目　次

数学活动课程讲座

整边三角形 …………………………………………… 邹守文(2)

与完全图有关的竞赛问题 ………………………… 宋宝莹(5)

从高考到竞赛

高考与竞赛中的二次曲线的极线问题 ………………… 李庆胜(10)

命题与解题

轮换对称式最值求法 ……………………………… 甘超一(15)

应用一元三次方程韦达定理解题 ………………… 臧殿高(18)

竞赛之窗

2010 年广东省初中数学竞赛初赛 ……………………………… (20)

2010 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛 …………………… (23)

2010 年河北省高中数学竞赛 …………………………………… (26)

2010 年湖南省高中数学竞赛 …………………………………… (31)

课外训练

数学奥林匹克初中训练题(138) ………………… 宿晓阳(36)

数学奥林匹克高中训练题(138) ………………… 宋　强(40)

数学奥林匹克问题 …………… 田永海　吴远宏　徐万镒　等(47)

中等数学

High-School Mathematics

2011 年第 2 期(总第 206 期)

(2011 年 2 月中旬出版)

编辑部主任　李　炘

编辑部电话　022-23766781

发行部电话　022-23542233

E-mail　zdsx@chinajournal.net.cn

期刊基本参数:CN 12-1121/O1 * 1982 * m * 16 * 48 * zh * P * ￥4.50 * 11500 * 12 * 2011-2

数学活动课程讲座

整边三角形

邹守文
（安徽省南陵县春谷中学，241300）

中图分类号：O123.1　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2011)02-0002-03

（本讲适合初中）

我们通常称三边长都是整数的三角形为整边三角形，它是数学竞赛中经常涉及到的一类问题. 由于其既要用到三角形的性质，又要用到整数的性质，因此，有一定的难度.

1　把握三角形的几何性质

主要利用三角形的性质得到关键的结论，再对结论进行代数分析，得出问题的解.

例1　已知$\triangle ABC$的三边长a、b、c都是正整数（a、b、c的最大公约数是1），且

$\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$.

求证：$a+b$、$a-c$、$b-c$都是完全平方数.

证明　如图1，过点B作BD平分$\angle ABC$. 则

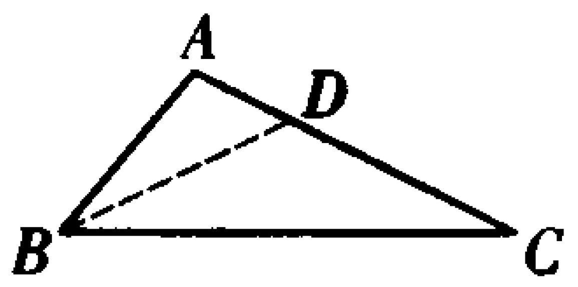

图1

$\angle DBC=\angle C$,

$\angle BDA=2\angle C$.

故$\triangle ABC\backsim\triangle ADB$

$\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{c}{AD}$.

由角平分线定理知

$\frac{a}{CD}=\frac{c}{AD}$

$\Rightarrow\frac{a+c}{CD+AD}=\frac{c}{AD}$

$\Rightarrow\frac{a+c}{b}=\frac{c}{AD}$.

由上述两式知$\frac{b}{c}=\frac{a+c}{b}$，即

$b^2=c(a+c)=c^2+ac$.

由题意得$\angle A=2\angle B$，$\angle B=2\angle C$. 则

$a^2=b^2+bc$,　①

$b^2=c^2+ac$.　②

①+②得$a^2-ac=(b+c)c$，即

$\frac{a^2-ac}{ac}=\frac{b+c}{a}$.　③

又由式①有$\frac{a}{b}=\frac{b+c}{a}$，代入式③得

$\frac{a}{c}-\frac{a}{b}=1\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\Rightarrow a+b=\frac{ab}{c}$.

所以，$c\mid ab$.

因为a、b、c的最大公约数是1，即a、b、c三数没有共同的质因子，所以，可设$c=xy$，其中，$x\mid a$，$y\mid b$.

由前述知$(x,b)=1$，$(y,a)=1$.

设$a=ux$，$b=vy$.

则由$a+b=\frac{ab}{c}$，得$ux+vy=uv$.

因为$u\mid(ux+vy)$，所以，$u\mid vy$.

又由$(y,a)=1$，得$(y,u)=1$. 于是，$u\mid v$.

同理，$v\mid u$.

从而，$u=v\Rightarrow x+y=u$.

故$a+b=ux+vy=ux+uy=u^2$,

$a-c=ux-xy=x(u-y)=x^2$,

$b-c=vy-xy=y(v-x)=y^2$,

为完全平方数.

收稿日期：2010-07-01

2 利用整数的性质

主要指利用整数的奇偶性、整数的分解质因数将三角形问题转化为数论问题解决.

例 2 以 $2\,009^{12}$ 为一条直角边,且三条边都是整数的不同的直角三角形(全等三角形视为同一个三角形)有______个.[1]

(2009,青少年数学国际城市邀请赛)

解 设 a、$2\,009^{12}$、c 为直角三角形的三边,c 为斜边. 则

$$(c+a)(c-a)=2\,009^{24}=41^{24}\times7^{48}.$$

因为 $c+a>c-a$,且奇偶性相同,所以,都为奇数.

又 $2\,009^{24}=41^{24}\times7^{48}$ 有 25×49 个不同的因数,可以配成 $\frac{25\times49-1}{2}=612$ 对,每一对因数构成一种可能的解.

另一方面,$2\,009^{12}$ 显然不符合要求.

所以,共有 612 对不同的整边直角三角形满足条件.

3 利用因式分解

通过分析题意将问题转化为代数问题,再利用分解因式通过方程组得到问题的解.

例 3 边长为整数的直角三角形,若其两直角边长是方程

$$x^2-(k+2)x+4k=0$$

的两个根,求 k 的值并确定直角三角形三边之长.[2]

(2010,全国初中数学联赛江西省初赛)

【分析】由已知条件先根据一元二次方程根与系数关系转化为平方差公式,再利用因式分解求解.

解 设直角边长为 a、$b(a\leqslant b)$. 则

$$a+b=k+2,ab=4k$$

$$\Rightarrow ab-4a-4b=-8$$

$$\Rightarrow(a-4)(b-4)=8=1\times8=2\times4$$

$$\Rightarrow(a-4,b-4)=(1,8)\text{或}(2,4)$$

$$\Rightarrow(a,b)=(5,12)\text{或}(6,8).$$

故三角形的三边长为

$$(5,12,13)\text{或}(6,8,10),$$

且 $k=15$ 或 12.

4 利用不等式进行估计

利用不等式限制三边的取值范围,从而,求出边长的整数解,进而获得问题的解.

例 4 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c,且满足

$$abc=2(a-1)(b-1)(c-1).$$

是否存在边长均为整数的 $\triangle ABC$? 若存在,求出三边长;若不存在,说明理由.

解 不妨设整数 $a\geqslant b\geqslant c$. 显然,$c\geqslant2$.

若 $c\geqslant5$,此时,$\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{5}$.

由 $abc=2(a-1)(b-1)(c-1)$,得

$$\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\geqslant\left(\frac{4}{5}\right)^3.$$

矛盾.

故 c 只可能取 2、3、4.

当 $c=2$ 时,$a+b=1$,无解;

当 $c=3$ 时,$(a-4)(b-4)=12$,能构成三角形的只有 $a=8,b=7,c=3$.

当 $c=4$ 时,$(a-3)(b-3)=6$,能构成三角形的只有 $a=6,b=5,c=4$.

故存在三边长均为整数的 $\triangle ABC$,其三边长分别为 4、5、6 或 3、7、8.

5 利用勾股数组的表示形式

根据勾股数组的表示形式,给出直角三角形三边长的表示方式,然后转化为求不定方程的整数解.

例 5 设直角三角形的三边长 a、b、c 都是正整数,且斜边长 c 满足 $87\leqslant c\leqslant91$. 求这样的直角三角形的三边长.

【分析】可根据勾股数组的表示形式

$$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2),$$

来确定 m、n 的值.

解 因为勾股数组具有形式

$$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2),$$

所以,设斜边长为

$k(m^2+n^2)((m,n)=1,m>n)$.

(1)若 $k(m^2+n^2)=87=3\times29$,则当 $k=1,29,87$ 时,无解;当 $k=3$ 时,$m=5,n=2$,对应的勾股数组为(63,60,87).

(2)若 $k(m^2+n^2)=88=2^3\times11$,逐一验证知没有整数解.

(3)若 $k(m^2+n^2)=89$ 是质数,则当 $k=89$时,无解;当 $k=1$ 时,$m=8,n=5$,对应的勾股数组为(39,80,89).

(4)若 $k(m^2+n^2)=90$,验证知,当 $k=9$ 时,$m=3,n=1$,对应的勾股数组为(72,54,90);当 $k=18$ 时,$m=2,n=1$,对应的勾股数组为(54,72,90);其余无解.

(5)若 $k(m^2+n^2)=91=7\times13$,则验证知,当 $k=7$ 时,$m=3,n=2$,对应的勾股数组为(35,84,91);其余情况无解.

所以,这样的直角三角形三边长为

(63,60,87),(39,80,89),

(54,72,90),(35,84,91).

练习题

1. 在$\triangle ABC$中,已知 $AB=AC$,$\angle C$ 的平分线 CD 交 AB 于点 D,BD、BC、CD 是三个连续整数. 求$\triangle ABC$ 的周长.

提示:令 $AB=AC=b,BC=a$.

由角平分线定理知

$$BD=\frac{ab}{a+b},$$

$$BC-BD=a-\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}$$

$$=k\in\{1,2\}.$$

仿例1得

$$CD^2=BD(BD+BC)=\frac{a^2b(a+2b)}{(a+b)^2}.$$

若 $k=1$,则 $b=a^2-a$.

故 $CD^2=(a-1)(2a-1)>(a-2)^2$.

从而,$(a-1)(2a-1)=(a+1)^2$.

解得 $a=5,b=20,a+2b=45$.

若 $k=2$,同理解得 $a=3,b=\frac{3}{2}$,舍去.

所以,$\triangle ABC$ 的周长为45.

2. 如图2,$\triangle ABC$ 的三边长 $BC=a,AC=b,AB=c$,a、b、c 都是整数,且 a、b 的最大公约数为2. G、I 分别为$\triangle ABC$ 的重心、内心,且$\angle GIC=90°$. 求$\triangle ABC$ 的周长.

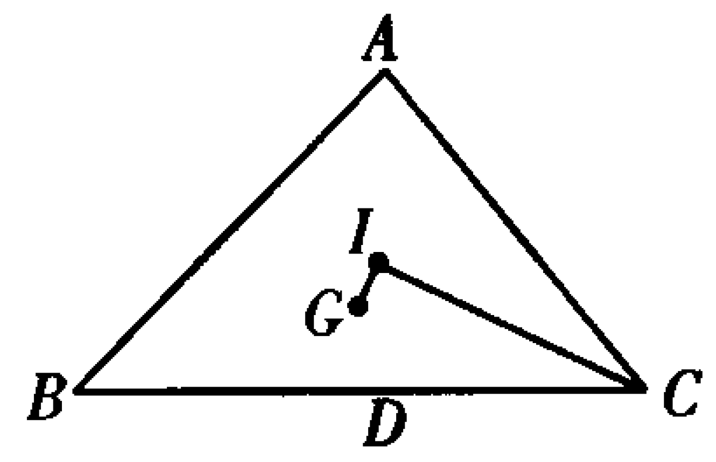

图2

(2008,《数学周报》杯全国初中数学竞赛)

提示:解答见本刊2008年第7期.

3. 已知直角三角形的两条直角边长分别为 l、m,斜边长为 n,其中,l、m、n 是正整数,且 l 是质数. 求证:$2(l+m+1)$是完全平方数.

提示:由勾股定理得

$l^2=n^2-m^2=(n-m)(n+m)$.

因为 l 是质数,所以,

$(n+m,n-m)=(l^2,1)$

$\Rightarrow(n,m)=\left(\frac{l^2+1}{2},\frac{l^2-1}{2}\right)$.

故 $2(l+m+1)=(l+1)^2$.

4. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a、b,斜边长为 c. 若 a、b、c 均为整数,且 $c=\frac{1}{3}ab-(a+b)$,求满足条件的直角三角形的个数.

(2010,全国初中数学联赛天津赛区初赛)

提示:由勾股定理得 $c^2=a^2+b^2$.

代入题设等式并整理得

$ab-6(a+b)+18=0$

$\Rightarrow(a-6)(b-6)=18$.

解得(a,b,c)

$=(7,24,25),(8,15,17),(9,12,15)$.

参考文献:

[1] 2009青少年数学国际城市邀请赛[J]. 中等数学,2009(11).

[2] 2010年全国初中数学联赛江西省初赛[J]. 中等数学,2010(7).

与完全图有关的竞赛问题

宋宝莹

（天津师范大学数学科学学院09级研究生，300387）

中图分类号：O151.1 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)02-0005-05

（本讲适合高中）

组合数学是竞赛数学的一个组成部分，而图论中的相关初步知识又是组合数学中的组成部分. 由于图主要研究的是点与边之间关系，为此，在解决此类问题时，常常是通过类比的方法先将问题类比成图，其次将问题中的实体抽象成图中的顶点，再将它们之间的关系抽象成边，最后将所要研究的问题转化成研究相关图的性质. 本文主要介绍以完全图为背景的竞赛题的处理方法.

1 基础知识

1.1 基本概念

图 由一个点集 V 以及联结其中某些点对的线段集 E 组成的图形称为图，记为 $G(V,E)$，其中，V 中的点称为顶点，E 中的线段（可以是曲线）称为边，有 n 个顶点的图称为 n 阶图.

无向图 每一条边都是无向的图称为无向图.

简单图 无环和重边的无向图称为简单图.

