-30.5　　(D)-31.5

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域为 D,值域为 $\{-1,0,1,3\}$. 试确定这样的集合 D 最多有多少个.

2. 求 $\frac{\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\log_2\frac{4}{5}+\log_2\frac{5}{6}+\log_2\frac{6}{7}+\log_2\frac{7}{8}}{\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7}$ 的值.

3. 如图 2,在长方形 $ABCD$ 中,E 为边 AB 上一点,$AB=14$,$CE=13$,$DE=15$,$CF\perp DE$ 于点 F,联结 AF、BF. 求△ABF 的面积.

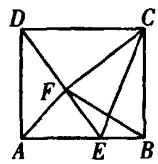

图 2

4. 在同一个直角坐标系中,已知直线 $y=kx$ 与函数

$$y=\begin{cases}2x+4, & x<-3;\\ -2, & -3\leqslant x\leqslant 3;\\ 2x-8, & x>3\end{cases}$$

的图像恰有三个不同的交点. 试确定 k 的取值范围.

5. 已知 P 是△ABC 内一点,且满足

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

试确定△PAB、△PBC、△PCA 的面积之比.

6. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$\angle BAD+\angle ADC=240°$,$E$、$F$ 分别是边 AD、BC 的中点,$EF=\sqrt{7}$. 若以 AB、CD 为边分别画两个正方形 A_1、A_2,再画一个长度、宽度分别为 AB、CD 的长方形 A_3. 求所画的三个图形 A_1、A_2、A_3 的面积之和.

7. 求 $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$

的值.

8. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=100°$,$\angle ACB=65°$,分别在边AB、AC上取点M、N,使得$\angle MCB=55°$,$\angle NBC=80°$.试确定$\angle NMC$的度数.

参考答案

一、**1.** C.

由题意知,题给函数的最小正根为$\frac{\pi}{6}$,而奇函数的必要条件是在原点的函数值为0,于是,φ的最小值是$\frac{\pi}{6}$.

2. B.

因为$k_{OP}=\frac{b}{a}$,且$k_{OC}\leqslant k_{OP}\leqslant k_{OA}$,所以,$\frac{b}{a}$的最大值为$\frac{p}{m}$,最小值为$\frac{q}{n}$.

3. C.

由$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$,得$3\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}$.

故$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=2$.

4. A.

由题意知曲线过点(0,0),故$c=f(0)=0$.

于是,$f(x)=ax^2+bx$.

又图形的对称轴为$x=\frac{-b}{2a}=1$,即$b=-2a$,则$\frac{f(-1)}{f(1)}=\frac{a-b}{a+b}=-3$.

5. B.

如图3,在$\triangle ABC$中,设$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$GD=x$,$GE=y$.则

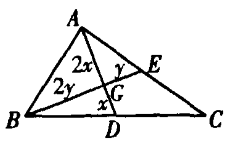

图3

$GA=2x$,

$GB=2y$.

在Rt$\triangle AGB$、Rt$\triangle AGE$和Rt$\triangle BGD$中,分别应用勾股定理得

$$4x^2+4y^2=c^2,4x^2+y^2=\frac{b^2}{4},x^2+4y^2=\frac{a^2}{4}.$$

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}.$$

又$\angle C$是锐角,则

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\leqslant\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

6. D.

把$x=-2$,$x=\frac{1}{2}$分别代入题设等式得

$$\begin{cases}f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f(2)=-8,\\f(2)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=9,\\f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}.\end{cases}$$

故$f(2)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-31.5$.

二、**1.** 27.

因为$f(0)=-1$,$f(\pm1)=0$,

$f(\pm\sqrt{2})=1$,$f(\pm2)=3$,

所以,$0\in D$;$\{-1,1\}$,$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$,$\{-2,2\}$各组中都至少一个属于D.

于是,这样的D共有$3\times3\times3=27$个.

2. -6.

$$原式=\frac{\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\right)}{\frac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 8}}$$

$$=\frac{\log_2\frac{2}{8}}{\frac{\lg 2}{\lg 8}}=\frac{\log_2 2^{-2}}{\frac{\lg 2}{3\lg 2}}=\frac{-2}{\frac{1}{3}}=-6.$$

3. 36.96.

设$BE=x$.则$AE=14-x$.

在Rt$\triangle ADE$和Rt$\triangle BCE$中分别应用勾股定理得

$$DE^2-AE^2=AD^2=BC^2=CE^2-BE^2,$$

即 $15^2-(14-x)^2=13^2-x^2$.

解得$x=5$.

则$AD=BC=13^2-x^2=12$.

所以,$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=84$.

又Rt$\triangle CDF\backsim$Rt$\triangle DEA$,则

$$\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle DEA}}=\frac{CD^2}{DE^2}.$$

因此，$S_{\triangle CDF}=\frac{14^2}{15^2}S_{\triangle DEA}=47.04$.

由 $S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=84$，则

$S_{\triangle ABF}=84-S_{\triangle CDF}=36.96$.

4. $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

在坐标系中画出函数草图，即图 4 中的粗黑折线.

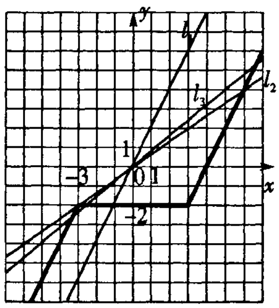

图 4

直线 l_1：$y=2x$ 与该折线只有一个公共点；

直线 l_2：$y=\frac{2}{3}x$ 与该折线只有两个公共点.

对于过原点的直线，当由 l_2 逆时针旋转到 l_1 时，即当且仅当斜率 k 满足 $\frac{2}{3}<k<2$ 时，直线 l_3：$y=kx$ 与该折线恰有三个交点.

5. 6∶2∶3.

如图 5，取点 A_1、B_1、C_1，使

$\overrightarrow{PA_1}=2\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB_1}=3\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC_1}=6\overrightarrow{PC}$.

则 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}=\overrightarrow{0}$.

于是，P 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心.

故 $S_{\triangle PA_1B_1}=S_{\triangle PB_1C_1}=S_{\triangle PC_1A_1}$，

$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}$

$=\frac{1}{2\times3}:\frac{1}{3\times6}:\frac{1}{6\times2}=6:2:3$.

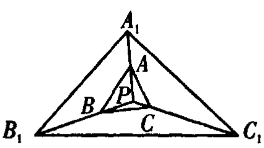

图 5

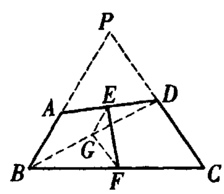

图 6

6. 28.

如图 6，延长 BA 与 CD 交于点 P.

由 $\angle BAD+\angle ADC=240°$，得

$\angle BPC=60°$.

联结 BD，取 BD 的中点 G，联结 EG、FG. 则由三角形中位线定理知

$EG\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}AB$，$FG\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{2}CD$，$\angle EGF=120°$.

在 $\triangle EGF$ 中，由余弦定理得

$$7=EF^2=EG^2+FG^2+EG\cdot FG$$

$$=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)\left(\frac{CD}{2}\right),$$

即　$AB^2+CD^2+AB\times CD=28$.

所以，三个图形 A_1、A_2 和 A_3 的面积之和为 28.

7. $\frac{3}{2}$.

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$$

$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$=1+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

8. 25°.

易知 $\angle BAC=15°$.

如图 7，作 $\triangle MCB$ 的外接圆与 BN 的延长线交于点 M_1. 则在这个圆中弧 $\overset{\frown}{CM_1}$ 与 $\overset{\frown}{CM}$ 所对的圆周角互补. 所以，$CM_1=CM$.

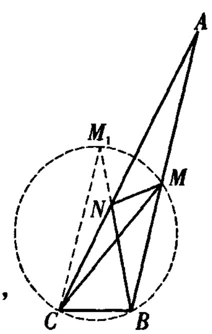

图 7

又 $\angle M_1CM$

$=\angle M_1BM$

$=100°-80°=20°$，

$\angle ACM$

$=65°-55°=10°$，

则 $\angle M_1CN=10°$.

又 $CN=CN$，则 $\triangle M_1CN\cong\triangle MCN$.

故 $\angle NMC=\angle NM_1C=\angle CMB$

$=\angle BAC+\angle ACM=15°+10°=25°$.

（李延林　提供）

2010年全国高中数学联赛天津赛区预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)01-0034-03

一、填空题(每小题7分,共56分)

1. 设实数 a、b、c 满足

$a^2-bc-2a+10=0$,

$b^2+bc+c^2-12a-15=0$.

则 a 的取值范围是______.

2. 满足 $a^2+ab+b^2=2\ 010$ 的正整数解 (a,b) 构成的集合为______.

3. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_{2\,010}$ 均为正实数.则

$$x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}+\cdots+\frac{x_{2\,010}}{x_1x_2\cdots x_{2\,009}}+\frac{4}{x_1x_2\cdots x_{2\,010}}$$

的最小值为______.

4. 已知非等腰锐角△ABC 的外心、内心和垂心分别为 O、I、H,$\angle A=60°$. 若△ABC 的三条高线分别为 AD、BE、CF,则△OIH 的外接圆半径与△DEF 的外接圆半径之比为______.

5. 在一个房间中,地面是边长为 6 m 的正方形,其中心设为 O,要在正对着 O 的房顶上安装一盏灯 V,已知灯照射的角度为 90°(所有由 V 照射出的光线的边界所夹角度的最大值,即光线的边界与 VO 的夹角为 45°).若使得房间的每个地方都能照到,VO 的最小值为______ m.

6. 若关于 x 的函数 $f(x)=|x-[x+a]|$ 存在最大值 $M(a)$,则正实数 a 的取值范围是______([y]表示不超过实数 y 的最大整数).

7. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 F,直线 $l:y=kx+d$ 不过点 F,且与双曲线的右支交于点 P、Q.若 $\angle PFQ$ 的外角平分线与 l 交于点 A,则点 A 的横坐标为______.

8. 已知 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 是 1、2、3、4、5 的一个排列,且满足 $|a_i-a_{i+1}|\neq1(i=1,2,3,4)$. 则满足条件的排列 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 的数目为______.

二、论述题(共44分)

9. (14分)如图1,设△ABC 的外心、内心分别为 O、I,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 内的旁心分别为 I_1、I_2、I_3. 证明:

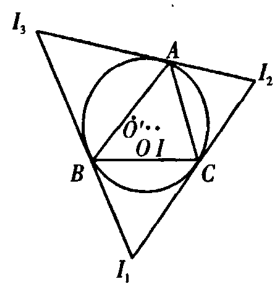

图1

(1)△$I_1I_2I_3$ 为锐角三角形;

(2)若△$I_1I_2I_3$ 的外心为 O',则 O'、O、I 三点共线.

10. (15分)已知有理数数列 $\{a_n\}(n=0,1,\cdots)$ 满足

$a_n=\alpha x_1^n+\beta x_2^n\neq0(n=0,1,\cdots)$,

其中,α、$\beta\in\mathbf{R}$,x_1、$x_2\in\mathbf{C}$,且 $x_1x_2=1$. 证明:

(1)x_1+x_2 为有理数;

(2)若 x_1、x_2 不是实数,则 $\alpha=\beta$.

11. (15分)正五边形 $ABCDE$ 的对角线 BE 分别与对角线 AD、AC 交于点 F、G,对角线 BD 分别与对角线 CA、CE 交于点 H、I,对角线 CE 与对角线 AD 交于点 J. 设由图2中的10个点 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 和线段构成的等腰三角形的集合为 M.

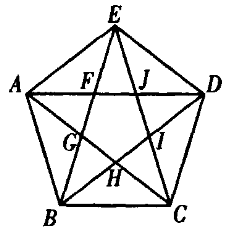

图2

(1)求 M 中元素的数目;

(2)若将这 10 个点中的每个点任意染为红、蓝两种颜色之一,问是否一定存在 M 中的一个等腰三角形,其三个顶点同色?

(3)若将这 10 个点中的任意 n 个点染为红色,使得一定存在 M 中的一个等腰三角形,其三个顶点同为红色,求 n 的最小值.

参 考 答 案

1. $1\leqslant a\leqslant 5$.

由 $bc=a^2-2a+10$,

$(b+c)^2=bc+12a+15$,

得 $(b+c)^2=a^2+10a+25=(a+5)^2$.

则 $(b-c)^2=(a+5)^2-4(a^2-2a+10)\geqslant 0$,

即 $a^2-6a+5\leqslant 0$.

解得 $1\leqslant a\leqslant 5$.

2. $\varnothing$.

若 a、b 同为奇数或一个为奇数一个为偶数,则 a^2+ab+b^2 为奇数,与 2 010 是偶数矛盾;

若 a、b 同为偶数,则 a^2+ab+b^2 是 4 的倍数,与 2 010 模 4 余 2 矛盾.

因此,原不定方程无解.

3. 4.

从最后两项开始,反复应用均值不等式可得

$$原式=\sum_{i=1}^{2\,010}\frac{x_i}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}x_j}+\frac{4}{\prod\limits_{j=1}^{2\,010}x_j}$$

$$=\sum_{i=1}^{2\,009}\frac{x_i}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}x_j}+\left(\frac{x_{2\,010}}{\prod\limits_{j=1}^{2\,009}x_j}+\frac{4}{x_{2\,010}\prod\limits_{j=1}^{2\,009}x_j}\right)$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{2\,009}\frac{x_i}{\prod\limits_{j=1}^{i-1}x_j}+\frac{4}{\prod\limits_{j=1}^{2\,008}x_j}\geqslant\cdots\geqslant x_1+\frac{4}{x_1}\geqslant 4,$$

其中,等号成立的条件为

$x_{2\,010}=x_{2\,009}=\cdots=x_1=2$.

因此,所求的最小值为 4.

4. 2.

由 $\angle BOC=\angle BIC=\angle BHC=120°$,知 O、I、H、B、C 五点共圆.

设 $\triangle ABC$、$\triangle OIH$ 的外接圆半径分别为 R、r.

由正弦定理得

$2R\sin A=BC=2r\sin\angle BOC$.

于是,$r=R$.

设 $\triangle DEF$ 的外接圆半径为 r'.

注意到 A、E、H、F 四点共圆,且 AH 为该圆的直径.由正弦定理得

$$EF=AH\sin A=2R\cos A\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

又因为 A、F、D、C,A、E、D、B 分别四点共圆,所以,

$\angle BDF=\angle CDE=\angle BAC=60°$.

于是,$\angle FDE=60°$.

由正弦定理得

$EF=2r'\sin\angle FDE=\sqrt{3}r'$.

因此,$r'=\dfrac{R}{2}$.

从而,$\dfrac{r}{r'}=2$.

【注】$\triangle DEF$ 的外接圆实际上就是 $\triangle ABC$ 的九点圆,于是,$r'=\dfrac{R}{2}$.

5. $3\sqrt{2}$.

设边长为 6 m 的正方形为 $ABCD$.

当 $\triangle VAC$ 为等腰直角三角形时,斜边 AC 上的高 $3\sqrt{2}$ 即为 VO 的最小值.

6. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

设 $x+a=N+\alpha$(N 为整数,$0\leqslant\alpha<1$).

则 $f(x)=|x-[x+a]|$

$=|N+\alpha-a-N|$

$=|\alpha-a|$.

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时,$-a\leqslant\alpha-a<1-a$,因为 $|1-a|>|-a|$,所以,$f(x)$ 没有最大值;

当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$-a\leqslant\alpha-a<1-a$,因为 $|-a|\geqslant|1-a|$,所以,$f(x)$ 有最大值,且当 $\alpha=0$,即 $x+a$ 为整数时,$f(x)$ 的最大值

$M(a)=a$.

7. $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

过点 A 作 x 轴的垂线 h.

设 P、Q 在直线 h 上的投影分别为 P'、Q'.

则 $\dfrac{PP'}{QQ'}=\dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{FP}{FQ}$，即 $\dfrac{PF}{PP'}=\dfrac{QF}{QQ'}$.

所以，直线 h 为双曲线的右准线.

因此，点 A 的横坐标为 $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8. 14.

满足条件的排列有：

1,3,5,2,4; 1,4,2,5,3; 2,4,1,3,5;
2,4,1,5,3; 2,5,3,1,4; 3,1,4,2,5;
3,1,5,2,4; 3,5,1,4,2; 3,5,2,4,1;
4,1,3,5,2; 4,2,5,1,3; 4,2,5,3,1;
5,2,4,1,3; 5,3,1,4,2.

二、9. (1) 由 $\angle I_3I_1I_2=90°-\dfrac{\angle A}{2}<90°$，得 $\angle I_3I_1I_2$ 为锐角.

同理，$\angle I_1I_2I_3$、$\angle I_2I_3I_1$ 也为锐角.

因此，$\triangle I_1I_2I_3$ 为锐角三角形.

(2) 如图 3，设 AI_1、BI_2、CI_3 分别与 $\odot O$ 交于点 D、E、F. 于是，D、E、F 分别为 II_1、II_2、II_3 的中点.

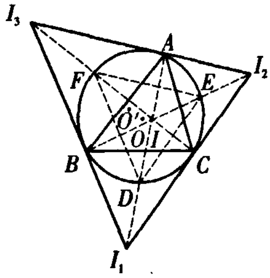

图 3

所以，I 为 $\triangle DEF$ 与 $\triangle I_1I_2I_3$ 的位似中心，且位似比为 2.

而 $\triangle DEF$ 的外心就是 $\triangle ABC$ 的外心，因此，O'、O、I 三点共线，且 O 为 IO' 的中点.

10. (1) 因为 $a_0=\alpha+\beta, a_1=\alpha x_1+\beta x_2$,

$a_2=\alpha x_1^2+\beta x_2^2$,

所以，$a_0x_1-a_1=\beta(x_1-x_2)$,

$a_1x_1-a_2=\beta x_2(x_1-x_2)$.

从而，$a_1x_1-a_2=x_2(a_0x_1-a_1)$，即

$a_2-(x_1+x_2)a_1+a_0=0$.

又 a_0、a_1、a_2 为非零有理数，故 x_1+x_2 为有理数.

(2) 设 $x_1=a+b\,\mathrm{i}, x_2=c+d\,\mathrm{i}\,(b\neq0, d\neq0)$.

因 $x_1+x_2=\dfrac{a_2+a_0}{a_1}=(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$,

所以，$d=-b$.

又 $x_1x_2=1$，则

$1=(a+b\,\mathrm{i})(c-b\,\mathrm{i})=ac+b^2+b(c-a)\,\mathrm{i}$.

从而，$b(c-a)=0$，即 $c=a$.

故 $x_1=a+b\,\mathrm{i}, x_2=a-b\,\mathrm{i}$ 为共轭的单位复数.

由 $a_1=\alpha(a+b\,\mathrm{i})+\beta(a-b\,\mathrm{i})$

$=(\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)b\,\mathrm{i}$,

得　$(\alpha-\beta)b=0$.

从而，$\alpha=\beta$.

【注】关于数列 $\{a_n\}$ 可由特征根法得到

$a_n-(x_1+x_2)a_{n-1}+a_{n-2}=0\,(n\geqslant2)$.