完全图 任意一个顶点都与其他所有顶点联结的简单图称为完全图. 一个 n 阶完全图有 C_n^2 条边，记作 K_n.

竞赛图 有向完全图称为竞赛图，其中，每条边均有一个起点和一个终点. 对于图中的每一点 v，以 v 为起点的边的数目称为点 v 的出度，记为 $d^+(v)$；以 v 为终点的边的数目称为点 v 的入度，记为 $d^-(v)$.

显然，对于 n 阶竞赛图的每一个顶点 v 都有 $d^+(v)+d^-(v)=n-1$.

哈密顿路 沿着边恰好一次经过全部顶点的路径称为哈密顿路. 如果哈密顿路是封闭的，则称此路为哈密顿圈.

1.2 竞赛图的相关性质、定理

性质 设 $G(V,E)$ 是 n 阶竞赛图. 则

(1) $\sum\limits_{v\in V} d^+(v)=\sum\limits_{v\in V} d^-(v)$；

(2) $\sum\limits_{v\in V}[d^+(v)]^2=\sum\limits_{v\in V}[d^-(v)]^2$.

证明 (1) 由于每个顶点的出度及入度均为1，故

$$\sum_{v\in V} d^+(v)=\sum_{v\in V} d^-(v).$$

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}&\sum_{v\in V}[d^+(v)]^2-\sum_{v\in V}[d^-(v)]^2\\&=\sum_{v\in V}(d^+(v)+d^-(v))(d^+(v)-d^-(v))\\&=\sum_{v\in V}(n-1)(d^+(v)-d^-(v))\\&=(n-1)\sum_{v\in V}(d^+(v)-d^-(v))=0.\end{aligned}$$

定理 竞赛图中必存在哈密顿路.

证明 当 $n=2$ 时，二阶竞赛图只有一条弧，此图的本身即为一条哈密顿路.

设 n 阶竞赛图必含有哈密顿路. 考虑 $n+1$ 阶竞赛图 $G(V,E)$. 设 v_0 是其中一个顶点，去掉 v_0 以及所有与 v_0 有关联的弧（保留弧的另一端点），剩下部分是一个 n 阶竞赛图 G_1. 由归纳假设，此图必有哈密顿路，设其经过的顶点依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$. 此时有两种可能：

收稿日期：2010-10-10 修回日期：2010-11-20

(1)在 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中,至少有一点 v_i 使得 v_0 是弧 v_0v_i 的起点,取 i 是这种下标的最小者. 若 $i=1$,则 $v_0v_1\cdots v_n$ 是 G 的一条哈密顿路;若 $1<i\leqslant n$,由 i 的最小性知

$$v_1\to v_2\cdots\to v_{i-1}\to v_0\to v_i\to\cdots\to v_n$$

是哈密顿路.

(2)在 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中,不存在 v_i 使 v_0 是弧 v_0v_i 的起点,则 $v_1\to v_2\to\cdots\to v_n\to v_0$ 是 G 的一条哈密顿路.

2 完全图的应用

2.1 利用顶点与边之间的关系

例1 考虑有 n 个点的完全图. 对该完全图的点和边按照如下的方式染色:

(1)由同一点引出的两条边颜色不同;

(2)某一点的颜色与其所引出的边的颜色也不同.

对每一个固定的 n,求所需颜色数的最小值.[1]

(2007,意大利国家队选拔考试)

【分析】由于同一个顶点能引出 $n-1$ 条颜色互不相同的边,且该点又与这 $n-1$ 条边的颜色不同,从而,至少需要 n 种颜色.

解 最小值为 n.

设 n 个顶点分别为 $v_0,v_2,\cdots,v_{n-1}$,n 种颜色分别为 $C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$. 将边 v_iv_j 染上颜色 C_{i+j}($i+j$ 表示 i 与 j 取和后模 n 的余数),将点 v_i 染上颜色 C_{i+i}. 则这样的染色方案满足题意.

2.2 利用构造的方法构造出满足题意的图

对图中的顶点、边进行染色是解决图论问题常用的手段之一,这样将点、边进行了类的划分,方便在解题过程中的讨论.

拉姆赛定理是图论中关于完全图的最著名定理,即空间中的任意六个点,其中任意三个点不共线,对每两点进行红、蓝染色,则一定存在三个点,其所构成的三角形同色.

在定理的证明过程中,通过采用构造的方法得到了定理的结论,因而,构造法也是解决图论问题的一种手段.

例2 办公室里装有2 004部电话机,其中,任意两部电话机都用四种颜色之一的导线相连,已知四种颜色的导线都有. 试问:是否一定可以找到某几部电话机,在相互联结它们的导线中刚好有三种不同颜色?[2]

(2004,俄罗斯数学奥林匹克(九年级))

解 由于任意两部电话机相连,则可以构建一个完全图,它的顶点为电话机,边为导线.

考虑图中的这样的顶点的最小集合 N:在联结它们的边中包含所有的四种颜色,从 N 中任意去掉一个顶点(记作 A),在联结剩下顶点的边中四种颜色不会齐全. 若此时恰有三种颜色,则命题成立;否则,在去掉顶点 A 的同时至少去掉了两种颜色的边,考虑由顶点 A 连两条上述两种颜色的边 AB、AC(B、$C\in N\backslash\{A\}$). 显然,边 BC 一定不是这两种颜色,从而,顶点 A、B、C 为所求.

2.3 化具体为抽象建立完全图模型

例3 六个城市间有一个铁路网,使得任意两个城市之间均有直通的铁路. 而在星期天的时候,一些铁路将关闭起来以便修整. 现铁路部门规定:关闭若干段铁路之后,必须保证仍可通过铁路往返于任意两个城市之间(未必直达). 问:有多少种不同的铁路修整方式满足铁路部门的要求?[1]

(2007,英国数学奥林匹克)

【分析】问题等价于求解在由六个点和若干条边构成的图中,满足任意两点均连通的所有连接方式的种数.

解 $f(n)$ 表示 n 个点中任意两点均连通的所有连接方式的种数. 则

$f(1)=1,f(2)=1.$

对于三个点的情况,或者任意两点之间

均有连线，或者在三条连线中任选两条均可对任意两点连通，因此，$f(3)=4$.

由于 n 个顶点可有 C_n^2 条边，故总共有 $2^{C_n^2}$ 种不同连接方式. 此时，任意两顶点要么有边，要么没边. 选定 n 个顶点中的一个点 v，考虑包含 v 在内的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 个顶点构成的集合. 可从除去点 v 外的 $n-1$ 个点中任取 $i-1$ 个点，与 v 连通构成这 i 个顶点的集合，故有 C_{n-1}^{i-1} 种选取方式.

由 $f(i)$ 的定义知，对于选取的 $i-1$ 个顶点和顶点 v，共有 $f(i)$ 种方式使任意两点均连通. 对于余下的 $n-i$ 个点，又有 $2^{C_{n-i}^2}$ 种不同连接方式.

因此，$2^{C_n^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}f(i)2^{C_{n-i}^2}$.

由 $f(1)=1, f(2)=1, f(3)=4$，得

$f(4)=38, f(5)=728, f(6)=26\ 704$.

又由于在 26 704 种方式中，有 26 703 种方式关闭了若干段铁路，而 1 种是没有关闭任何一段铁路，故所求为 26 703.

例 4 某国有 1 001 个城市，每两个城市之间都有单向行驶的道路相连. 每个城市都刚好有 500 条出城的道路，也都刚好有 500 条入城的道路. 由该国分裂出一个独立的国家，它拥有 668 个城市. 证明：由该国的每个城市都可以到达它的其他任何一个城市，而无需驶出自己的边界. [2]

（2004，俄罗斯数学奥林匹克（十年级））

【分析】本题的背景主要是对竞赛图的性质进行考查.

由于 1 001 个城市中任何两个城市之间都有单向的道路相连，则可将这些城市看作是点，联结它们的单向道路看作是有向边，其中，对于任意点 v 有

$d^+(v)=d^-(v)=500$.

从而，1 001 个顶点构成了一个竞赛图.

证明 假设该独立国家的城市 X 不能通过国内的道路到达它的另一个城市 Y. 记由城市 X 可沿着国内道路到达的该国的所有城市的集合为 A；而把该国其余的城市的集合记作 B. 则两个集合中的所有道路都是由 B 指向 A.

记 A、B 的城市数目分别为 a、b. 则

$a+b=668$.

若 $a\geqslant b$. 则 $a\geqslant 334\geqslant b$.

由于每两个城市之间都有单向的道路相连，则 B 中存在一个城市 Z，使得由 Z 出发的至少 $\frac{1}{2}(b-1)$ 条道路通往 B 中的其他城市，a 条道路通往 A 中的城市. 从而，

$$d^+(Z)\geqslant a+\frac{1}{2}(b-1)=\frac{a+(a+b)-1}{2}$$

$$=\frac{a+667}{2}>500,$$

矛盾.

若 $b>a$，则 $b>334>a$，类似得到矛盾.

因此，由每个城市都可以到达其他任何一个城市，而无需驶出自己的边界.

例 5 在由 $n(n\geqslant 3)$ 名选手参加的一次体育比赛中，每两名选手都比赛过一次，而且没有出现平局，又每名选手都没有战胜过所有其他的选手. 证明：一定存在三名选手 A、B、C，使得他们之间战绩为 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

证明 将选手 A 胜选手 B，记作 $A\to B$，这样得到一个竞赛图.

由于没有人取得过全胜的战绩，则不妨假设 A 是获胜最多的一名选手. 故存在 $A\to B$，而在选手 A 所战胜的选手中必存在选手 C，且 $C\to B$，否则，选手 B 所战胜的人数比选手 A 要多，与选手 A 是获胜最多的选手矛盾.

从而，一定存在选手 A、B、C，使得他们之间战绩为 A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A.

例 6 在一次有 $2n+1$ 个队参加的比赛中，每个队都与其他的队进行了一场比赛，且每场比赛必有一个队胜出. 若 A 胜 B，B 胜

C,C 胜 A,则称三个队组成的集合$\{A,B,C\}$为"循环的".求循环的集合的个数的最大值与最小值.[1]

(2007,意大利国家队选拔考试)

解 最大值为$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,最小值为0.

由于任意两个队都需要比赛一场,则比赛的总数为 C_{2n+1}^2.

为了得到循环的个数的最小值,令每个队胜的场数分别为 $0,1,\cdots,2n$. 在这种情况下,不存在循环的集合,即最小值为0.

在一个非循环的三个队组成的集合中,必存在一个队战胜了其他两个队. 因此,$T_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$队共胜了 w_i场比赛.

于是,包含 T_i的非循环集合的个数为 $C_{w_i}^2$(当 $w_i=0$ 或 1 时,规定 $C_{w_i}^2=0$).

从而,所有非循环的集合数为$\sum\limits_{i=1}^{2n+1} C_{w_i}^2$.

$$
\begin{aligned}
&\text{而}\sum_{i=1}^{2n+1} C_{w_i}^2\\
&\geqslant\frac{1}{2(2n+1)}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} w_i\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} w_i\\
&=\frac{n(n-1)(2n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

因此,循环的集合的个数至多为

$$C_{2n+1}^3-\frac{n(n-1)(2n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

当且仅当 $w_i(i=1,2,\cdots,2n+1)$相等时,上式等号成立,取到最大值. 此时,$w_i=n$.

例7 某届象棋比赛共有 64 名选手参赛,每两名选手比赛一场(允许平局). 当全部比赛结束,发现至少有两场比赛是平局,且对于所有以平局结束的比赛双方,剩余的 62 名选手都至少战胜过这两名选手之一. 证明:可将所有的选手排成一列,使每名选手都战胜过他后面的那名选手.[3]

(2008—2009,斯洛文尼亚国家队选拔考试)

证明 定义选手 $A_1,A_2,\cdots,A_k$的一个排列为"递增序列",如果选手 $A_i(i=1,2,\cdots,k-1)$均负于 A_{i+1},即 $A_{i+1}\to A_i$,记 n 为递增序列的长度.

若 $n=64$,则证毕;否则,假设 $n<64$.

对于选手 B,B 不在 $A_n\to A_{n-1}\to\cdots\to A_2\to A_1$中,则选手 $A_1\to B$.

一方面,若 $A_1\to B$,则此递增序列的长度为 $n+1$,矛盾.

另一方面,假设 $B\to A_1$,由于 $A_2\to A_1$,若 $A_2\to B$,则 $A_n\to A_{n-1}\to\cdots\to A_2\to B\to A_1$ 组成长度为 $n+1$ 的递增序列,矛盾. 故 $B\to A_2$. 同理,$B\to A_i(i=3,4,\cdots,n)$. 于是,$B\to A_n\to A_{n-1}\to\cdots\to A_2\to A_1$组成长度为 $n+1$ 的递增序列,矛盾.

从而,$B=A_1$.

由于选手 A_1至多与一人战平,则 $n=63$.

若 $B\to A_2$,则由上述讨论知 $B\to A_i(i=3,4,\cdots,63)$,而 $B\to A_{63}\to\cdots\to A_2\to A_1$是长度为 64 的递增序列,矛盾.

又由于 $B=A_1$,故 $A_2\to B$.

同理,$A_i\to B(i=3,4,\cdots,n)$.

但 $A_i\to A_j$ ($i\neq j$, i、$j>2$),且 $A_i\to B$,$A_j\to B$,则递增序列的长度小于 63,矛盾.

故 $n=64$.

【说明】本题是对定理的一个应用,由此题可将定理表述成:

在一次循环比赛中,每两名选手比赛一局且不出现平局,总能使选手按下面的排列顺序 $P_1,P_2,\cdots,P_n$,使得 P_1胜 P_2,P_2胜 P_3,……P_{n-1}胜 P_n.

如果存在每名选手必胜他后面的所有选手,则称这样的图为"可传递竞赛图". 此时,定理加强为:

可传递竞赛图中存在一个有向的哈密顿圈.

也就是,排列 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 每个人都是

第一名.

总之,掌握好各类图的性质,有利于解决竞赛题中的一些关系问题,解决图的核心就是处理好点与边之间的关系,而如何将问题中的实体抽象为点、边,则需要解题者在熟练运用图的性质的能力基础上,对问题进行灵活的分析,从而使解决问题变得游刃有余.

练 习 题

1. 甲、乙是两家航空公司,已知 A、B、C、D、E、F 六个城市中每两个城市间有且只有甲、乙两条航空公司的航线之一. 证明:存在四个城市,它们之间可用同一航空公司的航线连成一个圈. [4]

【注】这里的"圈"表示对于 P、Q、R、S 有线路 $P-Q-R-S-P$.

(2007,爱尔兰竞赛题)

提示:见《中等数学》2008 年增刊,第 182 页.

2. 在一个图中,已知每点的出度不超过 6. 证明:可将它的顶点各染上 13 种颜色中的一种,使得同色的顶点之间没有边连接. [5]

提示:考虑 n 阶竞赛图.

由于 $\sum\limits_{v\in V} d^+(v)=\sum\limits_{v\in V} d^-(v)$,且所有的 $d^+(v)\leqslant 6$,从而,$\sum\limits_{v\in V} d^-(v)\leqslant 6n$.

故必有一点 A 的入度 $d^-(A)\leqslant\frac{6n}{n}=6$.

去掉 A 及以 A 为顶点的边,对剩下的图进行数学归纳,将它的顶点各染上 13 种颜色中的一种,使得同色的点之间无边相连.

又因为 $d^+(A)+d^-(A)\leqslant 6+6=12$,所以,可将 A 染色,使得 A 的颜色与相连的至多 12 个点均不同色.

【说明】若图 $G=(V,E)$ 与 $G'=(V',E')$ 有 $V'\subseteq V$,$E'\subseteq E$,则称 G' 是 G 的子图.

3. 某次体育比赛,每两名选手都进行一场胜负比赛,通过比赛确定优秀选手 A. 优秀选手 A 选择条件是,对于其他任何选手 B,或者 A 胜 B,或者存在选手 C,使得 C 胜 B,A 胜 C. 如果按上述规则确定的优秀选手只有一名,求证:这名选手战胜过其他的选手.

提示:一方面,证明一定存在优秀选手.

设获胜最多的选手为 A. 若 A 不是优秀选手,则一定存在选手 B,B 胜 A,而且选手 B 战胜过所有被选手 A 战胜了的选手. 从而,选手 B 获胜的场数多于选手 A,矛盾. 故这样的优秀选手一定存在.

另一方面,证明优秀选手有且只有一名.

假设 A 是唯一的优秀选手. 若 A 没有战胜所有的其他选手,设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是所有战胜 A 的选手的集合,将 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之间的所有比赛视为一次比赛. 则在此范围中一定存在优秀选手,不妨记为 B,从而,B 胜 A,A 胜了除 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之外的其他所有选手. 所以,B 也是一名优秀选手,与 A 的唯一性矛盾. 故 A 战胜了其他所有选手.

4. 在 100 种昆虫中,每两种之中有一种能消灭另一种. 证明:能将这 100 种昆虫排成一列,使得每一种昆虫能消灭紧挨在它后面的那种昆虫. [5]

提示:作一个图 G,G 的每个点 v_i 表示一种昆虫. 若昆虫 v_i 可以消灭昆虫 v_j,则将 v_i、v_j 连成一条有向边,这样得到了一个竞赛图. 于是,问题转化为证明结论竞赛图中必存在哈密顿路. 证明过程仿照定理的证明.

参考文献:

[1] 李 涛 译. 2007 意大利国家队选拔考试[J]. 中等数学,2008(增刊).

[2] 苏 淳 译. 第 30 届俄罗斯数学奥林匹克[J]. 中等数学,2005(1).

[3] 宋宝莹 译. 2008—2009 斯洛文尼亚国家队选拔考试[J]. 中等数学,2010(增刊).

[4] 李 涛 译. 第 20 届爱尔兰数学奥林匹克[J]. 中等数学,2008(增刊).

[5] 单 墫. 数学竞赛研究教程(第三版)[M]. 南京:南京教育出版社,2009,2.

●从高考到竞赛●

高考与竞赛中的二次曲线的极线问题

李庆胜
(山东省实验中学,250001)

中图分类号: O182.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)02-0010-05

近年来,高考及竞赛屡屡涉及二次曲线的极线问题.由于新课程标准中并未涉及到极线的有关概念,使得对此类问题在诸多资料中的讨论也常常限于就题论题.为此,本文将作一般的讨论.

1 二次曲线的极线的一种轨迹定义和极线方程

例1 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$,且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 交于两不同点 A、B 时,在线段 AB 上取点 Q,满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$.证明:点 Q 总在某定直线上.

(2008,普通高等学校招生全国统一考试安徽卷(理科))

例1的一般化为:

定义1(调和点列) 共线点 A、B、C、D 满足条件 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$,则称 A、B、C、D 为调和点列,或称 C、D(D、C)调和分割线段 AB(BA).

例1还可一般化为以下命题.

命题1 非退化二次曲线 G 的方程为

$F(x,y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2+ax+by+c=0$,

点 $P(x_0,y_0)$ 不在曲线 G 上,且不是曲线 G 的中心,过 P 的动直线与曲线 G 交于点 R、Q,M 是直线 RQ 上一点,使得 M、P 调和分割线段 RQ.则点 M 必在定直线 l 上,且 l 的方程为

$$\begin{aligned}&F^*_{(x_0,y_0)}(x,y)\\&\equiv Ax_0x+\frac{B}{2}(y_0x+x_0y)+Cy_0y+\\&\quad\frac{a}{2}(x+x_0)+\frac{b}{2}(y+y_0)+c\\&=0.\end{aligned}$$

定义2 命题1中的定直线 l 称为点 P 关于曲线 G 的极线,点 P 称为直线 l 关于曲线 G 的极点.

推论1 若点 X 在 P 关于二次曲线 G 的极线上,则点 P 也在 X 关于曲线 G 的极线上.

X、P 称为关于曲线 G 的共轭极点.

推论2 非退化二次曲线 G 的准线 l 上的任一点的极线过曲线 G 的焦点 F.焦点 F 的极线是准线.

推论3 F 为非退化二次曲线 G 的对称轴 l 上的一点(不是曲线 G 的中心),则 F 关于曲线 G 的极线是 l 的一条垂线.

推论4 过非退化二次曲线 G 的焦点 F 的直线的极点在曲线 G 的准线上.

推论5 同一直线的各点关于非退化二次曲线的极线共点或平行.

例2 F 是非退化二次曲线 G 的焦点.

(1)P 为曲线 G 外一点,P 的极线 l 与曲线 G 交于点 T_1、T_2,T_1T_2 与曲线 G 的准线 l_1 交于点 T,则 PF 平分 $\angle T_1FT_2$,$TF\perp PF$.

(2)P 为曲线 G 的准线 l_1 上的一点,过 P 任作直线与曲线 G 交于点 A、B,则

(i)PF 平分 $\angle AFB$ 的邻补角;

收稿日期:2010-03-01

(ii) P 的极线 l 平分 $\angle AFB$，且 $PF\perp l$；

(iii) 设 PA 与 PF 成的角为 α，PA 与准线 l_1 成的角为 β，FB 与 PF 成的角为 θ，曲线 G 的离心率为 e，则

$$\cot^2\theta=e^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}-1.$$

证明 (1) 设点 T_1、T_2 在准线 l_1 上的射影为 H_1、H_2，PF 与 T_1T_2 交于点 S.

(i) 若 $T_1T_2 /\!/ l_1$，则 $\triangle FT_1T_2$ 为等腰三角形，且 FS 为底边 T_1T_2 上的高线. 故 FS 平分 $\angle T_1FT_2$.

(ii) 如图 1，若 T_1T_2 与 l_1 交于点 T，由已知 T_1T_2 是 P 的极线，即点 T 在 P 的极线上，故点 P 也在 T 的极线上.

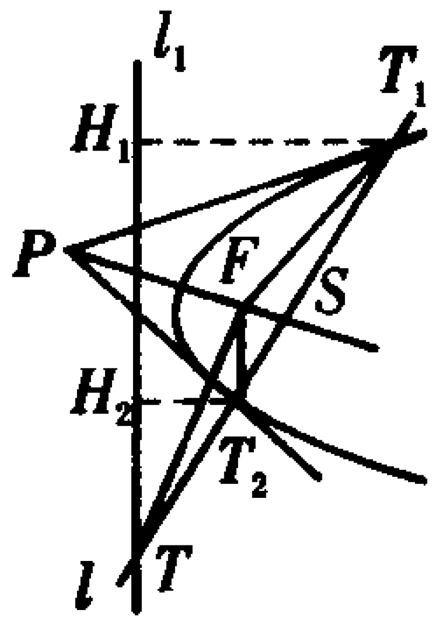

图 1

而准线 l_1 是焦点 F 的极线，即点 T 在 F 的极线上. 于是，点 F 也在 T 的极线上.

故 PF 就是 T 的极线.

由极线的定义知

$$\frac{T_1S}{T_2S}=\frac{T_1T}{T_2T}=\frac{T_1H_1}{T_2H_2}.$$

由二次曲线的轨迹定义知

$$\frac{T_1H_1}{T_2H_2}=\frac{T_1F}{T_2F}\Rightarrow\frac{T_1S}{T_2S}=\frac{T_1F}{T_2F}=\frac{T_1T}{T_2T}.$$

由三角形内、外角平分线定理的逆定理知，PF 平分 $\angle T_1FT_2$，TF 平分 $\angle T_1FT_2$ 的邻补角，故 $TF\perp PF$.

(2) 如图 2，设点 A、B 在准线 l_1 上的射影为 A_1、B_1.

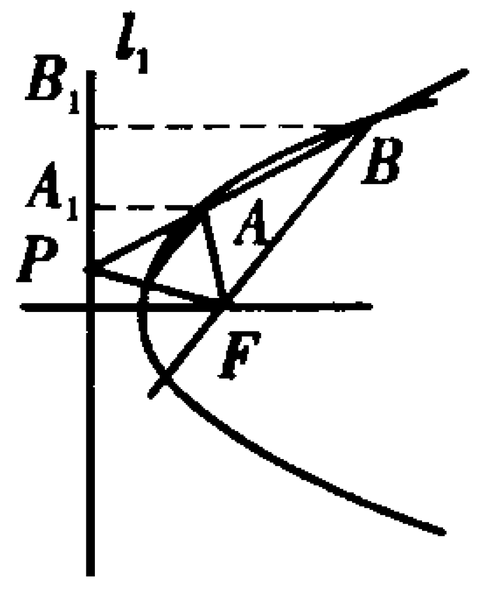

图 2

(i) 由二次曲线的轨迹定义知

$$\frac{FA}{FB}=\frac{A_1A}{B_1B}=\frac{PA}{PB}.$$

由三角形外角平分线定理的逆定理知，FP 平分 $\angle AFB$ 的邻 补角.

(ii) 如图 3，由于准线上的点的极线都过焦点 F，故 l 过 F. 设 l 与 AB 交于点 R、与准线交于点 T.

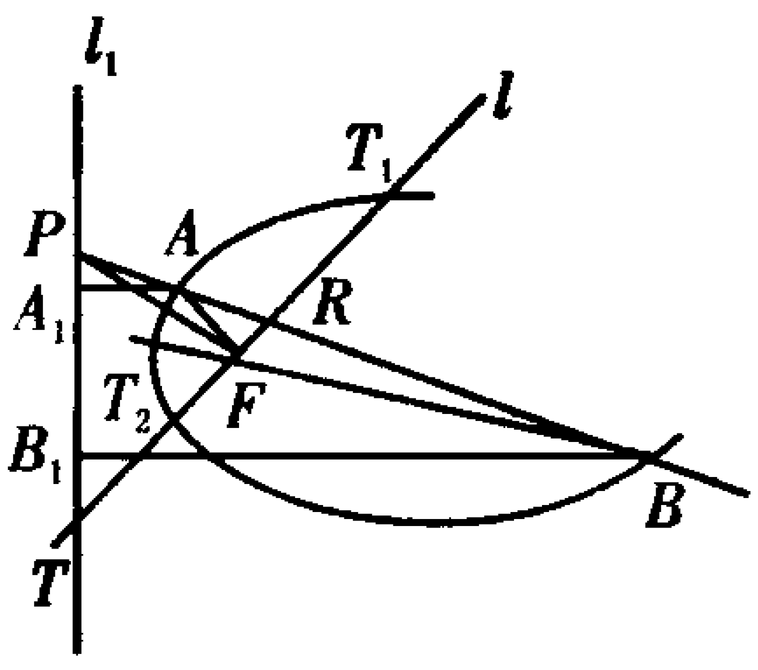

图 3

由极线的定义知

$$\frac{RA}{RB}=\frac{PA}{PB}=\frac{A_1A}{B_1B}.$$

又由二次曲线的轨迹定义知

$$\frac{A_1A}{B_1B}=\frac{FA}{FB}\Rightarrow\frac{RA}{RB}=\frac{FA}{FB}.$$

由三角形内角平分线定理的逆定理知，FR 平分 $\angle AFB$.

结合 (i)，故 $PF\perp FR$，即 $PF\perp l$.