11. (1) 因为由图 2 中的 10 个点 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J 和线段构成的三角形均为等腰三角形，所以，

$|M|=\mathrm{C}_5^3+4\mathrm{C}_5^4+5\mathrm{C}_5^5=35$.

(2) 由抽屉原则，知 A、B、C、D、E 中一定有三个点同色，且这三个点构成的三角形属于 M，故一定存在 M 中的一个等腰三角形，其三个顶点同色.

(3) 若 $n=5$，则将 F、G、H、I、J 染为红色，于是，不存在属于 M 的顶点同为红色的三角形.

若 $n=6$，当 A、B、C、D、E 中有不少于三个红点时，一定存在属于 M 且顶点同为红色的三角形；当 A、B、C、D、E 中少于三个红点时，F、G、H、I、J 中至少有四个红点.

若 F、G、H、I、J 中恰有四个红点，不妨假设 F、G、H、J 为红点，则 A、B、C、D、E 中至少有两个红点. 若 A、B、E 中有一个点是红点，不妨假设 A 为红点，则 $\triangle AFG$ 是属于 M 且顶点同为红色的三角形；否则，C、D 同为红色，于是，$\triangle CDH$ 是属于 M 且顶点同为红色的三角形.

若 F、G、H、I、J 均为红色，则 A、B、C、D、E 至少有一个点为红色. 不妨假设 A 为红点，则 $\triangle AFG$ 是属于 M 且顶点同为红色的三角形.

因此，n 的最小值为 6.

（李建泉　提供）

课外训练

数学奥林匹克初中训练题(137)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)01-0037-04

第一试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 小佩和小佛每人都有整数值的人民币,小佩对小佛说:“你若给我 2 元,我的钱数将是你的 n 倍.”小佛对小佩说:“你若给我 n 元,我的钱数将是你的 2 倍.”其中,n 为正整数. 则 n 的可能值的个数是( ).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

2. 现有质量分别为 7 g 和 m g(m 为正整数)的砝码若干个,在天平上要称出质量为 1 g 的物体需用这两种砝码 7 个. 则 m 取值的可能个数为( ).

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

3. 如图 1,已知 E 是矩形 $ABCD$ 边 AD 的中点,$BE \perp AC$ 于点 F,$AF=2$. 则 $DF=$( ).

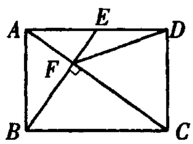

图 1

(A)$2\sqrt{3}$ (B)3

(C)$3\sqrt{3}$ (D)$2\sqrt{2}$

4. 设三角形的三边长分别为 a、b、c,其外接圆半径为 R,$a\sqrt{bc} \geqslant (b+c)R$. 则该三角形最大内角的度数为( ).

(A)150° (B)120° (C)90° (D)135°

5. 已知 α 为锐角. 则关于 x 的方程

$$x^3-x^2+(\sin\alpha-3)x+1=0$$

的根的情况是( ).

(A)只有一个正根

(B)有三个正根

(C)有一个正根、两个负根

(D)有两个正根、一个负根

6. 如图 2,已知 C 在以 AB 为直径的半圆 $\odot O$ 上一点,I 是 $\triangle ABC$ 的内心,AI、BI 的延长线分别与半圆 $\odot O$ 交于点 D、E,$AB=6$. 则 DE 的长为( ).

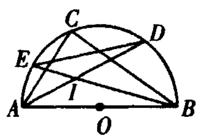

图 2

(A)3 (B)$3\sqrt{2}$ (C)$3\sqrt{3}$ (D)5

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 已知 P 是正 $\triangle ABC$ 内一点,$PA=1$,$PB=2$,$\angle APB=150°$. 则 $PC=$______.

2. 设 m 为实数,关于 x 的一元二次方程

$$(m-2)x^2+(2m-1)x+(m+2)=0$$

的两实根的倒数和的最大值为 8. 则 m 的取值范围是______.

3. 已知实数 a、b、c 满足

$$a^2+b^2=4, b^2+c^2=8.$$

则 $ab+bc+\frac{\sqrt{2}}{2}ac$ 的最小值为______.

4. 将长为 11 cm 的铁丝分成若干长为整数厘米的小段,其中任意三段均可组成一个三角形三边. 则不同分法的种数为______(段数相同且每段对应长相等的分法视为同一种分法).

第二试

一、(20 分)一次竞技赛事是由来自甲、乙两个城市的几个队参加. 已知乙城市比甲城市多来了 8 个队,任意两个队恰好进行一场比赛. 赛事规定:胜者得 1 分,负者得 0 分,没有平局. 最后,乙城市所有队的得分比甲城市所有队的得分多 4 分. 求甲城市最好队得

分的最小值.

二、(25 分)如图3,已知锐角$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$与边AB、AC的切点分别为D、E,BI、CI的延长线与直线DE分别交于点F、G,$AB<AC$,$BC=2FG$. 求证:$\triangle ADE$是等边三角形.

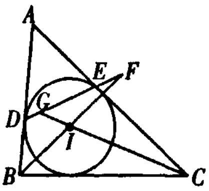

图3

三、(25 分)设三个不同质数a、b、c满足

$a\mid(3b-c)$,$b\mid(a-c)$,$c\mid(2a-7b)$,

$20<c<80$.

求a^bc的所有值.

参 考 答 案

第 一 试

一、1. D.

分别用x元、y元代表小佩、小佛所拥有的钱数. 于是,

$$\begin{cases}x+2=n(y-2), & ①\\ y+n=2(x-n). & ②\end{cases}$$

由式①得$x=ny-2n-2$.

把上式代入式②得

$(2y-7)n=y+4$,

即 $2n=\frac{(2y-7)+15}{2y-7}=1+\frac{15}{2y-7}$.

所以,$2y-7=1,3,5,15$,$y=4,5,6,11$.

相应地,n分别为8,3,2,1,x分别为14,7,6,7.

2. C.

设需要7 g砝码n个. 则需要m g砝码$7-n$个. 由题意得

$(7-n)m-7n=1$或$7n-(7-n)m=1$.

若$(7-n)m-7n=1$,则

$$m=\frac{7n+1}{7-n}=\frac{7n-49+50}{7-n}=\frac{50}{7-n}-7.$$

因为$0<7-n<7$,所以,$7-n=1,2,5$.

相应地,$m=43,18,3$.

经检验,当$m=3$时,$7\times1-3\times2=1$,可用3个砝码称出质量为1 g的物体,不合题意;当$m=43,18$时,符合题意.

类似地,若$7n-(7-n)m=1$,可得$m=41,17,9$符合题意,$m=5,1$不合题意.

综上,符合条件的m值有5个.

3. A.

因为$\triangle AEF\backsim\triangle CBF$,所以,$CF=2AF=4$.

在Rt$\triangle ABC$、Rt$\triangle ABE$中,由射影定理得

$BF^2=AF\cdot CF=8$,$BF=2\sqrt{2}$,

$EF=\frac{1}{2}BF=\sqrt{2}$;

$AE^2=EF\cdot EB$,$AE=\sqrt{6}$.

于是,$\frac{ED}{EF}=\frac{AE}{EF}=\frac{EB}{AE}=\frac{EB}{ED}$.

又$\angle BED=\angle DEF\Rightarrow\triangle BED\backsim\triangle DEF$

$\Rightarrow\frac{ED}{EF}=\frac{BD}{DF}\Rightarrow DF=\frac{BD\cdot EF}{ED}=\frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$.

4. C.

由$b+c\geqslant2\sqrt{bc}$

$\Rightarrow a\sqrt{bc}\geqslant(b+c)R\geqslant2\sqrt{bc}R\Rightarrow a\geqslant2R$.

又三角形的边长不大于其外接圆直径,则$a\leqslant2R$.

因此,$a=2R$.

从而,该三角形为直角三角形,其最大内角为直角.

5. D.

显然,$x\neq0$. 于是,原方程化为

$x^2-x+\sin\alpha-3=-\frac{1}{x}$.

令$y_1=x^2-x+\sin\alpha-3$,$y_2=-\frac{1}{x}$.

其图像如图4所示.

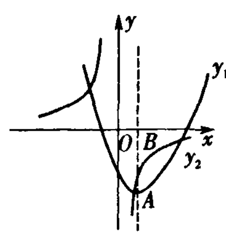

图4

抛物线y_1的顶点为$A\left(\frac{1}{2},\sin\alpha-\frac{13}{4}\right)$.

当$x=\frac{1}{2}$时,

$y_2=-2>\sin\alpha-\frac{13}{4}$,即点$B\left(\frac{1}{2},-2\right)$在双曲线$y_2=-\frac{1}{x}$上,且点$B$在$A$的正上方.

因此,抛物线与双曲线有三个不同交点,

其中有两个点的横坐标为正，一个点的横坐标为负，这三个横坐标均是原方程的解.

6. B.

易知$\angle C=\angle AEB=90^\circ$,

$\angle AIE=\angle IAB+\angle ABI$

$=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle ABC)=45^\circ$.

于是，$\angle EAD=45^\circ$.

在$\triangle ADE$中，由正弦定理得

$DE=AB\sin\angle EAD=6\sin 45^\circ=3\sqrt{2}$.

二、**1.** $\sqrt{5}$.

如图5，将$\triangle PAB$绕点B顺时针旋转60°至$\triangle QCB$，联结PQ. 则$\triangle PQB$为正三角形，

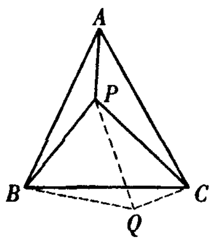

图5

$PQ=PB=2$,

$CQ=PA=1$,

$\angle PQC=\angle BQC-\angle PQB$

$=\angle APB-\angle PQB=90^\circ$.

由勾股定理得$PC=\sqrt{5}$.

2. $m<-2$或$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant\frac{17}{4}$且$m\neq 2$.

设方程的两实根为x_1、x_2. 由题意得

$$\begin{cases}m-2\neq 0,\\ \Delta=(2m-1)^2-4(m-2)(m+2)\geqslant 0.\end{cases}$$

解得$m\leqslant\frac{17}{4}$且$m\neq 2$.

由根与系数关系得

$x_1+x_2=-\frac{2m-1}{m-2}, x_1x_2=\frac{m+2}{m-2}$.

又$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{2m-1}{m+2}\leqslant 8$，则

$\frac{8(m+2)+(2m-1)}{m+2}\geqslant 0$.

于是，$m\geqslant-\frac{3}{2}$或$m<-2$.

因此，m的取值范围是

$m<-2$或$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant\frac{17}{4}$且$m\neq 2$.

3. $-3\sqrt{2}$.

注意到

$(a+\sqrt{2}b+c)^2$

$=a^2+2b^2+c^2+2(\sqrt{2}ab+\sqrt{2}bc+ac)$

$=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+2\sqrt{2}\left(ab+bc+\frac{\sqrt{2}}{2}ac\right)$.

故$ab+bc+\frac{\sqrt{2}}{2}ac$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}(a+\sqrt{2}b+c)^2-\frac{\sqrt{2}}{4}(4+8)$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}(a+\sqrt{2}b+c)^2-3\sqrt{2}\geqslant-3\sqrt{2}$.

当且仅当$a+\sqrt{2}b+c=0$时，上式等号成立.

所以，所求最小值为$-3\sqrt{2}$.

4. 8.

设最短的两段为a cm、b cm，再任意取一段c cm$(a\leqslant b\leqslant c)$. 则$b\leqslant c<a+b$.

(1)若$a=1$，则$1\leqslant b\leqslant c<b+1$. 于是，$b=c$. 因此，$b\mid(11-1)$，$2b<11-1$. 从而，$b$可为1,2,5，有三种分法.

(2)若$a=2$，则$2\leqslant b\leqslant c<b+2$. 于是，$c$可为$b$或$b+1$. 设长$b$ cm、$(b+1)$ cm的铁丝段（除长a外）分别有x段、y段，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y\geqslant 2$.

由题意知$2+bx+(b+1)y=11$.

则$y=\frac{9+x}{b+1}-x$.

当$x=0$时，$y=\frac{9}{b+1}$，$b+1$只能为3，有一种分法(2,3,3,3)；

当$x=1$时，$y=\frac{10}{b+1}-1$，$b+1$只能为5，有一种分法(2,4,5)；

当$x=2$时，不符合题意；

当$x=3$时，$y=\frac{12}{b+1}-3$，$b+1=3,4$，有两种分法(2,2,2,2,3)，(2,3,3,3)；

当$x\geqslant 4$时，$bx\leqslant 9\Rightarrow b\leqslant\frac{9}{x}\leqslant\frac{9}{4}<3$，于是，$b=2$，则$2+2x+3y=11$，解得

$(x,y)=(3,1),(0,3)$,

有两种分法(2,2,2,2,3)，(2,3,3,3).

(3)若$a\geqslant 3$，则$a+b+c\geqslant 9$，$2a+b+c\geqslant 12$. 因此，铁丝只能分成3段. 于是，$(a,b,c)=(3,3,5),(3,4,4)$，有两种分法.

综上,总的分法有8种.

第二试

一、设甲城市有 x 个队参加比赛.则乙城市有 $x+8$ 个队.当甲、乙两城市参赛队之间进行比赛时,甲城市共得 y 分,则乙城市共得 $x(x+8)-y$ 分.

由题意得

$$\frac{1}{2}x(x-1)+y+4$$

$$=\frac{1}{2}[(x+8)-1](x+8)+[x(x+8)-y]$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2+8x+12.$$

因为 y 为整数,所以,x 为偶数.

由 $x(x+8)-y\geqslant 0$

$$\Rightarrow x(x+8)-\left(\frac{1}{2}x^2+8x+12\right)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow x\geqslant\sqrt{24}>4.$$

又因为 x 为偶数,所以,x 的最小值为6.

显然,$y\geqslant x+8$.

于是,甲城市最好队得分为

$(x-1)+(x+8)=2x+7$(分).

因此,当 $x=6$ 时,$2x+7$ 的最小值为19.

故甲城市最好队得分的最小值为19.

二、如图6,联结 AI、DI、EI、BG、CF.

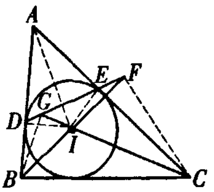

图6

设 $\angle BAC=2\alpha$.

显然,A、D、I、E 四点共圆.

则 $\angle IDE$

$$=\frac{1}{2}\angle BAC=\alpha.$$

故 $\angle BDF=\angle BDI+\angle IDE=90^\circ+\alpha$.

由 $\angle BIC=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB\right)$

$=90^\circ+\alpha$,

得 $\angle BDF=\angle BIC$.

又 $\angle DBF=\angle IBC$,于是,

$$\triangle BDF\backsim\triangle BIC\Rightarrow\frac{BD}{BI}=\frac{BF}{BC}.$$

已知 $\angle DBI=\angle FBC$,则

$\triangle BID\backsim\triangle BCF$

故 $\angle BFC=\angle BDI=90^\circ$.

于是,$\angle FCI=\angle BIC-\angle BFC=\alpha$.

同理,$\angle BGC=90^\circ$.

所以,B、C、F、G 四点共圆.

显然,BC 是该圆的直径,也就是 BC 是 $\triangle CFG$ 的外接圆的直径.

由正弦定理得

$$\frac{FG}{\sin\angle FCG}=BC\Rightarrow\sin\alpha=\frac{FG}{BC}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\alpha=30^\circ\Rightarrow\angle BAC=60^\circ$.

又 $AD=AE$,故 $\triangle ADE$ 是等边三角形.

三、(1)当 $a>b$,$a>c$ 时,$-a<3b-c<3a$.

由 $a\mid(3b-c)$,得 $3b-c=0,a,2a$.

显然,$3b-c\neq 0$.

(i)若 $3b-c=a$,则 $c=3b-a$,

$b\mid(a-c)\Leftrightarrow b\mid(2a-3b)\Leftrightarrow b\mid 2a\Leftrightarrow b\mid 2$.

所以,$b=2$.从而,$c=6-a$.

由此 $a=c=3$ 与 $a\neq c$ 矛盾.

(ii)若 $3b-c=2a$,则 $c=3b-2a$,

$b\mid(a-c)\Leftrightarrow b\mid(3a-3b)\mid\Leftrightarrow b\mid 3a\Leftrightarrow b\mid 3$.

故 $b=3$,$c=9-2a<9$,与 $20<c<80$ 矛盾.

(2)当 $b>a$,$b>c$ 时,$-b<a-c<b$.

由 $b\mid(a-c)$,得 $a-c=0$,与 $a\neq c$ 矛盾.

(3)当 $c>a$,$c>b$ 时,

$-7c<-7b<2a-7b<2a<2c$.

令 $2a-7b=kc$, ①

其中,$k=-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1$.

则 $2a=7b+kc\Rightarrow 7b=2a-kc$,

$a\mid(3b-c)\Leftrightarrow a\mid(3\times 7b-7c)$

$\Leftrightarrow a\mid[3(2a-kc)-7c]$

$\Leftrightarrow a\mid[6a-(3k+7)c]$

$\Leftrightarrow a\mid(3k+7)c\Leftrightarrow a\mid(3k+7)$, ②

$b\mid(a-c)\Leftrightarrow b\mid(2a-2c)\Leftrightarrow b\mid(7b+kc-2c)$

$\Leftrightarrow b\mid(k-2)c\Leftrightarrow b\mid(k-2)$. ③

当 $k=-6$ 时,由式②、③得

$a\mid(-11)$,$b\mid(-8)$.

于是,$a=11$,$b=2$.

由式①得 $c=-\frac{4}{3}$(舍去).

当 $k=-5$ 时,由式②、③得

$a\mid(-8)$,$b\mid(-7)$.

于是,$a=2$,$b=7$.

数学奥林匹克高中训练题(137)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)01-0041-06

第一试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 $f(x)=kx+b$,令

$A=\{x\mid f(x)=x,x\in\mathbf{R}\}$,

$B=\{x\mid f(f(x))=x,x\in\mathbf{R}\}$.

若 $A\neq B$,则在 xOy 平面中,点 (k,b) 组成的图形是______.

2. 设 k 为常数.若对一切 x、$y\in(0,1)$,有

$$x^k+y^k-x^ky^k\leqslant\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}-\frac{1}{x^ky^k},$$

则实数 k 的取值范围是______.

3. 设 x、y、$z\geqslant0$,$x+y+z=1$.则

$$\sqrt{2\,011x+1}+\sqrt{2\,011y+1}+\sqrt{2\,011z+1}$$

的最大值与最小值的和为______.

4. 设锐角 α 满足

$$3\sqrt{41-40\cos\alpha}+4\sqrt{34-30\sin\alpha}=25.$$

则 $\sin\alpha=$______.

5. 如图 1,在棱长为 1 的正方体 AC_1 中,点 P、Q 分别是棱 AD、A_1B_1 上的动点.若异面直线 BD_1、PQ 互相垂直,则 $AP+A_1Q=$______.