(iii) 如图 4，设点 A、B 在 PF 上的射影分别为 A_2、B_2. 则

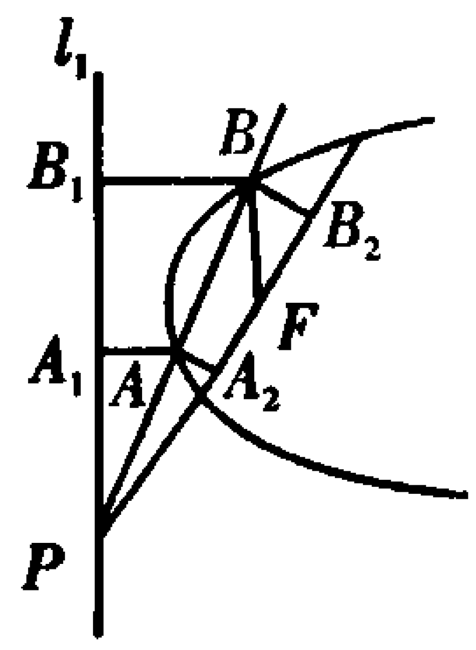

图 4

$$BB_2=PB_2\tan\alpha, \quad ①$$

$$BB_2^2=FB^2-FB_2^2, \quad ②$$

$$FB=eBB_1, \quad ③$$

$$PB=\frac{BB_1}{\sin\beta}=\frac{PB_2}{\cos\alpha}. \quad ④$$

由式①、②、③得

$$e^2BB_1^2-FB_2^2=PB_2^2\tan^2\alpha.$$

将式④代入上式得

$$e^2PB_2^2\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}-FB_2^2=PB_2^2\tan^2\alpha,$$

即 $$FB_2^2=\left(e^2\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}-\tan^2\alpha\right)PB_2^2.$$

故 $$\cot^2\theta=\frac{FB_2^2}{BB_2^2}=\frac{FB_2^2}{PB_2^2\tan^2\alpha}=e^2\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}-1.$$

命题 2 如图 5，在完全四边形 $ABCDEF$ 中，对角线 AD 与 BF 交于点 H. 若四边形 $ABDF$ 内接于非退化二次曲线 G，则

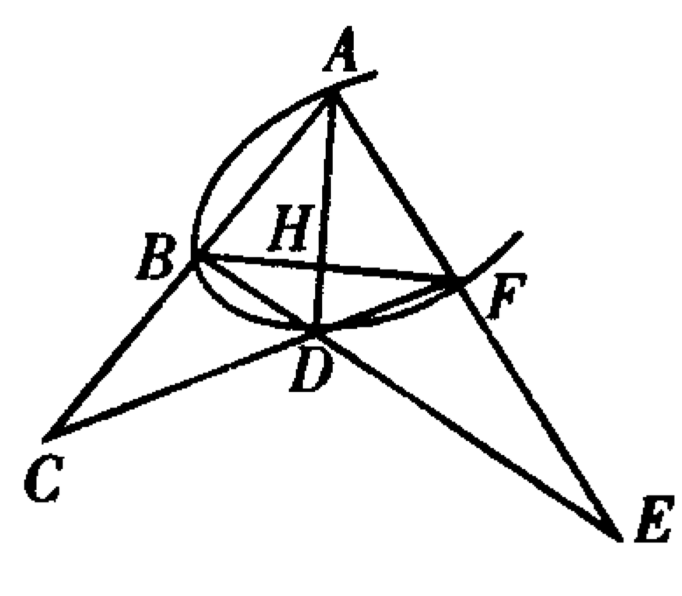

图 5

(1) C 和 E 互为曲线 G 的共轭极点；

(2) H 和 C、H 和 E 互为曲线 G 的共轭极点.

推论1 条件同命题2，则点 C 的极线是 EH，点 E 的极线是 CH，点 H 的极线是 CE.

推论2（三割线定理） 如图6，过点 P 的两条直线分别与非退化二次曲线 G 交于点 A、B 和 C、D，AD 与 BC 交于点 Q，直线 PQ 交曲线 G 于点 E、F. 则 P、Q 调和分割 EF.

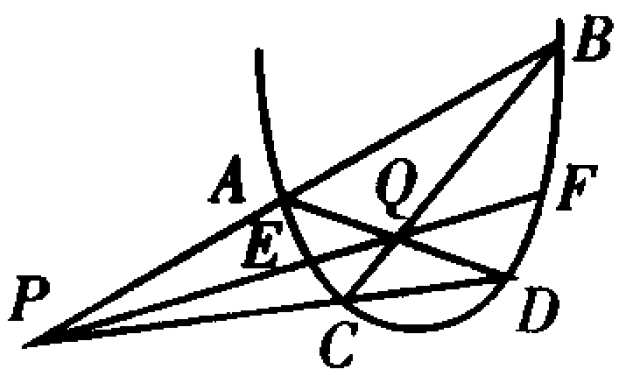

图6

推论3 条件同推论2，若 $AC/\!/BD$，则

(1)点 P 的极线 l_1 是过点 Q 的 $AC(BD)$ 的平行线；

(2)点 Q 的极线 l_2 是过点 P 的 $AC(BD)$ 的平行线.

推论4 条件同推论2，若 Q 是曲线 G 的焦点，则

(1)若 $AC/\!/BD$，则 P 恰为曲线 G 的准线与对称轴的交点；

(2)若 AC 与 BD 交于点 R，则 PR 为曲线 G 的准线且 $PQ\perp QR$，PQ、RQ 分别平分 AD、BC 所成的一对对顶角.

例3 如图7，设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，满足 $\angle CAD=\angle CBA$. $\odot O$ 经过 B、D，并分别与线段 AB、AD 交于点 E、F，BF 与 DE 交于点 G，M 是 AG 的中点. 求证：$CM\perp AO$.[6]

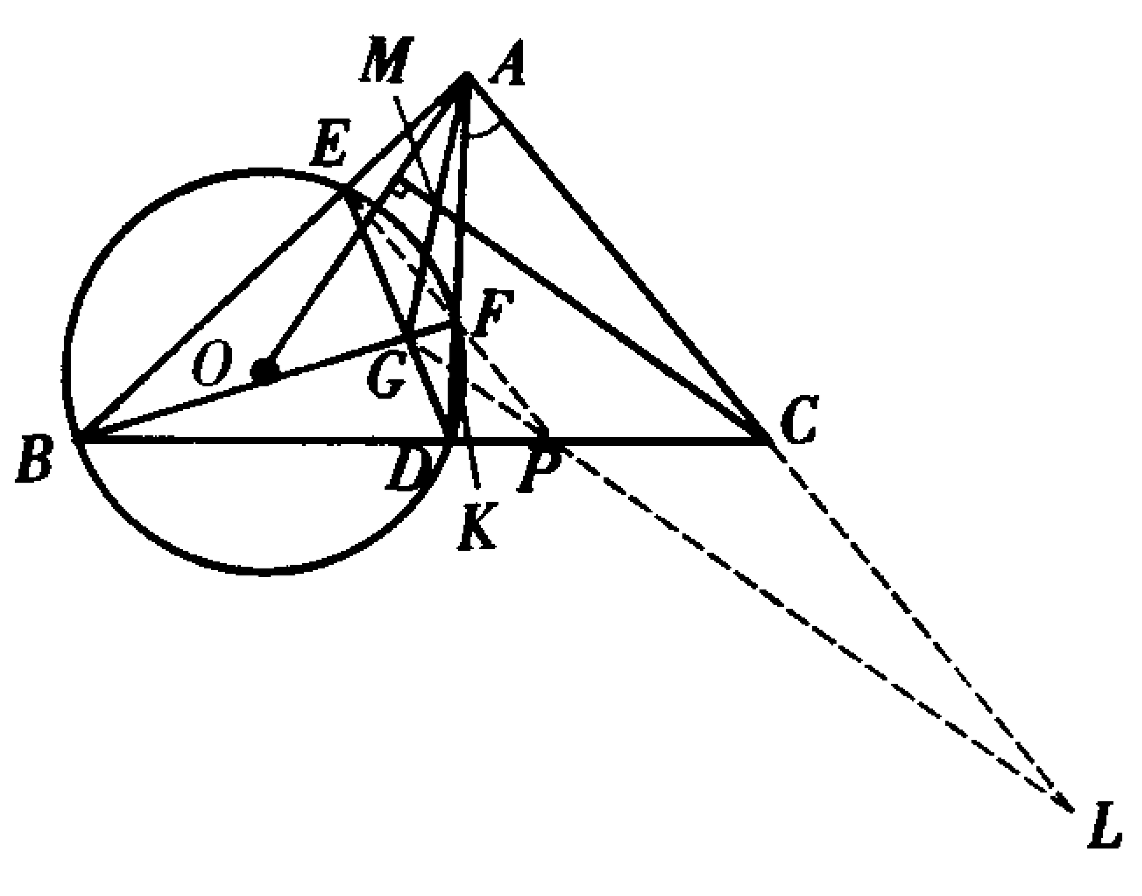

图7

（2009，IMO中国国家队选拔考试）

【分析】联结 EF 并延长交 BC 于点 P，联结 GP 与 AD 交于点 K，并与 AC 的延长线交于点 L.

考虑完全四边形 $BDPFAE$ 及 $\odot O$.

由命题2可证得直线 GP 是点 A 的极线，即点 A 对 $\odot O$ 的切点弦所在直线，故

$AO\perp GP$.

由 B、D、F、E 四点共圆知

$\angle EFA=\angle EBD$.

又 $\angle CAD=\angle CBA$，故

$\angle CAD=\angle EFA\Rightarrow$ 直线 $EFP/\!/$ 直线 ACL

$\Rightarrow \dfrac{CP}{PD}=\dfrac{AF}{FD}$.

对直线 KPL 和 $\triangle ADC$，应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DK}{KA}=1\Rightarrow\frac{AL}{LC}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DK}{KA}=1. \qquad ①$$

由命题2知，GP 是点 A 关于 $\odot O$ 的极线，则 $\dfrac{AF}{FK}=\dfrac{AD}{DK}$.

变换得 $2AF\cdot DK=FD\cdot KA$.

代入式①得 $\dfrac{AL}{LC}=2$.

由 $AG=2AM$

$\Rightarrow MC$ 是 $\triangle AGL$ 的中位线

$\Rightarrow MC/\!/GL\Rightarrow CM\perp AO$.

2 切点弦和极线的另一轨迹定义

定义3（切点弦） M 是非退化二次曲线 G 外一点，过 M 作曲线 G 的两条切线，切点分别为 T_1、T_2，则弦 T_1T_2 称为 M 对曲线 G 的切点弦.

命题3 非退化二次曲线 G：

$F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+ax+by+c=0$.

(1)点 $M(x_0,y_0)$ 在曲线 G 外（当曲线 G 为双曲线时，点 M 不在曲线 G 的渐近线上），由 M 引曲线 G 的两条切线，切点分别为 T_1、T_2，则 $l_{T_1T_2}:F^*_{(x_0,y_0)}(x,y)=0$，即 M 的切点弦方程.

(2)过点 $M(x_0,y_0)$（M 非曲线 G 的中心，当曲线 G 为双曲线时，点 M 不在曲线 G 的渐近线上）任作直线与曲线 G 交于不同两

点 T_1、T_2，曲线 G 在 T_1、T_2 处的切线的交点 P 必在同一直线上，这直线的方程为

$$F^*_{(x_0,y_0)}(x,y)=0.$$

【说明】点 M 对非退化二次曲线 G 的切点弦所在直线即 M 关于曲线 G 的极线.

过点 M 作非退化二次曲线 G 的割线，G 在两交点处的切线的交点所在直线即为点 M 关于曲线 G 的极线.

推论 (1)非退化二次曲线 G 外一点 P 对 G 的切点弦为 T_1T_2，F 是 G 的焦点.

(i) FP 平分 $\angle T_1FT_2$；

(ii)若 T_1T_2 与曲线 G 的准线 l_1 交于点 T，则 $TF\perp PF$；

(iii)若点 P 在曲线 G 的准线上，则直线 T_1T_2 过焦点 F，且 $T_1T_2\perp PF$；过 P 任作直线与曲线 G 交于点 A、B，则 T_1T_2 平分 $\angle AFB$.

(2) T_1T_2 是曲线 G 的过焦点 F 的弦，则以 T_1、T_2 为切点的两条切线、过 F 的 T_1T_2 的垂线、曲线 G 的准线四线共点.

(3) M 为非退化二次曲线 G 内一点，直线 l 是 M 的极线，则过 l 上任一点 Q 的切点弦所在直线必过 M.

(4)过非退化二次曲线 G 外一点 P 作两直线与曲线 G 分别交于点 A、B 和 C、D，AD 与 BC 交于曲线 G 内一点 Q.

若 $AC//BD$，过 Q 作曲线 G 的平行于 AC 的弦 MN；若 AC 与 BD 交于点 R，设 RQ 与曲线 G 交于点 M、N.

则 PM、PN 是曲线 G 的以 M、N 为切点的切线.

例 4 有心二次曲线 G 的对称轴与曲线 G 交于点 B、C，$\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别与曲线 G 交于点 E、F，以 E、F 为切点的两切线交于点 D. 求证：$AD\perp BC$.

证明 以曲线 G 的中心为坐标原点、BC 为 x 轴建立直角坐标系.

设 $B(-1,0)$、$C(1,0)$. 则曲线 G 的方程为

$$x^2+By^2=1\ (B\neq 0). \quad ①$$

设 $l_{AB}: x=t_1y-1$， ②

$l_{AC}: x=t_2y+1$. ③

② $\times t_2-$ ③ $\times t_1$ 得 $x_A=\dfrac{t_1+t_2}{t_1-t_2}$.

设 $D(x_0,y_0)$. 则 $l_{EF}: x_0x+By_0y=1$.

故"AB 与 AC"可看作过曲线 G 和"BC 与 EF"的四个交点的二次曲线，其方程设为

$$x^2+By^2-1+\lambda(x_0x+By_0y-1)y=0.$$

又"AB 与 AC"的方程为

$$(x-t_1y+1)(x-t_2y-1)=0,$$

故存在 μ，使得

$$x^2+By^2-1+\lambda(x_0xy+By_0y^2-y)$$
$$\equiv\mu[x^2-(t_1+t_2)xy+t_1t_2y^2+(t_1-t_2)y-1].$$

比较 x^2、xy、y 的系数和常数项得

$$\begin{cases}\mu=1, & ④\\ -\mu(t_1+t_2)=\lambda x_0, & ⑤\\ \mu(t_1-t_2)=-\lambda. & ⑥\end{cases}$$

由式④、⑤得 $x_0=-\dfrac{t_1+t_2}{\lambda}$.