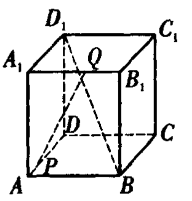

图 1

6. 设 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的过其左焦点 F 的一条弦,点 A 在 x 轴的上方.若 F 分 AB 的比为 $\lambda(\lambda\neq1)$,则 AB 的斜率 $k=$______.

7. 给定大于 1 的正整数 n、p,对任何正整数,若它的 p 进制表示中没有数字零,则称其为"p—充实的".那么,$1,2,\cdots,p^n$ 中 p—充实的自然数的个数为______.

8. 对正整数 x,用 $S(x)$ 表示 x 的各位数字之和.则 $S(x)-9[\lg x]$ 的最大值为______($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数).

二、解答题(共 56 分)

9. (16 分)设 $a_1=a>0$,对 $n\geqslant2$,有 $a_n=\prod_{i=1}^{n-1}(1+a_i)$.求常数 a,使对一切正整数 n 有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}<\frac{1}{2\,011}$,而对任何 $c<\frac{1}{2\,011}$,都存在正整数 n,使 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}>c$.

10. (20 分)如图 2,已知在四面体 $ABCD$ 中,棱 AB、AC、AD 两两垂直,$BC=CD=10$,$BD=12$.作平行于底面 BCD 的截面 α_A,使 α_A 与底面

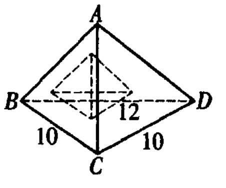

图 2

由式①得 $c=9$(舍去).

类似 $k=-4,-3,-2,1$ 时无符合条件的值.

当 $k=-1$ 时,$a=2$,$b=3$,$c=17$,不符合 $20<c<80$.

当 $k=0$ 时,$2a=7b$,则 $2\mid7b$,$7\mid2a$.

于是,$b=2$,$a=7$.

由 $a\mid(3b-c)$,得 $3b-c=at$,$c=6-7t$.

又因为 $20<c<80$,所以,

$$20<6-7t<80,\ -10\frac{4}{7}<t<-2.$$

只有当 $t=-5$ 时,c 才为质数,$c=41$.

故 $a^bc=7^2\times41=2\,009$.

(谢文晓 湖北省黄冈中学,438000)

BCD 的距离为 1，类似作其他三个截面 α_B、α_C、α_D. 求四个截面交成的小四面体的体积.

11. (20 分)设 A 是双曲线 $y=\frac{2\,011}{x}$ 上一动点，自 A 向椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 引两切线 AP、AQ，切点分别为 P、Q. 若椭圆的左焦点为 F，求 $\frac{|AF|^2}{|PF||QF|}$ 的最小值.

加 试

一、(40 分)如图 3，在 $\triangle ABC$ 中，$BC<AB<AC$，在边 AB、AC 上分别取点 R、Q，使 $BR=BC$，$AQ=AB$. 设 BQ 与 CR 交于点 A_1，过 A 的直线与 BC、BQ、CR 分别交于点 P、C_1、B_1，且 $\triangle A_1RB \backsim \triangle A_1C_1B_1$. 求证：$\frac{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}{AB\cdot BC\cdot CA}=\sqrt{\frac{CP}{CA}}$.

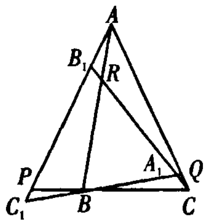

图 3

二、(40 分)求出所有正整数 n，使

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}\geqslant\frac{n-1}{n}.$$

三、(50 分)试证：对任何正整数 n，存在唯一的正奇数对 (x,y)，使得 $2^{n+2}=x^2+7y^2$.

四、(50 分)甲乙两人作游戏，甲先在纸上任意写下一个由 L、R 构成的长为 n 的序列，然后乙将 n 个质量互不相同的砝码逐一放在天平上，每放一个砝码(已放的砝码不再拿下)，乙都在纸上按顺序写一个字母：如果天平倾向左边则写 L，否则写 R. 当所有砝码都放在天平上时，乙也写下一个由 L、R 构成的长为 n 的序列. 规定：当乙写的序列与甲写的序列相同时乙胜，否则甲胜. 试问：谁有必胜策略？

参考答案

第一试

一、**1.** 直线 $x=-1$.

由 $f(x)=x$，得 $(1-k)x=b$.

当 $k=1,b=0$ 时，$A=\mathbf{R}$;

当 $k=1,b\neq0$ 时，$A=\varnothing$;

当 $k\neq1$ 时，$A=\left\{\frac{b}{1-k}\right\}$.

由 $f(f(x))=x$，得

$(1-k^2)x=kb+b$.

当 $k=1,b=0$ 时，$B=\mathbf{R}$;

当 $k=1,b\neq0$ 时，$B=\varnothing$;

当 $k=-1$ 时，$B=\mathbf{R}$;

当 $k\neq\pm1$ 时，$B=\left\{\frac{b}{1-k}\right\}$.

综上，仅当 $k=-1$ 时，$A\neq B$.

故点 (k,b) 组成的图形是直线 $x=-1$.

2. $(-\infty,0]$.

注意到

$$x^k+y^k-x^ky^k\leqslant\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}-\frac{1}{x^ky^k}$$

$$\Leftrightarrow(1-x^k)(1-y^k)\geqslant\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\left(1-\frac{1}{y^k}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^ky^k\geqslant1\Leftrightarrow k\leqslant0.$$

3. $\sqrt{6\,042}+2\sqrt{503}+2$.

令 $a=2\,011x+1,b=2\,011y+1,c=2\,011z+1$.

则 $a、b、c\geqslant1,a+b+c=2\,014$.

首先，由柯西不等式得

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\sqrt{3(a+b+c)}=\sqrt{6\,042}.$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，上式等号成立.

其次，易知对任意 $u>v>s>t>0$，且 $u+t=v+s$，有

$$\sqrt{u}+\sqrt{t}<\sqrt{v}+\sqrt{s}.$$

所以，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant\sqrt{2\,012}+2$.

当且仅当 $x=y=0,z=1$ 时，上式等号成立.

4. $\frac{3}{5}$.

如图 4,作两个具有公共边 CD 的 $\triangle ACD$、$\triangle BCD$,使

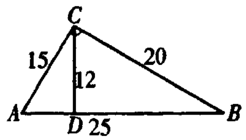

图4

$\angle ACD=\alpha$,

$\angle BCD=90^\circ-\alpha$,

$AC=15, CD=12, BC=20$.

由余弦定理得

$AD=3\sqrt{41-40\cos\alpha}$,

$BD=4\sqrt{34-30\sin\alpha}$.

于是,$AD+BD=25$.

注意到$\angle ACB=90^\circ$,则

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25=AD+BD$.

所以,点 D 在 AB 上.

又易知 $CD\perp AB$,则$\angle ABC=\alpha$.

故 $\sin\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.

5. 1.

如图 5,建立空间直角坐标系,设

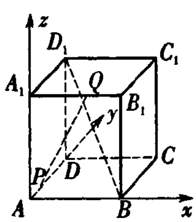

图5

$B(1,0,0)$,

$D_1(0,1,1)$,

$P(0,a,0)$,

$Q(b,0,1)$.

则$\overrightarrow{BD_1}=(-1,1,1)$,

$\overrightarrow{PQ}=(b,-a,1)$.

故 $0=\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=-b-a+1$.

所以,$a+b=1$.

6. $\frac{\sqrt{4\lambda a^2-(\lambda+1)^2b^2}}{(\lambda-1)a}$.

设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左准线为 l,点 A、B 在 l 上的射影分别为 A_1、B_1.

则$\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\lambda$.

令$|BB_1|=t(t>0)$.

则$|AA_1|=\lambda t$.

易知,$|AB|=e(\lambda+1)t$,

$x_A-x_B=(\lambda-1)t$,

$y_A-y_B=\sqrt{|AB|^2-(x_A-x_B)^2}$

$=t\sqrt{e^2(\lambda+1)^2-(\lambda-1)^2}$.

所以,$k=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{\sqrt{4\lambda a^2-(\lambda+1)^2b^2}}{(\lambda-1)a}$.

7. $\begin{cases} n, & p=2; \\ \frac{(p-1)^{n+1}-p+1}{p-2}, & p>2. \end{cases}$

显然,p 进制表示中位数为 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的 p—充实的自然数有$(p-1)^k$ 个. 于是,所求的 p—充实的自然数的个数为

$$\sum_{k=1}^{n}(p-1)^k=\begin{cases} n, & p=2; \\ \frac{(p-1)^{n+1}-p+1}{p-2}, & p>2. \end{cases}$$

8. 9.

设 $x=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}(a_0\neq0)$. 则

$10^n\leqslant x<10^{n+1}$

$\Rightarrow n\leqslant\lg x<n+1\Rightarrow[\lg x]=n$.

故 $S(x)=a_0+a_1+\cdots+a_n\leqslant9(n+1)$

$=9([\lg x]+1)$.

因此,$S(x)-9[\lg x]\leqslant9$.

又 $S(9)-9[\lg 9]=9$,则,$S(x)-9[\lg x]$ 的最大值为 9.

二、**9.** 由题设得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+a_n(n\geqslant2)$,即

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1+a_n)}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+a_n}$.

从而,$\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}(n\geqslant2)$.

则$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=\frac{1}{1+a}+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right)$

$=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{1+a}-\frac{1}{a_{n+1}}$

$<\frac{2}{1+a}$.

由数学归纳法知,对 $n\geqslant2$ 有

$a_n=\prod_{i=1}^{n-1}(1+a_i)>1$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+a}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{2}{1+a}$.

故对任何 $c<\frac{2}{1+a}$，都存在正整数 n，使

$\frac{2}{1+a}-\frac{1}{a_{n+1}}>c$.

依题意得 $\frac{2}{1+a}=\frac{1}{2\,011}$.

因此，$a=4\,021$.

10. 如图 6，设截面 α_B、α_C、α_D 交于一点 A'. 类似地定义点 B'、C'、D'.

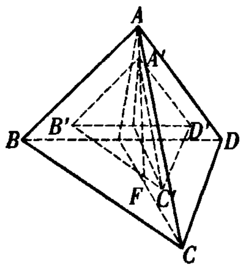

图 6

于是，四面体 $A'B'C'D'$ 与四面体 $ABCD$ 相似.

设相似比为 k，四面体 $ABCD$、四面体 $A'B'C'D'$ 的体积分别为 V、V'.

记 $AB=a,AC=b,AD=c$. 则

$a^2+b^2=b^2+c^2=100,c^2+a^2=144$.

解得 $a=c=6\sqrt{2},b=2\sqrt{7}$.

所以，$V=\frac{1}{6}abc=24\sqrt{7}$.

又 $S_{\triangle BCD}=6\sqrt{10^2-6^2}=48$，故点 A 到平面 BCD 的距离

$$AF=\frac{3V}{S_{\triangle BCD}}=\frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

则 $\cos\angle CAF=\frac{AF}{AC}=\frac{3}{4}$.

所以，点 A' 到平面 BCD 的距离为

$$\left[(6-\sqrt{2})\frac{2\sqrt{7}}{6}-1\right]\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{3}{4}.$$

从而，点 A' 到平面 $B'C'D'$ 的距离为

$$\frac{3\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{3}{4}-1=\frac{3\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{7}{4}.$$

则 $k=\dfrac{\frac{3\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{7}{4}}{\frac{3\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{6}(6-\sqrt{7}-\sqrt{2})$.

故 $V'=k^3V=\left(\frac{6-\sqrt{7}-\sqrt{2}}{6}\right)^3\times24\sqrt{7}$

$=\frac{\sqrt{7}}{9}(6-\sqrt{7}-\sqrt{2})^3$.

11. 设 $A(x',y'),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$. 则 $x'y'=2\,011$.

易知，点 A 关于椭圆的切点弦，即直线 PQ 的方程为

$$\frac{x'x}{25}+\frac{y'y}{9}=1.$$

由 $\begin{cases}\frac{x'x}{25}+\frac{y'y}{9}=1,\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 得

$$(25y'^2+9x'^2)x^2-450x'x+625(9-y'^2)=0.$$

于是，$x_1+x_2=\frac{450x'}{25y'^2+9x'^2}$,

$x_1x_2=\frac{625(9-y'^2)}{25y'^2+9x'^2}$.

由椭圆的第二定义得

$|PF|=a+ex_1=5+\frac{4}{5}x_1$,

$|QF|=a+ex_2=5+\frac{4}{5}x_2$.

则 $|PF||QF|=\left(5+\frac{4}{5}x_1\right)\left(5+\frac{4}{5}x_2\right)$

$=25+4(x_1+x_2)+\frac{16}{25}x_1x_2$

$=25+\frac{1\,800x'}{25y'^2+9x'^2}+\frac{25\times16(9-y'^2)}{25y'^2+9x'^2}$

$=\frac{225(y'^2+x'^2+8x'+16)}{25y'^2+9x'^2}$

$=\frac{225|AF|^2}{25y'^2+9x'^2}$.

故 $\frac{|AF|^2}{|PF||QF|}=\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}$

$=\left(\frac{x'}{5}\right)^2+\left(\frac{y'}{3}\right)^2\geqslant2\left|\frac{x'}{5}\right|\left|\frac{y'}{3}\right|$

$=\frac{2\times2\,011}{15}=\frac{4\,022}{15}$.

当且仅当 $3x'=5y'=\sqrt{30\,165}$ 时，上式等号成立.

因此，$\frac{|AF|^2}{|PF||QF|}$的最小值为$\frac{4\,022}{15}$.

加　试

一、因为 $BR=BC$，$AQ=AB$，所以，

$\angle BCR=\angle BRC$，$\angle BQA=\angle ABQ$.

由题设$\triangle A_1RB\backsim\triangle A_1C_1B_1$，知 B、R、B_1、P 四点共圆. 所以，

$\angle BRC=\angle BC_1B_1$，$\angle ABQ=\angle C_1B_1A_1$.

故$\angle BCR=\angle BC_1P$，$\angle BQA=\angle C_1B_1A_1$.

因此，C、A_1、P、C_1，A、B_1、A_1、Q 分别四点共圆.

则$$\frac{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}{AB\cdot BC\cdot CA}=\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{B_1C}{CA}\cdot\frac{C_1A}{AB}$$
$$=\frac{\sin\angle BCR}{\sin\angle CA_1B}\cdot\frac{\sin\angle B_1AC}{\sin\angle AB_1C}\cdot\frac{\sin\angle ABC_1}{\sin C_1}$$
$$=1.$$

又因为 P、Q、C、C_1 四点共圆，所以，

$\angle APC=\angle BA_1B_1=\angle PAC$.

因此，$CA=CP$.

故$$\frac{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}{AB\cdot BC\cdot CA}=1=\sqrt{\frac{CP}{CA}}.$$

二、当 $n=1$ 时，$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=0=\frac{n-1}{n}$.

当 $n=2$ 时，$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=0<\frac{n-1}{n}$，矛盾.

当 $n=3$ 时，

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{2}{3}=\frac{n-1}{n}.$$

当 $n=4$ 时，

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{2}=1>\frac{3}{4}=\frac{n-1}{n}.$$

当 $n=5$ 时，因为 $\sin x$ 在$[0,\pi]$是凹函数，由琴生不等式知

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=\sin\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{4\times\frac{\pi}{2}}{5}$$
$$=\sin\frac{4\times\frac{\pi}{2}+1\times 0}{5}$$
$$>\frac{1}{5}\left(4\times\sin\frac{\pi}{2}+1\times\sin 0\right)=\frac{4}{5}=\frac{n-1}{n}.$$

当 $n\geqslant 6$ 时，若 $n\equiv-1\pmod 4$，则设 $n=4k-1\ (k\in\mathbf{N}_+)$.

由琴生不等式知

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}=\sin\frac{2k\pi}{4k-1}$$
$$=\sin\frac{4k\times\frac{\pi}{2}}{4k-1}=\sin\frac{(4k-2)\times\frac{\pi}{2}+1\times\pi}{4k-1}$$
$$\geqslant\frac{1}{4k-1}\left[(4k-2)\sin\frac{\pi}{2}+1\times\sin\pi\right]$$
$$=\frac{4k-2}{4k-1}=\frac{n-1}{n}.$$

若 $n\not\equiv-1\pmod 4$，则

$$\frac{n-3}{4}<\left[\frac{n+1}{4}\right]<\frac{n+1}{4}.$$

于是，$\frac{n-2}{4}\leqslant\left[\frac{n+1}{4}\right]\leqslant\frac{n}{4}$.

此时，$0<\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因为 $\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$单调递增，所以，由琴生不等式知

$$\sin\frac{2\left[\frac{n+1}{4}\right]\pi}{n}\geqslant\sin\frac{(n-2)\times\frac{\pi}{2}}{n}$$
$$=\sin\frac{(n-6)\times\frac{\pi}{2}+6\times\frac{\pi}{3}}{n}$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\left[(n-6)\sin\frac{\pi}{2}+6\sin\frac{\pi}{3}\right]$$
$$=\frac{n-6+3\sqrt{3}}{n}>\frac{n-1}{n}.$$

综上，所求的正整数 n 为一切不等于 2 的正整数.

三、存在性.

当 $n=1$ 时，取 $x_1=y_1=1$，则

$2^{n+2}=x_1^2+7y_1^2$.

假定对 $n(n\in\mathbf{N}_+)$，知存在正奇数对 (x_n,y_n)，使得 $2^{n+2}=x_n^2+7y_n^2$.

令 $x_{n+1}=\frac{x_n-7y_n}{2}, y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$. 则

$$x_{n+1}^2+7y_{n+1}^2=\left(\frac{x_n-7y_n}{2}\right)^2+7\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^2$$

$$=2(x_n^2+7y_n^2)=2\times2^{n+2}=2^{n+3},$$

且 $x_{n+2}=x_{n+1}-2x_n, y_{n+2}=y_{n+1}-2y_n$.

由 $x_1=y_1=1, x_2=-3, y_2=1$ 均为奇数，可知对一切正整数 n，有 x_n、y_n 都是奇数.

唯一性.

假设对某个正整数 n，存在两个不同的奇数对 $(x,y)\neq(z,w)$，使

$$2^{n+2}=x^2+7y^2=z^2+7w^2. \quad ①$$

则 $x^2=2^{n+2}-7y^2, 7w^2=2^{n+2}-z^2$.

两式相乘得

$$7x^2w^2=(2^{n+2})^2-2^{n+2}(7y^2+z^2)+7y^2z^2.$$

故 $7(xw+yz)(xw-yz)$

$$=2^{n+2}(2^{n+2}-7y^2-z^2)=2^{n+2}(x^2-z^2).$$

因为 x、z 为奇数，$2\mid(x^2-z^2)$，所以，

$2^{n+3}\mid2^{n+2}(x^2-z^2)$.

从而，$2^{n+3}\mid7(xw+yz)(xw-yz)$.

注意到

$$(xw+yz)+(xw-yz)=2xw\equiv2\pmod 4.$$

从而，$xw+yz$、$xw-yz$ 不都被 4 整除.

故 $xw+yz$、$xw-yz$ 中有一个被 2^{n+2} 整除.