故 $AD\perp BC\Leftrightarrow x_A=x_0$

$$\Leftrightarrow \frac{t_1+t_2}{t_1-t_2}=-\frac{t_1+t_2}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=t_2-t_1. \quad ⑦$$

由式④、⑥知式⑦成立.

故 $AD\perp BC$.

练 习 题

1. F 是非退化二次曲线 G 的对称轴上的一点，H 是 F 关于曲线 G 的极线 l 与对称轴的交点(即 F、H 为曲线 G 的对称轴上的一对共轭极点)，AB 是曲线 G 截过 F 的直线所得的弦. 证明：FH 与 HA、HB 成等角.

提示：若 AB 与 l 相交，设交点为 K.

由极线定义知 $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AF}{FB}$.

又 $\angle FGK=90°$，由阿波罗尼斯圆定理得 $\dfrac{AH}{HB}=\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AF}{FB}$.

故 HF 和 HK 分别平分 $\angle AHB$ 和它的邻补角.

结论成立.

若 $AB//l$，则 HF 垂直平分 AB，FH 与

HA、HB 成等角.

2. F 为非退化二次曲线 G 的焦点，T_1T_2 为过焦点 F 的弦. 证明：

(1)过 F 作 T_1T_2 的垂线交曲线 G 的准线于点 P，则 T_1T_2 是 P 的极线，且 PT_1、PT_2 是曲线 G 的切线.

(2)A、B 为曲线 G 上的两点，若 P 的极线平分 $\angle AFB$，则 A、B、P 三点共线.

提示：用同一法证明.

3. P 是非退化二次曲线 G 内且在 G 的对称轴上的一定点，直线 l 为 P 关于曲线 G 的极线，过 P 作曲线 G 的弦 BF、AD，AF 与 l 交于点 E，AB 与 l 交于点 C. 证明：

(1)C、D、F 和 B、D、E 分别三点共线；

(2)设曲线 G 的对称轴与 l 交于点 O，则 $OC\cdot OE$ 为定值.

提示：(1)如图 8，设 FD 与 AB 交于点 C'，BD 与 AF 交于点 E'，AP 与 $C'E'$ 交于点 P'.

由命题 2 知，$C'E'$ 为点 P 关于曲线 G 的极线. 则 C' 为 AB 与 P 的极线的交点. 因此，点 C' 与 C 重合.

同理，点 E' 与 E 重合.

故 C、D、F 和 B、D、E 分别三点共线.

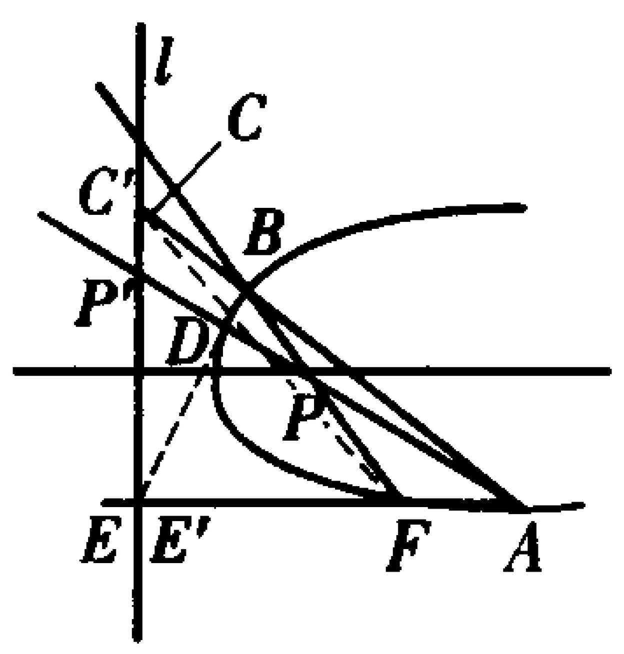

图 8

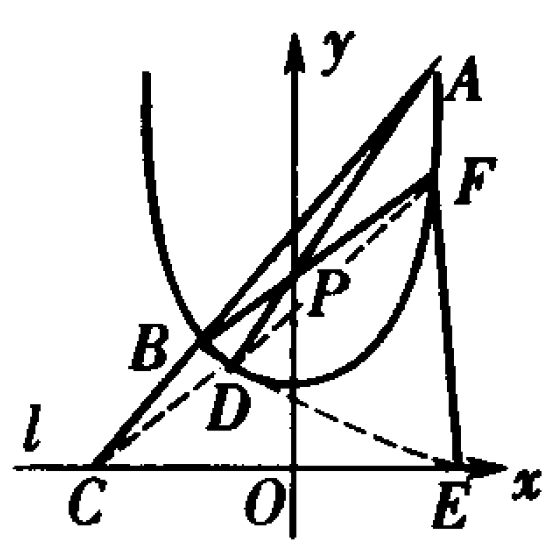

图 9

(2)如图 9，以 O 为坐标原点、射线 OP 为 y 轴正半轴建立直角坐标系.

由曲线 G 关于 OP 对称，故可设曲线 G 的方程为

$$Ax^2+Cy^2+by+c=0\ (A\neq0,AC>0).$$

由(1)知，B、D、E 和 C、D、F 分别三点共线.

由命题 2 知点 E 在 C 的极线上.

设 $C(p,0)$、$E(q,0)$.

则 C 关于曲线 G 的极线方程为

$$Apx+\frac{b}{2}y+c=0.$$

故 $Apq+c=0$，即 $pq=-\frac{c}{A}$.

因此，$OC\cdot OE=|pq|=\left|\frac{c}{A}\right|=\frac{c}{A}$.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线与抛物线 $y=x^2$ 交于点 A、B，一垂直于 x 轴的直线分别与线段 AB 和直线 l：$y=-c$ 交于点 P、Q.

(1)略.

(2)若 P 为线段 AB 的中点，求证：QA 为此抛物线的切线.

(3)试问：(2)的逆命题是否成立？说明理由.

(2007，普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷))

提示：l 是 P 的极线. 易证：以 A、B 为切点的切线的交点 Q_1 在 l 上，且 $Q_1P\perp x$ 轴，故 Q_1 即 Q. 于是，(2)、(3)同时得解.

5. 已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A、B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$，过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M. 证明：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值.

(2006，普通高等学校招生全国卷(Ⅱ)理科)

提示：动弦 AB 是 M 的切点弦，AB 恒过焦点 F，故点 M 恒在焦点 F 的极线，即准线 $y=-1$ 上.

同推论 1 可得 $MF\perp AB$，即 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

参考文献：

[1] 曾 容. 初等数学能力训练[M]. 济南：山东科学技术出版社，1987.

[2] 杨 波. 椭圆两弦端点处切线的两个有趣性质[J]. 中学数学月刊，2007(12).

[3] 李青林 周 园. 抛物线两弦端点处切线的有趣性质[J]. 数学通讯，2008(23).

[4] 林新建. 一道第 37 届 IMO 选拔赛试题的推广[J]. 中学数学月刊，2009(2).

[5] 林新建. 一道数学征展新题的探究[J]. 中学数学，2009(12).

[6] 2009 年 IMO 中国国家队选拔考试[J]. 中等数学，2009(7).

命题与解题

轮换对称式最值求法

甘超一
（湖北省麻城市一中，438300）

中图分类号：O122.5　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)02－0015－03

近几年来，关于多元轮换对称和式 S 的最值问题，多以证明形式出现在数学竞赛题目中，即证 $S\geqslant A$（或 $S\leqslant A$）.

因为求法能代替证明（通过数学方法求出 S 最大值为 A，也即证明了 $S\leqslant A$ 成立），所以，S 的最值求法应是一个更深刻的问题.

反之，因为证明不等式 $S\leqslant A$，是先提供常数 A，它可以加入到论证、推理和运算过程之中，而求最值并无此条件，所以，证明不能代替求法.

鉴于此，寻找 S 的最值求法，远比寻找证明的方法和技巧重要.

因为求一元函数的最值对于解题者来讲有较多和熟悉的方法，尤其有较为有力的导数方法，所以，本文提供三元轮换对称式 S（最基本和最常见的）的最值求法，基本思想是将三变元转化为一个变元函数来处理.

先假定三变元变化时，S 值变化具有连续性（它是研究单调性和求导所必须的）.

下面通过例题介绍.

例 1　设非负实数 $a、b、c$ 满足 $a+b+c=1$. 求 $S=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$的最值.

解　由对称性可设

$a\leqslant b\leqslant c(0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}\leqslant c\leqslant 1)$.

先任意给定 $a=a_0$. 则 $c+b=1-a_0$.

设 $x=c-b\geqslant 0$. 则

$$c=\frac{1-a_0+x}{2},b=\frac{1-a_0-x}{2}.$$

代入 S 得

$$S=\frac{1}{1+a_0}+\frac{1}{1+\frac{1-a_0+x}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1-a_0-x}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+a_0}+\frac{4(3-a_0)}{(3-a_0)^2-x^2}. \qquad ①$$

将 a_0 视为常数，则 S 为 x 的一元函数.

由式①知 S 随 x 的增大而增大. 故 S 是 x 的增函数.

由 $x=c-b\geqslant 0$，知当 $x=0(b=c)$ 时，S 最小；当 x 最大时，S 最大.

先求最小值.

对任意的 a_0，当 $x=0$ 时，$S(a_0)$ 均最小.

由式①得

$$S(a_0)=\frac{1}{1+a_0}+\frac{4}{3-a_0}=\frac{3a_0+7}{-a_0^2+2a_0+3}. \qquad ②$$

下面用判别式法求最值.

式②整理为

$Sa_0^2+(3-2S)a_0+7-3S=0$

$\Rightarrow\Delta=(3-2S)^2-4S(7-3S)\geqslant 0$

$\Rightarrow S\geqslant\frac{9}{4}(S\leqslant\frac{1}{4}$，舍去$)$

$\Rightarrow S_{\min}=\frac{9}{4}$(当 $a=\frac{1}{3},b=c=\frac{1}{3}$时取得).

再求 S 的最大值.

易知，S 的最大值应在 x 最大时取得.

对给定的 a_0，b 最小为 a_0（因 $b\geqslant a$），c 最大为 $1-2a_0$，此时，$x=c-b=1-3a_0$ 最大.

代入 S 得

$$S=\frac{1}{1+a_0}+\frac{1}{1+a_0}+\frac{1}{1+1-2a_0}$$

收稿日期：2010－03－11

$=\frac{2}{1+a_0}+\frac{1}{2-2a_0}$.

对 a_0 求导数得

$$S'(a_0)=\frac{-2\times1}{(1+a_0)^2}+\frac{(-1)(-2)}{4(1-a_0)^2}$$
$$=\frac{-3a_0^2+10a_0-3}{2(1+a_0)^2(1-a_0)^2}$$
$$=\frac{(1-3a_0)(a_0-3)}{2(1+a_0)^2(1-a_0)^2}\leqslant0,$$

知 S 为关于 a_0 的减函数.

由 $0\leqslant a_0\leqslant\frac{1}{3}$，知当 $a_0=0$ 时，$S(a_0)$ 最大（此时，$b=0,c=1,x=c-b$ 最大）. 则

$$S_{\max}=\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

综上，$\frac{9}{4}\leqslant S\leqslant\frac{5}{2}$.

例 2　设非负实数 $a、b、c$ 满足 $a+b+c=1$. 求

$$S=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}$$

的最值.

解　设 $a\leqslant b\leqslant c$，任给定 $a_0\left(0\leqslant a_0\leqslant\frac{1}{3}\right)$.

则 $b+c=1-a_0$.

设 $x=c-b$. 则

$$c=\frac{1-a_0+x}{2},b=\frac{1-a_0-x}{2}.$$

代入 S 得

$$S=\sqrt{4a_0+1}+\sqrt{3-2a_0-2x}+\sqrt{3-2a_0+2x}.①$$

对 x 求导得

$$S'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{\sqrt{3-2a_0-2x}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3-2a_0+2x}}$$
$$=\frac{\sqrt{3-2a_0-2x}-\sqrt{3-2a_0+2x}}{\sqrt{3-2a_0-2x}\cdot\sqrt{3-2a_0+2x}}\leqslant0.$$

这表明，对给定的 a_0，S 为关于 x 的减函数.

故当 $x=0(b=c)$ 时，$S(a_0)$ 最大；

当 x 最大时，$S(a_0)$ 最小.

先求最大值（在 $x=0$ 时）.

由式①知

$$S(a_0)=\sqrt{4a_0+1}+2\sqrt{3-2a_0}.$$

对 a_0 求导得

$$S'(a_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{4a_0+1}}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{\sqrt{3-2a_0}}$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{3-2a_0}-\sqrt{4a_0+1}}{\sqrt{4a_0+1}\cdot\sqrt{3-2a_0}}$$
$$\geqslant0\left(3-2a_0\geqslant4a_0+1\Leftrightarrow a_0\leqslant\frac{1}{3}\right).$$

这表明，S 是关于 a_0 的增函数.

当 $a_0=\frac{1}{3}$ 时 $\left(b=c=\frac{1}{3}\right)$，

$$S_{\max}=\sqrt{4\times\frac{1}{3}+1}\times3=\sqrt{21}.$$

再求 S 的最小值.

易知，S 的最小值在 $x=c-b$ 最大时取得.