不妨设 $2^{n+2}\mid(xw-yz)$.

由式①得

$$2^{n+2}=x^2+7y^2, 2^{n+2}=z^2+7w^2.$$

两式相乘得

$$(2^{n+2})^2=(x^2+7y^2)(z^2+7w^2)$$

$$=(xz+7yw)^2+7(xw-yz)^2.$$

若 $xw-yz\neq0$，则

$$(xw-yz)^2\geqslant(2^{n+2})^2,$$

矛盾.

所以，$xw-yz=0$.

令 $x=ky, z=kw$.

代入式①得 $k^2y^2+7y^2=k^2w^2+7w^2$，即

$$(k^2+7)y^2=(k^2+7)w^2.$$

于是，$y=w$.

从而，$x=z$，矛盾.

四、乙有必胜策略.

记 n 个砝码的质量依次为

$$a_1<a_2<\cdots<a_n.$$

设甲写的序列为 A.

下面证明：乙有办法写下序列 A.

不妨设 A 的最后一项为 L，且 n 为偶数.

乙的策略满足如下要求：

(1)任何时刻天平上砝码的下标都是连续的自然数；

(2)偶下标砝码放在天平的左边，奇下标砝码放在天平的右边.

由以上两点知，任何时刻天平总是倾斜向含有最重砝码的那一边.

此外，还满足：

(3)序列从某项到下一项改变字母

⇔天平从某个砝码到加下一个砝码改变倾斜方向

⇔新放的是一个比已放的都重的砝码；

序列从某项到下一项不改变字母

⇔天平从某个砝码到加下一个砝码不改变倾斜方向

⇔新放的是一个比已放的都轻的砝码.

这样一来，乙可按下述规则将砝码排列顺序：

从最后一项开始逆向往前排，当排列右起第 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个砝码时，如果序列 A 的右起第 i 项与它左边一项不同，则排剩下的最重的砝码，否则，排剩下的最轻的砝码（如 $A=(\mathrm{L},\mathrm{R},\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{L},\mathrm{L})$，则砝码排列的顺序是 $(a_4,a_5,a_3,a_6,a_2,a_1)$）.

现在，按从左向右的顺序依次将砝码放在天平上，且下标为偶数的砝码都放在天平的左边，下标为奇数的砝码都放在天平的右边，则此放法对应写下的序列恰好为 A.

（冯跃峰　深圳市高级中学，518040）

数学奥林匹克问题

本期问题

初 289 网民上网的级别标志是使用星星、月亮、太阳. 规定:全天在 0 点至 24 点之间上网时间累计满 2 个小时就算上网一天. 从第一天上网开始算起,上网满 5 天时,级别标志为 1 颗星星;又满 7 天时,级别标志为 2 颗星星;……(得到第 n 颗星星要比得到第 $n-1$ 颗星星时多耗时 2 天). 每够 4 颗星星就改用 1 个月亮,每够 4 个月亮就改用 1 个太阳(即 16 颗星星为 1 个太阳). 如果从 2005 年 7 月 1 日开始,每天不间断上网,请问:2011 年元旦这一天的时候,级别标志是什么? 再过多少天,进入下一级别标志?

初 290 如图 1,已知$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 交于点 M、N,MA 是$\odot O_2$ 的切线与$\odot O_1$ 交于点 A,MB 是$\odot O_1$ 的切线与$\odot O_2$ 交于点 B,延长 MN 到点 P,使 $MN=NP$,PA 与$\odot O_1$ 交于点 C,PB 与$\odot O_2$ 交于点 D. 求证:C、N、D 三点共线,且 $CN=ND$.

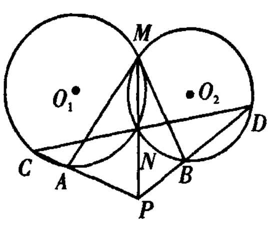

图 1

高 289 对任意一个正整数 $n(n\geqslant 2)$,试求:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right]+\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

的值.

高 290 设 x_1、x_2 是实系数一元二次方程 $x^2-bx+c=0$ 的两个根. 求 $x_1^n+x_2^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

上期问题解答

初 287 已知存在 2 011 个正整数,其积与和相等. 试求这 2 011 个数中至少有多少个 1?

解 设这 2 011 个正整数为

$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{2011}$.

由 $a_1a_2\cdots a_{2011}=a_1+a_2+\cdots+a_{2011}$

$\leqslant 2\,011a_{2011}$,

知 $a_1a_2\cdots a_{2010}\leqslant 2\,011<\min\{2^{11},3^7,4^6\}$.

故 $a_1=a_2=\cdots=a_{2000}=1$,

$a_{2004}\leqslant 2$,$a_{2005}\leqslant 3$.

(1)若 $a_{2001}=2$,则

$2\,002+10a_{2011}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2011}$

$=a_1a_2\cdots a_{2011}\geqslant 2^{10}a_{2011}$

$\Rightarrow 2\,002\geqslant 1\,014a_{2011}\geqslant 2\,028$,

矛盾.

所以,$a_{2001}=1$.

(2)若 $a_{2002}=2$,则

$2\,003+9a_{2011}\geqslant 2^9a_{2011}$

$\Rightarrow 2\,003\geqslant 503a_{2011}\Rightarrow a_{2011}\leqslant 3$.

设 $a_{2002},a_{2003},\cdots,a_{2011}$ 中有 $x(x\geqslant 3)$ 个 2,$10-x$ 个 3. 则

$2\,001+2x+3(10-x)=2^x\times 3^{10-x}$,

即 $2\,031-x=2^x\times 3^{10-x}(3\leqslant x\leqslant 10)$,

其无正整数解.

所以,$a_{2002}=1$.

(3)若 $a_{2003}=2$,则

$2\,004+a_{2004}+a_{2005}+\cdots+a_{2011}$

$=2a_{2004}a_{2005}\cdots a_{2011}$.

如果 $a_{2008}\geqslant 3$,则

$2004+8a_{2011}\geqslant 2^5\times 3^3 a_{2011}$

$\Rightarrow 2004\geqslant 856a_{2011}\geqslant 2568$,

矛盾.

故 $a_{2004}=a_{2005}=\cdots=a_{2008}=2$.

则 $2014+a_{2009}+a_{2010}+a_{2011}$

$=2^6 a_{2009}a_{2010}a_{2011}$. ①

如果 $a_{2010}\geqslant 4$,则

$2014+3a_{2011}\geqslant 2^6\times 2\times 4a_{2011}$

$\Rightarrow 2014\geqslant 509a_{2011}\geqslant 2036$,

矛盾.

故 $a_{2009}\leqslant a_{2010}\leqslant 3$.

经检验,当

$(a_{2009},a_{2010})=(2,2),(2,3),(3,3)$

时,方程①无正整数解 a_{2011}.

所以,$a_{2003}=1$.

(4)若 $a_{2004}=2$,则类似(3)有

$a_{2005}=a_{2006}=2$.

故 $2009+a_{2007}+a_{2008}+\cdots+a_{2011}$

$=2^3 a_{2007}a_{2008}\cdots a_{2011}$. ②

如果 $a_{2009}\geqslant 4$,则

$2009+5a_{2011}\geqslant 2^3\times 2^2\times 4^2 a_{2011}$

$\Rightarrow 2009\geqslant 507a_{2011}\geqslant 2028$,

矛盾.

故 $a_{2009}\leqslant 3$.

记 $A=(a_{2007},a_{2008},a_{2009},a_{2010},a_{2011})$.

若 $A=(2,2,2,a,b)$,则式②变为

$2015+a+b=64ab$

$\Rightarrow a+b-33=64(ab-32)$

$\Rightarrow a+b=64k+33(k\in\mathbf{N}),ab=k+32$

$\Rightarrow a+b>ab\Rightarrow(a-1)(b-1)<1$,

矛盾.

若 $A=(2,2,3,a,b)$,则式②变为

$2016+a+b=96ab$

$\Rightarrow a+b=96(ab-21)$

$\Rightarrow a+b=96k(k\in\mathbf{N}_+),ab=k+21$

$\Rightarrow a+b>ab\Rightarrow(a-1)(b-1)<1$,

矛盾.

若 $A=(2,3,3,a,b)$ 或 $(3,3,3,a,b)$,同上均导出矛盾.

所以,$a_{2004}=1$.

(5)当 $a_{2005}=a_{2006}=\cdots=a_{2010}=2,a_{2011}=32$ 时,

$a_1+a_2+\cdots+a_{2011}=2004+2\times 6+32$

$=2048=a_1a_2\cdots a_{2011}$.

综合(1)~(5),知至少有2 004个1.

(刘东华 天津市南开中学,300100)

初288 用红、黄、蓝、绿四种颜色给如图2正八面体的面 A、B、C、D、E、F、G、H 染色(允许只用其中几种),使相邻面(有公共棱的面)不同色.求不同的染色方法的种数.

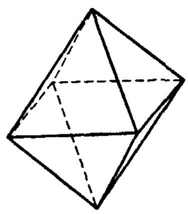

图2

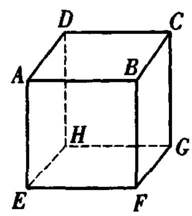

图3

解 如图3,作一正方体,其顶点对应正八面体各面.则当且仅当正八面体中两面相邻时,对应的正方体两顶点相邻.

原问题转化为:求用四种颜色给正方体的八个顶点染色、相邻点不同色的染色方法的种数.

A 的染色方法有4种.

下面对 B、D、E 的染色分情况讨论.

(1)B、D、E 同色,有3种染色方法.