因为 $b\geqslant a_0$，所以，当 b 取最小为 a_0 时 $(c=1-2a_0)$，差 $x=c-b$ 最大. 此时，

$$S=\sqrt{4a_0+1}+\sqrt{4a_0+1}+\sqrt{4(1-2a_0)+1}$$
$$=2\sqrt{4a_0+1}+\sqrt{5-8a_0}.$$

对 a_0 求导得

$$S'(a_0)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{4a_0+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{\sqrt{5-8a_0}}$$
$$=4\left[\frac{1}{\sqrt{4a_0+1}}-\frac{1}{\sqrt{5-8a_0}}\right]$$
$$\geqslant0\left(4a_0+1\leqslant5-8a_0\Leftrightarrow a_0\leqslant\frac{1}{3}\right).$$

故 S 为关于 a_0 的增函数.

当 a_0 最小为 0 时（此时，$b=0,c=1$），

$$S_{\min}=\sqrt{4\times0+1}+\sqrt{4\times0+1}+\sqrt{4\times1+1}$$
$$=2+\sqrt{5}.$$

综上，$2+\sqrt{5}\leqslant S\leqslant\sqrt{21}$.

对竞赛中有些难度较大的证明题，解题者不妨用“求法”解.

例 3　设 $a、b、c$ 是正实数，且 $a+b+c=3$. 证明：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$ [1]

（2006，罗马尼亚国家集训队试题）

这是一道形式简单但解答极难的问题，

文[1]中给出了证明,但很艰深、很专业.下面用“求法”解答.

证明 记 $S=\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2$.

若能求得 S 最小值为 0,即可证明结论成立.

设 $a\leqslant b\leqslant c$,任给定 $c=c_0(1\leqslant c_0\leqslant 3)$.则 $b+a=3-c_0$.

设 $x=b-a\geqslant 0$.则

$$b=\frac{3-c_0+x}{2},a=\frac{3-c_0-x}{2}.$$

代入 S 得

$$S=\frac{4}{(3-c_0-x)^2}-\frac{(3-c_0-x)^2}{4}+\frac{4}{(3-c_0+x)^2}-\frac{(3-c_0+x)^2}{4}+\frac{1}{c_0^2}-c_0^2. \quad ①$$

对 x 求导得

$$S'(x)=\frac{-2\times4(-1)}{(3-c_0-x)^3}-\frac{1}{4}\times2(3-c_0-x)(-1)+4(-2)\frac{1}{(3-c_0+x)^3}-\frac{1}{4}\times2(3-c_0+x)$$

$$=\frac{8}{(3-c_0-x)^3}-\frac{8}{(3-c_0+x)^3}-x$$

$$=\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}-(b-a)$$

$$=(b-a)\frac{a^2+ab+b^2-a^3b^3}{a^3b^3}.$$

由 $c_0\geqslant 1$,知

$$a+b\leqslant 2\Rightarrow ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant 1.$$

故 $ab-a^3b^3\geqslant 0$,及 $b-a\geqslant 0$.

则 $S'(x)\geqslant 0$.

S 为关于 x 的增函数,即给定 c_0 后、S 最小值总在 $x=0\left(b=a=\frac{3-c_0}{2}\right)$时取得.

代入式①得

$$S=c_0^{-2}-c_0^2+8(3-c_0)^{-2}-\frac{1}{2}(3-c_0)^2.$$

再对 c_0 求导得

$$S'(c_0)=-2c_0^{-3}-2c_0+8(-2)(3-c_0)^{-3}(-1)-\frac{1}{2}\times2(3-c_0)(-1)$$

$$=2\left[\frac{1}{\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^3}-\frac{1}{c_0^3}\right]+3-3c_0$$

$$=(3c_0-3)\frac{c_0^2+c_0\cdot\frac{3-c_0}{2}+\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^2-c_0^3\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^3}{c_0^3\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^3}.$$

易证:$1-c_0^2\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^2\geqslant -2\left(\Leftrightarrow c_0\cdot\frac{3-c_0}{2}\leqslant\sqrt{3}\right.$.而 $c_0\cdot\frac{3-c_0}{2}=2\cdot\frac{c_0}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{c_0}{2}\right)\leqslant 2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{8}<\sqrt{3}$ 成立$\left.\right)$.

故 $S'(c_0)$

$$\geqslant(3c_0-3)\frac{c_0^2-2c_0\cdot\frac{3-c_0}{2}+\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^2}{c_0^3\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^3}$$

$$=(3c_0-3)\frac{\left(c_0-\frac{3-c_0}{2}\right)^2}{c_0^3\left(\frac{3-c_0}{2}\right)^3}\geqslant 0.$$

这表明,S 是关于 c_0 的增函数.

又 $1\leqslant c_0\leqslant 3$,当 $c_0=1$ 时$\left(b=a=\frac{3-1}{2}=1\right)$,

$$S_{\min}=\frac{1}{1^2}-1^2+\frac{1}{1^2}-1^2+\frac{1}{1^2}-1^2=0.$$

故 $S\geqslant 0$,即原式成立.

【说明】例 3 证法与前两例略有不同.在前两例中,$a\leqslant b\leqslant c$.先给定最小 $a=a_0$.而本例则先给定最大 $c=c_0$.其实例 1、例 2(条件均为 $a+b+c=s$ 型)先给定 c_0 同样可行,只是第二步需分 $\frac{1}{3}\leqslant c_0<\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}\leqslant c_0\leqslant 1$ 两种情况,略繁.

参考文献:

[1] 蔡玉书.一些不等式证明方法[J].中等数学,2007(7).

[2] 甘超一.多元对称式非常规最值探讨[J].中等数学,2009(7).

[3] 甘超一.多元对称式非常规最值探讨一文补遗[J].中等数学,2009(11).

应用一元三次方程韦达定理解题

臧殿高
（江苏省大丰高级中学，224100）

中图分类号：O122.2 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)02-0018-02

若关于 x 的一元三次方程

$$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$$

的三个根分别为 x_1、x_2、x_3，则

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

此结论概括了一元三次方程根与系数的关系，亦称为韦达定理.

一元三次方程韦达定理作为一元二次方程韦达定理的延伸，在中学数学竞赛中有着广泛的应用，在思维上具有一定的灵活性和深广度. 本文通过几个问题阐述其应用.

1 直接应用

这类问题在形式上就具有韦达定理的特征，很容易构造相应的一元三次方程来求解.

例1 已知 a、b、c 是三个实数，满足

$$a+b+c>0,ab+bc+ca>0,abc>0.$$

求证：$a>0,b>0,c>0$.

【分析】显然，a、b、c 是方程

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

的三个根.

因为方程的常数项 $-abc\neq0$，所以，$x=0$ 不是方程的根.

假设方程存在负实数根，即 $x<0$.

由题设得

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc<0,$$

矛盾. 故方程无负实数根.

从而，方程只有正实数根，即

$$a>0,b>0,c>0.$$

例2 已知长方体的体积为1，长、宽、高之和为 k，表面积为 $2k$. 求实数 k 的取值范围.

【分析】设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c. 则

$$abc=1,a+b+c=k,ab+bc+ca=k.$$

根据韦达定理得 a、b、c 是方程

$$x^3-kx^2+kx-1=0$$

的三个根.

又 x^3-kx^2+kx-1

$$=(x-1)[x^2+(1-k)x+1],$$

不妨设 $a=1$. 则 b、c 是方程

$$x^2+(1-k)x+1=0$$

的两根.

从而，$\begin{cases}\Delta=(1-k)^2-4\geqslant0,\\ b+c=k-1>0,\\ bc=1>0.\end{cases}$

解得 $k\geqslant3$.

因此，实数 k 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

2 间接转换

这类问题在形式上的特征相对比较隐蔽，需要将问题作一定的转换后，才能构造相应的一元三次方程来求解.

例3 已知 a、b、c 是三个互不相等的实数. 试解关于 x、y、z 的方程组

$$\begin{cases}\frac{x}{a^3}-\frac{y}{a^2}+\frac{z}{a}=1,\\ \frac{x}{b^3}-\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b}=1,\\ \frac{x}{c^3}-\frac{y}{c^2}+\frac{z}{c}=1.\end{cases}$$

收稿日期：2010-09-21

【分析】这是一道经典的一元三次方程韦达定理应用的问题. 如果直接解方程组,计算量较大. 观察三个方程的特征,知 a、b、c 是关于 m 的方程 $\frac{x}{m^3}-\frac{y}{m^2}+\frac{z}{m}=1$ 的三个根,此方程可化为

$$m^3-zm^2+ym-x=0.$$

根据韦达定理有

$$x=abc,y=ab+bc+ca,z=a+b+c.$$

这就是问题的解.

3 挖掘探究型

这类问题从形式上看与韦达定理没有明显联系,需要对问题做深层次的分析思考,才能构造出相应的一元三次方程.

例 4 求值:

(1) $\cos 40°+\cos 80°+\cos 160°$;

(2) $\cos 40°\cdot\cos 80°+\cos 80°\cdot\cos 160°+\cos 160°\cdot\cos 40°$;

(3) $\cos 40°\cdot\cos 80°\cdot\cos 160°$.

【分析】若从单一的式子看,求值是比较困难的,对三角公式的应用要求较高,但从三个式子联合来看,结构上恰好满足韦达定理的要求,可构造一元三次方程来求解.

由特殊角 120°及三倍角公式得

$$\cos 120°=\cos(3\times 40°)$$
$$=4\cos^3 40°-3\cos 40°=-\frac{1}{2},$$
$$\cos 240°=\cos(3\times 80°)$$
$$=4\cos^3 80°-3\cos 80°=-\frac{1}{2},$$
$$\cos 480°=\cos(3\times 160°)$$
$$=4\cos^3 160°-3\cos 160°=-\frac{1}{2}.$$

从而, $\cos 40°$、$\cos 80°$、$\cos 160°$ 是方程 $8x^3-6x+1=0$ 的三个根.

由韦达定理得

$$\cos 40°+\cos 80°+\cos 160°=0;$$
$$\cos 40°\cdot\cos 80°+\cos 80°\cdot\cos 160°+\cos 160°\cdot\cos 40°=-\frac{3}{4};$$
$$\cos 40°\cdot\cos 80°\cdot\cos 160°=-\frac{1}{8}.$$

【说明】本题的结构比较明显,但所需构造的方程具有一定隐蔽性,对知识的灵活性和思维的发散性有较高要求.

总之,一元三次方程韦达定理的应用灵活广泛,只要解题者善于发现问题在结构上的特征,通过构造相应的一元三次方程,才能使问题获得便捷的解决.

竞赛之窗

2010年广东省初中数学竞赛初赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)02－0020－03

【说明】每小题4分,共120分.

1. 一组数据4、5、6、7、7、8的中位数和众数分别是(　　).

(A)7,7 (B)7,6.5

(C)5.5,7 (D)6.5,7

2. 如果多项式 $P=a^2+4a+2\,014$,则 P 的最小值是(　　).

(A)2 010 (B)2 011

(C)2 012 (D)2 013

3. 如果 $100x^2-kxy+49y^2$ 是一个完全平方式,则 k 的值是(　　).

(A) $\pm 4\,900$ (B) $\pm 9\,800$

(C) ± 140 (D) ± 70

4. 把一个三位数 m 放在一个两位数 n 的前面组成一个五位数. 则可以表示为(　　).

(A) mn (B) $m+n$

(C) $10m+n$ (D) $100m+n$

5. 如果 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,则

$\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{4x^2-4x+1}=$(　　).

(A) $4x$ (B)2 (C) -2 (D) $2-4x$

6. 下列各实数中最大的一个是(　　).

(A) $5\times\sqrt{0.039}$ (B) $\frac{3.141}{\pi}$

(C) $\frac{7}{\sqrt{14}+\sqrt{7}}$ (D) $\sqrt{0.3}+\sqrt{0.2}$

7. 定义运算符号“$*$”的意义为

$a*b=\frac{a+b}{ab}$(a、b 均不为0).

给出下面两个结论:

①运算“$*$”满足交换律;

②运算“$*$”满足结合律.

其中,正确的是(　　).

(A)① (B)② (C)①② (D)无

8. 方程 $x^2-y^2=105$ 的正整数解有(　　)组.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

9. 已知 x、y 满足 $3x+4y=2$, $x-y<1$. 则(　　).

(A) $x>\frac{6}{7}$ (B) $y>-\frac{1}{7}$

(C) $x=\frac{6}{7}$ (D) $y=-\frac{1}{7}$

10. 设 $abc\neq0$,且 $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=p$. 则一次函数 $y=px+p$ 的图像一定通过(　　).

(A)第一、二象限 (B)第二、三象限

(C)第三、四象限 (D)第一、四象限

11. 如图1, $AB/\!/CD$, $AC/\!/BD$, AD 与 BC 交于点 O, $AE\perp BC$ 于点 E, $DF\perp BC$ 于点 F. 则图中全等的三角形有(　　)对.

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

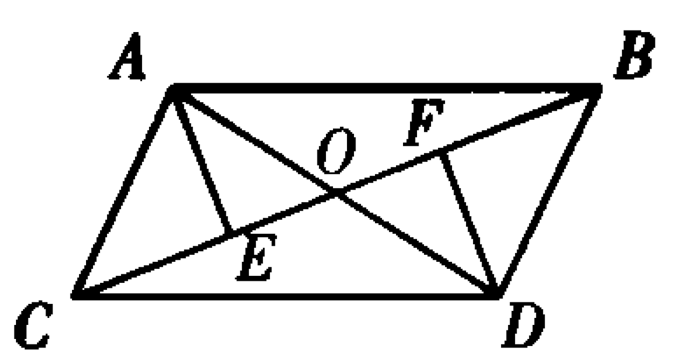

图1

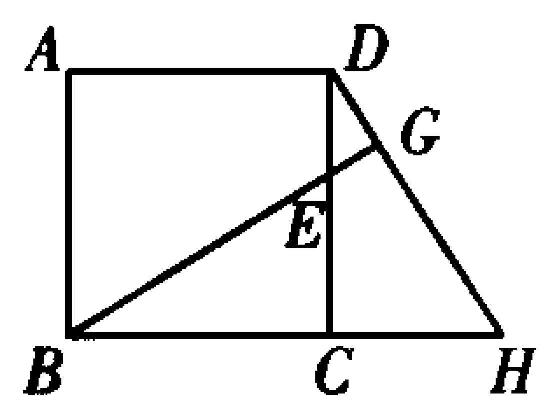

图2

12. 如图2,在正方形 $ABCD$ 中, H 是 BC 延长线上一点,使 $CE=CH$,联结 DH,延长 BE 与 DH 交于点 G. 则下面结论中错误的是(　　).