则 C、F、H 至多染3色,各有3种选择,共有27种染色方法.其中,

染3色(共有 $3!=6$ 种染色方法)时,G 只有1种选择;染1色(共有3种染色方法)时,G 有3种选择;染2色(共有 $27-6-3=18$ 种染色方法)时,G 有2种选择.

共计 $3(6\times 1+3\times 3+18\times 2)=153$ 种染色方法.

(2)B、D、E 染2色,有 $A_3^2C_3^1=18$ 种染色方法.

由对称性，不妨设 B、D 同色，E 染另一色. 则 F、H 有 2 种选择，C 有 3 种选择，共有 12 种染色方法. 其中，

染 3 色（共有 2 种染色方法）时，G 有 1 种选择；染 1 色（共有 2 种染色方法）时，G 有 3 种选择；染 2 色（共有 $12-2-2=8$ 种染色方法）时，G 有 2 种选择.

共计 $18(2\times1+2\times3+8\times2)=432$ 种染色方法.

(3) B、D、E 染 3 色，有 $3!=6$ 种染色方法.

则 C、F、H 各有 2 种选择，共有 8 种染色方法. 其中，

染 1 色（必与 A 同色，有 1 种染色方法）时，G 有 3 种选择；染 2 色（同色的两点必与 A 同色，共有 3 种染色方法）时，G 有 2 种选择；染 3 色（有 $8-1-3=4$ 种染色方法）时，G 有 1 种选择.

共计 $6(1\times3+3\times2+4\times1)=78$ 种染色方法.

综合 (1) ~ (3)，不同的染色方法的种数为 $4(153+432+78)=2\,652$.

（雷　勇　河北省石家庄二中，050000）

高 287　如图 4，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，对边 AB 与 DC 交于点 P，AD 与 BC 交于点 Q，M 是 PQ 的中点，MC 与 $\odot O$ 交于另一点 G. 求证：A、G、P、Q 四点共圆.

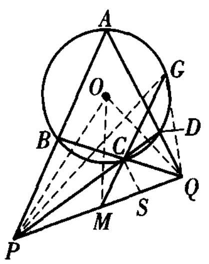

图 4

证明　如图 4，在 PQ 上取点 S，使 B、P、S、C 四点共圆，联结 OP、OM、OQ、GP、GQ. 记 $\odot O$ 半径为 R. 易知

$\angle CSQ=\angle CBP=\angle ADC$.

于是，C、S、Q、D 四点共圆.

由割线定理得

$PC\cdot PD+QC\cdot QB$

$=PS\cdot PQ+QS\cdot QP=PQ^2$.

由三角形中线长公式得

$$4OM^2=2OP^2+2OQ^2-PQ^2. \quad ①$$

又由圆幂定理得

$OM^2=MC\cdot MG+R^2$,

$OP^2=PC\cdot PD+R^2$,

$OQ^2=QC\cdot QB+R^2$.

将其代入式①得

$4MC\cdot MG=2(PC\cdot PD+QC\cdot QB)-PQ^2=PQ^2$.

结合 $MP=MQ$，知

$MP^2=MQ^2=MC\cdot MG$.

于是，$\triangle MPC\backsim\triangle MGP$,

$\triangle MQC\backsim\triangle MGQ$.

则 $\angle MGP=\angle MPC$，$\angle MGQ=\angle MQC$.

故 $\angle PGQ=\angle MGP+\angle MGQ$

$=\angle MPC+\angle MQC=180^\circ-\angle PCQ$

$=180^\circ-\angle BCD=\angle A$.

因此，A、G、P、Q 四点共圆.

（沈　毅　重庆市合川太和中学，401555）

高 288　已知 n 是正整数. 求多项式 $(x^2-x+1)^n$ 的奇系数的个数.

解　设多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 是整系数多项式. 若 $P(x)-Q(x)$ 的所有系数都是偶数，则称两个多项式相似，记为 $P(x)\sim Q(x)$. 此时，多项式 $P(x)$、$Q(x)$ 系数为奇数的项的个数相同，将多项式 $P(x)$ 的奇系数的个数记作 $\beta(P)$.

显然，$(x^2-x+1)^n\sim(x^2+x+1)^n$.

下面研究：$P_n(x)=(x^2+x+1)^n$ 的奇系数的个数问题.

易用数学归纳法证明：当 $n=2^q$ ($q\in\mathbf{Z}_+$) 时，$P_n(x)\sim x^{2n}+x^n+1$.

这样，可以联想到将自然数 n 转换成二进制考虑.

先考虑一种简单情况：

$n=2^m-1$ ($m\in\mathbf{N}_+$).

设 $m=2k+1$ ($k\in\mathbf{N}$). 则

$n=2^{2k+1}-1\equiv1(\bmod 3)$.

考虑多项式

$$R(x)=(x+1)\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{3}}x^{n+3k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-4}{3}}x^{3k}\right)+x^{n-1}.$$

则 $\beta(R)=\frac{2^{m+2}+1}{3}$.

$$R(x)(x^2+x+1)$$

$$\sim(x+1)\left(\sum_{k=0}^{n+1}x^{n+k}+\sum_{k=0}^{n-2}x^k\right)+$$

$$x^{n-1}(x^2+x+1)$$

$$\sim x^{2n+2}+x^{n+1}+1,$$

且 $P_n(x)(x^2+x+1)\sim x^{2n+2}+x^{n+1}+1$.

于是，$\beta(P_n)=\beta(R)=\frac{2^{m+2}+1}{3}$.

再设 $m=2k(k\in\mathbf{N}_+)$. 则

$n=2^{2k}-1\equiv0(\bmod 3)$.

考虑多项式

$$Q(x)=(x+1)\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}}(x^{n+2+3k}+x^{3k})+x^n.$$

同理，$\beta(P_n)=\beta(Q)=\frac{2^{m+2}-1}{3}$.

故 $\beta(P_{2^m-1}(x))=\frac{2^{m+2}+(-1)^{m+1}}{3}$.

下面考虑一般情况：将 $n\in\mathbf{N}_+$ 用二进制表示，

$$n=(\underbrace{11\cdots1}_{a_k个}\underbrace{00\cdots0}_{b_k个}\underbrace{11\cdots1}_{a_{k-1}个}\underbrace{00\cdots0}_{b_{k-1}个}\cdots\underbrace{11\cdots1}_{a_1个}\underbrace{00\cdots0}_{b_1个})_2,$$

其中，a_i、$b_i\in\mathbf{N}_+$，$b_1\geqslant0$.

令 $S_i=\sum_{j=1}^{i-1}(b_j+a_j)+b_i(i=1,2,\cdots,k)$.

则 $n=\sum_{i=1}^{k}2^{S_i}(2^{a_i}-1)$,

$$P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x^2+x+1)^{2^{S_i}(2^{a_i}-1)}$$

$$\sim\prod_{i=1}^{k}(x^{2^{S_i+1}}+x^{2^{S_i}}+1)^{2^{a_i}-1}.$$

故 $\beta(P_n)=\prod_{i=1}^{k}\frac{2^{a_i+2}-(-1)^{a_i}}{3}$.

（潘 铁 天津市实验中学，300074）

（上接第 13 页）

引理 2 的证明 分别将 $f(A_1)$，$f(A_2)$，$\cdots$，$f(A_{k+l})$ 及 $A_1,A_2,\cdots,A_{k+l}$ 依次放在一个圆周外侧、内侧. 则由式②知外侧相邻两项之差的绝对值在区间 $(0,1)$ 中.

设 $f(A_p)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k+l}\{f(A_j)\}$,

$f(A_q)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k+l}\{f(A_j)\}$.

由 $\sum_{j=1}^{k+l}f(A_j)=k\sum_{j=1}^{k+l}y_j=0$, ③

得 $f(A_p)\leqslant0\leqslant f(A_q)$.

若 $f(A_p)=f(A_q)$，则

$f(A_j)=0(j=1,2,\cdots,k+l)$.

结论显然成立.

下设 $f(A_p)<f(A_q)$.

$f(A_p)$、$f(A_q)$ 将圆周分成两段圆弧，由引理 1 知，在每段圆弧上各至少存在一个数 $f(A_u)$、$f(A_v)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 中.

若 $A_u\neq A_v$，则引理 2 成立.

下设 $A_u=A_v$.

若 $u\neq v$，则 $A_{u+t}=A_{v+t}(t=1,2,\cdots)$.

从而，$\{A_j\}$ 沿圆周周期排列. 取最小正周期为 T.

$\{A_{u+tT}\mid t=0,1,\cdots\}$ 将圆周分成 $\frac{k+l}{T}$ 段.

每段上都有 $A_{p'}=A_p$，$A_{q'}=A_q$. 于是，在弧 $(A_{p'},A_{q'})$ 与 $(A_{q'},A_{p'+\varepsilon T})$ 中各有一个 $A_{u'}$、$A_{v'}$，满足 $f(A_{u'})$、$f(A_{v'})$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 中，其中，$\varepsilon\in\{-1,1\}$，与 $q'-p'$ 同号.

显然，$A_{u'}\neq A_{v'}$. 否则，$A_{u'}=A_{v'}$，则 $\{A_j\}$ 以 $|u'-v'|$ 为周期，但 $|u'-v'|<T$，矛盾.

若 $u=v$，则 $u=v=p$ 或 q.

由式③知，存在 $r\neq u$，使得 $f(A_r)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 中.

同上知引理 2 成立.

回到原题.

由引理 2，知满足式①的 k 元子集 A' 至少有 $\frac{2C_{k+l}^k}{k+l}$ 个.

从而，S 至少有 $\frac{2C_{k+l}^k}{k+l}$ 个好的子集.

参考文献：

[1] 李建泉 译. 第 49 届 IMO 预选题（二）[J]. 中等数学，2009(9).