(A) $BE=DH$

(B) $\angle H+\angle BEC=90°$

(C) $BG\perp DH$

(D) $\angle HDC+\angle ABE=90°$

13. 如图 3，$\triangle ABC$ 被 DE、FG 分成面积相等的三部分（即 $S_1=S_2=S_3$），且 $DE/\!/FG/\!/BC$，$BC=\sqrt{6}$．则 $FG-DE=$（　　）．

(A) $\sqrt{3}-1$　　(B) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$　　(D) $2-\sqrt{2}$

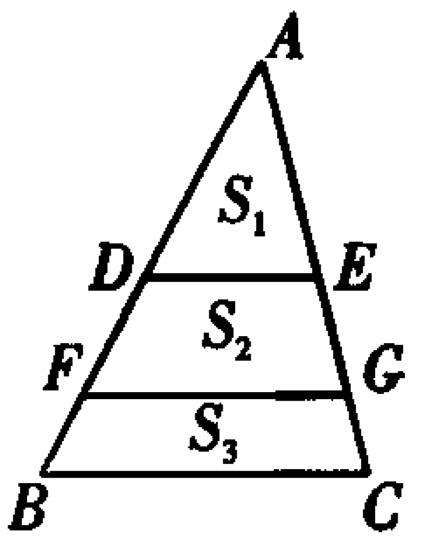

图 3

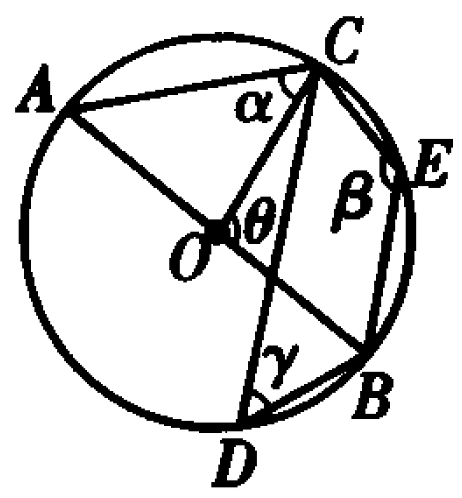

图 4

14. 如图 4，AB 为⊙O 的直径．下面关于各角 α、β、γ、θ 之间的关系式中，正确的是（　　）．

①$\theta=2\alpha$，②$\alpha=\gamma$，③$\theta+\beta=180°$．

(A)①②　　(B)①③

(C)②③　　(D)①②③

15. 如图 5，将 $\triangle ABC$ 沿着它的中位线 DE 折叠后，点 A 落到点 A'．若 $\angle C=120°$，$\angle A=26°$，则 $\angle A'DB$ 的度数是（　　）．

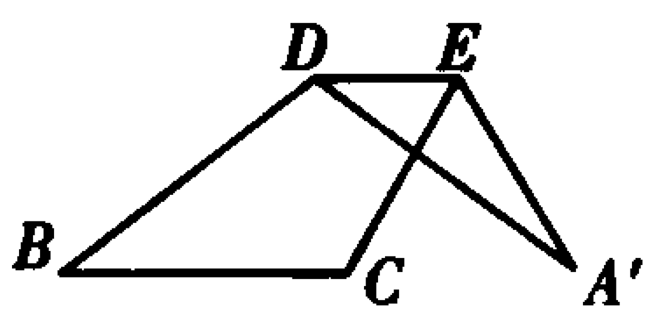

图 5

(A) $120°$　　(B) $112°$

(C) $110°$　　(D) $100°$

16. 如图 6，菱形 $ABCD$ 的周长为 20，$DE\perp AB$，垂足为 E，$\cos A=\dfrac{4}{5}$．给出下列结论：

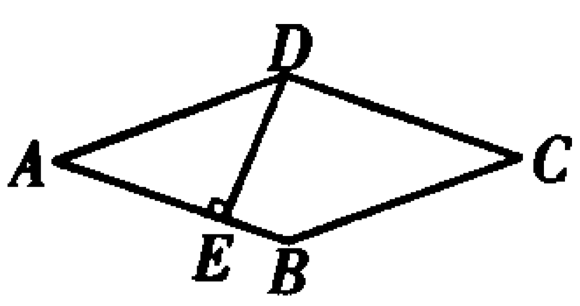

图 6

①$DE=3$，②$EB=1$，③$S_{菱形ABCD}=15$．

其中，正确结论的个数为（　　）．

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

17. 如图 7，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，P 为边 BC 上一点，且 $BP=1$，D 为边 AC 上一点．若 $\angle APD=60°$，则 CD 的长为（　　）．

(A) $\dfrac{3}{2}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

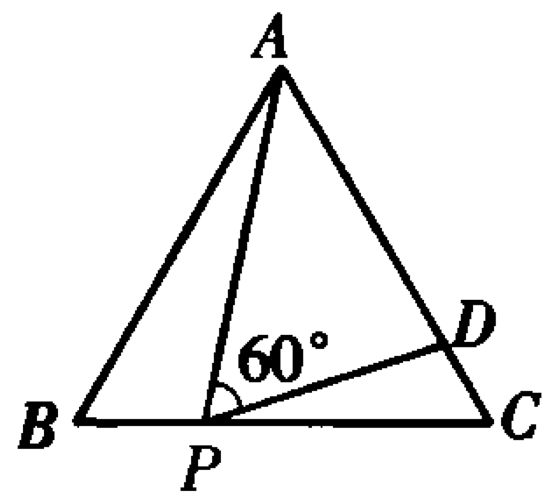

图 7

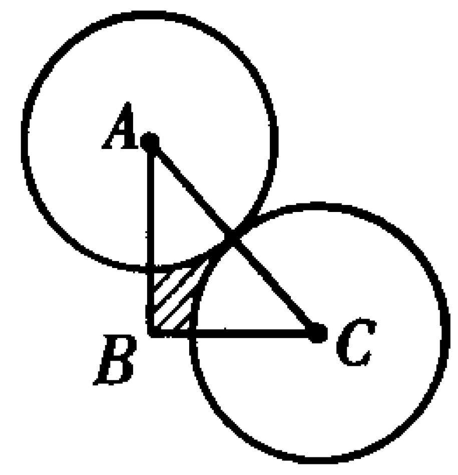

图 8

18. 如图 8，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$AB=8$，$BC=6$，分别以 A 和 C 为圆心、$\dfrac{AC}{2}$ 的长为半径作圆，将 Rt $\triangle ABC$ 截去两个扇形．则剩余（阴影）部分的面积为（　　）．

(A) $24-\dfrac{25\pi}{4}$　　(B) $\dfrac{25\pi}{4}$

(C) $24-\dfrac{5\pi}{4}$　　(D) $24-\dfrac{25\pi}{6}$

19. 将 1、2、3、4、5 这五个数字排成一排，最后一个数是奇数，且使得其中任意连续三个数之和都能被这三个数中的第一个数整除．则满足要求的排法有（　　）种．

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

20. 如果 $\triangle ABC$ 的两边长分别为 a、b，那么，$\triangle ABC$ 的面积不可能等于（　　）．

(A) $\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$　　(B) $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$

(C) $\dfrac{1}{8}(a+b)^2$　　(D) $\dfrac{1}{4}ab$

21. 设 x_1、x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两根．则 $x_1^3-4x_2^2+19$ 等于（　　）．

(A) -4　　(B) 8　　(C) 6　　(D) 0

22. 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$ 皆为锐角，CD 是高，$\dfrac{AD}{DB}=\left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2$．则 $\triangle ABC$ 是（　　）三角形．

(A) 直角　　(B) 等腰

(C) 等腰直角　　(D) 等腰或直角

23. 在二行三列的方格棋盘上沿骰子的某条棱翻动骰子(相对面上分别标有1点和6点,2点和5点,3点和4点),在每一种翻动方式中,骰子不能后退.开始时,骰子如图9那样摆放,朝上的点数是2;最后翻动到如图10所示的位置.此时,骰子朝上的点数不可能是下列数中的(　　).

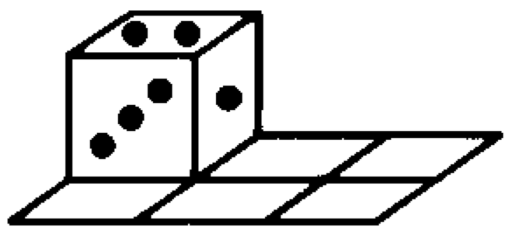
图9

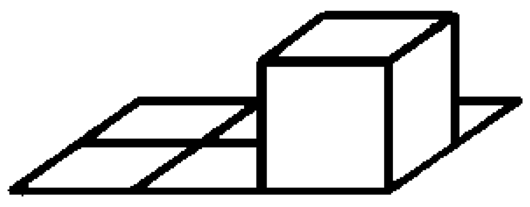
图10

(A)5　(B)4　(C)3　(D)1

24. 如图11,在△ABC中,M是边AB的中点,N是边AC上的点,且$\frac{AN}{NC}=2$,CM与BN交于点K.若△BCK的面积等于1,则△ABC的面积等于(　　).

(A)3　(B)$\frac{10}{3}$　(C)4　(D)$\frac{13}{3}$

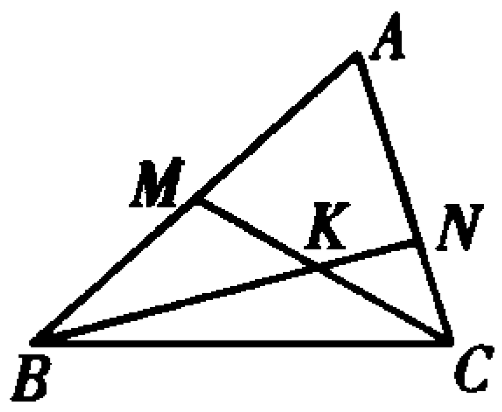

图11

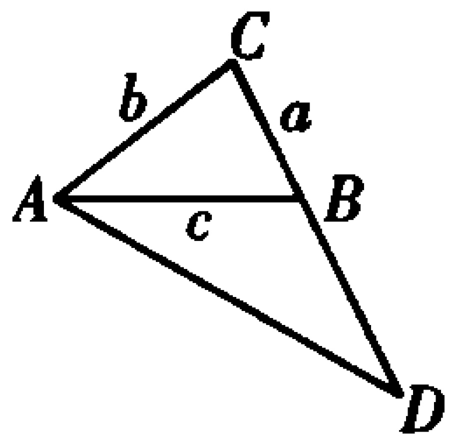

图12

25. 如图12,设a、b、c分别是△ABC的三边长,且$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}$,$BD=c$.则∠$CAB$、∠$CBA$的关系是(　　).

(A)∠$CBA>2$∠CAB

(B)∠$CBA=2$∠CAB

(C)∠$CBA<2$∠CAB

(D)不确定

26. 已知△ABC的三边长分别为a、b、c,面积为S,△$A_1B_1C_1$的三边长分别为a_1、b_1、c_1,面积为S_1,且$a>a_1$,$b>b_1$,$c>c_1$.则S与S_1的大小关系一定是(　　).

(A)$S>S_1$　(B)$S<S_1$

(C)$S=S_1$　(D)不确定

27. 设正实数x、y满足$xy=1$.则$\frac{1}{x^4}+\frac{1}{4y^4}$的最小值为(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{5}{8}$　(C)1　(D)$\sqrt{2}$

28. 设a、b是实数,且$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}=\frac{1}{b-a}$.则$\frac{1+b}{1+a}=$(　　).

(A)$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　(B)$\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(C)$\pm\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　(D)$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

29. 设a、b、c为实数,且$a\neq0$,抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于点A、B,与y轴交于点C,且抛物线的顶点在直线$y=-1$上.若△ABC是直角三角形,则Rt△ABC面积的最大值是(　　).

(A)1　(B)$\sqrt{3}$　(C)2　(D)3

30. $\frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(100^3+1)}$的值最接近等于(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{2}{3}$　(C)$\frac{3}{5}$　(D)$\frac{5}{8}$

参考答案

1.D　2.A　3.C　4.D　5.B　6.C　7.A　8.D　9.B　10.B　11.C　12.B　13.D　14.A　15.B　16.A　17.B　18.A　19.D　20.B　21.D　22.D　23.D　24.C　25.B　26.D　27.C　28.D　29.A　30.B

(吕伟泉　提供)

声　明

《中等数学》2010年第12期刊登的“第七届中国东南地区数学奥林匹克”第7题题干中的条件“$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$”是多余的,应当删去.

2010 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)02－0023－03

个 人 赛

一、填空题(第 1 ~ 4 题每小题 6 分，第 5 ~ 8题每小题 9 分，共 60 分)

1. 假设地球绕着连接北极和南极的直线为轴自转一周所需的时间是 23 小时 56 分 4 秒，又设地球的赤道半径为 6 378.1 km. 那么，当你站在赤道位置上随着地球自转，绕轴旋转的线速度是______米/秒(精确到米，π取 3.141 6).

2. 设 $T(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2\,835}$.

则 $T\left(\frac{\pi}{4}\right)=$______(精确到 10^{-6}).

3. 天文学中，常用“秒差距”作为距离单位. 如果在一个 Rt△ABC 中，

$\angle ACB=90°$，$CB=1.496\times10^8$ km，

即边 CB 的长等于太阳(C)与地球(B)之间的平均距离，那么，当 $\angle BAC$的大小为 1 秒(1 度等于 60 分，1 分等于 60 秒)时，斜边 AB 的长为 1 秒差距. 由此可知，1 秒差距 = ______ km(用科学计数法表示，保留四位有效数字).

4. 方程 $\lg|x|=\sin 2x$ 的实数根的个数是______.

5. 方程

$$\left(n+\frac{5}{124}\right)^{\frac{1}{3}}=n\left(\frac{5}{124}\right)^{\frac{1}{3}}$$

的所有正整数解 $n=$______.

6. 已知正整数 a、b 均小于 500，且满足 $a^2+(a+1)^2=b^2$.

则这样的数对(a,b)共有______对.

7. 已知直线 $y=x$ 与余弦曲线 $y=\cos x$ 交于点 A. 则坐标原点 O 到点 A 的距离 $|OA|$ = ______(精确到 10^{-4}).

8. 一个四位数的各位数码都是非零的偶数，且它的算术平方根恰是一个二位数，该二位数的两个数码也都是非零偶数. 则这个四位数是______.

【说明】解答以下三题必须写出解题的必要步骤.

二、(20 分) 如图 1，已知 M 是正方形 $ABCD$ 的边 DC 所在的直线上的一动点. 求 $\frac{MA}{MB}$的最大值.

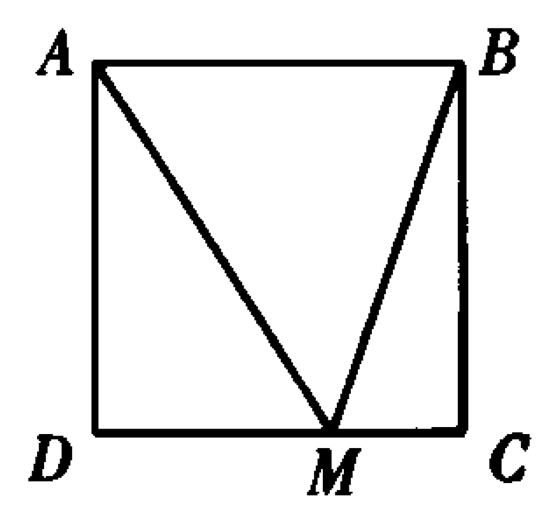

图 1

三、(20 分) 已知抛物线 C: $y=\frac{1}{2}x^2$，$A_1(x_1,0)$、$A_2(x_2,0)$是 x 轴上的两点($x_1+x_2\neq0$，$x_1x_2\neq0$)，过点 A_1、A_2 分别作 x 轴的垂线，与抛物线 C 分别交于点 A_1'、A_2'，直线 $A_1'A_2'$ 与 x 轴交于点 $A_3(x_3,0)$，这样就称 x_1、x_2 确定了 x_3. 同样，可由 x_2、x_3 确定 x_4，…. 已知 $x_1=6$，$x_2=2$. 求 x_6 的值.

四、(20 分)设

$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+n^2}$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1)求证：$[a_n]=n-1$ $(n=2,3,\cdots)$；

(2)求和：$[a_1^2]+[a_2^2]+\cdots+[a_n^2]$.

其中，$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

团体赛

【说明】解答时，必须写出必要步骤或计算器的算法.

一、(20 分)在直角坐标平面上，已知直线 $y=x+a(-1<a<1)$ 与抛物线 $y=1-x^2$ 交于点 A、B，点 C 的坐标为 $(1,0)$. 问：当 a 为何值时，$\triangle ABC$ 的面积最大？求出 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

二、(20 分)数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=2,a_n=\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}(n=3,4,\cdots).$$

设 a_2、a_5 都是正整数，且 $a_5\leqslant 2\ 010$. 求 a_5 的所有可能值.

三、(20 分)黑板上写有 1,2,…,666 这 666 个正整数，第一步划去最前面的八个数：1,2,…,8，并在 666 后面写上 1,2,…,8 的和 36；第二步再划去最前面的八个数：9,10,…,16，并在最后面写上 9,10,…,16 的和 100；如此继续下去(即每一步划去最前面的八个数，并在最后写上划去的八个数的和).

(1)问：经过多少步后，黑板上只剩下一个数？

(2)当黑板上只剩下一个数时，求出在黑板上出现过的所有数的和(如果一个数多次出现需重复计算).

参考答案

个人赛

一、**1.** 465 **2.** 0.999 171 **3.** 3.086×10^{13} **4.** 12 **5.** 5 **6.** 3 **7.** 1.045 2 **8.** 4 624

二、不妨设正方形的边长为 2，以 DC 为 x 轴、DC 的中点为原点 O 建立直角坐标系.

则 $A(-1,2)$、$B(1,2)$.

设 $M(x,0)$.

则 $\frac{MA}{MB}$ 取最大值时，显然，$x>0$.

又 $\left(\frac{MA}{MB}\right)^2=\frac{(x+1)^2+4}{(x-1)^2+4}=1+\frac{4x}{x^2-2x+5}$

$$=1+\frac{4}{x+\frac{5}{x}-2}\leqslant1+\frac{4}{2\sqrt5-2}=\frac{3+\sqrt5}{2},$$

从而，$\frac{MA}{MB}\leqslant\sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}=\frac{\sqrt5+1}{2}$.

当 $x=\sqrt5$ 时，上式等号成立.

故 $\frac{MA}{MB}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt5+1}{2}$.

三、由题设知

$$A_1'\left(x_1,\frac12x_1^2\right),A_2'\left(x_2,\frac12x_2^2\right).$$

则 $k_{A_1'A_2'}=\frac{\frac12(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}=\frac12(x_2+x_1)$.

故 $l_{A_1'A_2'}:y-\frac12x_2^2=\frac12(x_2+x_1)(x-x_2)$.

令 $y=0$，得 $\frac1x=\frac1{x_1}+\frac1{x_2}$，即

$$\frac1{x_3}=\frac1{x_1}+\frac1{x_2}.$$

同理，$\frac1{x_4}=\frac1{x_2}+\frac1{x_3},\frac1{x_5}=\frac1{x_3}+\frac1{x_4},\cdots\cdots$.

故 $\frac1{x_6}=\frac1{x_4}+\frac1{x_5}=\frac2{x_4}+\frac1{x_3}$

$$=\frac3{x_3}+\frac2{x_2}=\frac5{x_2}+\frac3{x_1}.$$

于是，由 $x_1=6,x_2=2$，得 $x_6=\frac13$.

四、(1)对整数 $n(n\geqslant2)$，有

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2}>n-1. \quad ①$$

下面证明：$a_n<n(n=2,3,\cdots)$.

当 $n=2$ 时，$a_2=\sqrt{a_1+1}=\sqrt2<2$.

当 $n\geqslant3$ 时，若 $a_{n-1}<n-1$，则

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)^2}<\sqrt{(n-1)+(n-1)^2}=\sqrt{n(n-1)}<n.$$

故 $a_n<n(n=2,3,\cdots)$.

综上，$[a_n]=n-1(n=2,3,\cdots)$.

(2)由(1)及题设可知，当 $n\geqslant3$ 时，

$$[a_n^2]=[a_{n-1}+(n-1)^2]=[a_{n-1}]+(n-1)^2=(n-2)+(n-1)^2=n(n-1)-1.$$

所以，$[a_1^2]=1$，$[a_1^2]+[a_2^2]=3$.

当 $n\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}&[a_1^2]+[a_2^2]+\cdots+[a_n^2]\\&=[a_1^2]+[a_2^2]+\sum_{k=3}^{n}[a_k^2]\\&=3+\sum_{k=3}^{n}k(k-1)-(n-2)\\&=5-n+\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n}[(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)]\\&=5-n+\frac{1}{3}[(n+1)n(n-1)-6]\\&=\frac{1}{3}(n^3-4n+9).\end{aligned}$$

注意到，当 $n=2$ 时，

$$\frac{1}{3}(n^3-4n+9)=3.$$

故 $\sum_{i=1}^{n}[a_i^2]=\begin{cases}1, & n=1;\\ \frac{1}{3}(n^3-4n+9), & n\geqslant 2.\end{cases}$

团 体 赛

一、设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=1-x^2,\\ y=x+a\end{cases}$ 消去 y 得

$$x^2+x+a-1=0.$$

所以，$x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=a-1$.

$$\begin{aligned}\text{则}\ |AB|^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\&=2(x_2-x_1)^2=2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]\\&=2(5-4a).\end{aligned}$$

点 $C(1,0)$ 到 $l_{AB}:x-y+a=0$ 的距离为

$$d=\frac{|1+a|}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}\text{则}\ S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}|AB|\cdot d\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(5-4a)(1+a)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{5}{2}-2a\right)(1+a)(1+a)}\\&\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{\frac{5}{2}-2a+1+a+1+a}{3}\right)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时，上式等号成立.

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

二、由题设知 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$.

故数列 $\{a_n\}$ 是等比数列.

设 $a_2=x$. 则数列 $\{a_n\}$ 的公比是 $\frac{x}{2}$.

所以，$a_5=2\left(\frac{x}{2}\right)^4=\frac{x^4}{8}$.

因为 a_5 是正整数，所以，$2\mid x$.

令 $x=2y$. 则 $a_5=2y^4$.

所以，$2y^4\leqslant 2\ 010$，即 $y\leqslant 5$.

故 $y=1,2,3,4,5$.

于是，$a_5=2,32,162,512,1\ 250$.

三、(1) 由于每一步均减少了七个数，故经过 $\frac{666-1}{7}=95$ 步后，只剩下了一个数.

(2) 由 $666-512=154$，则经过 $\frac{154}{7}=22$ 步后，有 512 个数.

在 22 步中，一共划去了 $22\times 8=176$ 个数，其和为

$$1+2+\cdots+176=88\times 177.$$

记 $S=1+2+\cdots+666=333\times 667$.

则经过 22 步后，剩下的 512 个数的和还是 S.

假设原来有 8^k 个数，其和为 x. 则经过 8^{k-1} 步后，原来的 8^k 个数都划去了，黑板上剩下的 8^{k-1} 个数的和仍然是 x.

因此，当继续下去黑板上只剩下一个数时，所有数的和是 $(k+1)x$.

所以，当黑板上只剩下一个数时，在黑板上出现过的所有数的和为

$$\begin{aligned}&88\times 177+4S=88\times 177+4\times 333\times 667\\&=904\ 020.\end{aligned}$$

（顾鸿达　李大元　熊　斌　忻重义　邱万作　黄　华　命题）

2010年河北省高中数学竞赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)02-0026-05

一、选择题（每小题6分，共36分）

1. 已知关于 x 的不等式

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geqslant k$$

有实数解．则实数 k 的取值范围是（ ）．

(A) $(0,2]$　(B) $(-\infty,0]$

(C) $(-\infty,0)$　(D) $(-\infty,2]$

2. 将正偶数集合 $\{2,4,\cdots\}$ 从小到大按第 n 组有 $2n-1$ 个数进行分组：

$\{2\},\{4,6,8\},\{10,12,14,16,18\},\cdots\cdots$.

问：2 010位于第（ ）组中．

(A) 30　(B) 31　(C) 32　(D) 33

3. 在四面体 $S-ABC$ 中，三组对棱分别相等，依次为5、4、x．则 x 的取值范围为（ ）．

(A) $(2,\sqrt{41})$　(B) $(3,9)$

(C) $(3,\sqrt{41})$　(D) $(2,9)$

4. 对于任意的整数 $n(n\geqslant2)$，满足

$$a^n=a+1,b^{2n}=b+3a$$

的正数 a 和 b 的大小关系是（ ）．

(A) $a>b>1$　(B) $b>a>1$

(C) $a>1,0<b<1$　(D) $0<a<1,b>1$

5. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ 的图像的对称中心为（ ）．

(A) $(-1,2)$　(B) $(1,2)$

(C) $(-1,-2)$　(D) $(1,-2)$

6. 从满足

$$a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant1)$$

的数列 $\{a_n\}$ 中，依次抽出能被3整除的项组成数列 $\{b_n\}$．则 $b_{100}=$（ ）．

(A) a_{100}　(B) a_{200}　(C) a_{300}　(D) a_{400}

二、填空题（每小题9分，共54分）

7. 已知函数 $y=f(x+1)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x+1)$，且 $f(1)=4\ 007$．则

$f(1\ 998)=$______．

8. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为3，长为2的线段 MN 的一个端点 M 在 AA_1 上运动，另一端点 N 在底面 ABC 上运动．则 MN 的中点 P 的轨迹（曲面）与正三棱柱共顶点 A 的三个面所围成的几何体的体积为______．

9. 已知圆

$$C_1:(x+3)^2+y^2=4,$$

$$C_2:x^2+(y-5)^2=4,$$

过平面内的点 P 有无数多对互相垂直的直线 l_1、l_2，它们分别与圆 C_1、圆 C_2 相交，且被圆 C_1、圆 C_2 截得的弦长相等．则点 P 的坐标为______．

10. 由 $1,2,\cdots,n$ 排列而成的 n 项数列 $\{a_n\}$ 满足：每项都大于它之前的所有项或者小于它之前的所有项．则满足这样条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为______．

11. 已知二次函数

$$y=ax^2+bx+c\geqslant0(a<b).$$

则 $M=\dfrac{a+2b+4c}{b-a}$ 的最小值为______．

12. 某家电影院的票价为每张5元，现有10个人，其中5个人手持5元钞票，另外5个人手持10元钞票．假设开始售票时售票处没有钱，这10个人随机排队购票．则售票处不会出现找不开钱的局面的概率是______．

三、解答题（共60分）

13.（10分）已知 $a、b\in[1,3]$，$a+b=4$．求证：

$$\sqrt{10}\leqslant\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}<\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

14. (10 分) 如图 1, 四棱锥 $P-ABCD$, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA=4$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle CDA=\angle BAD=90^{\circ}$, $AB=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{2}$, M、N 分别为 PD、PB 的中点, 平面 MCN 与 PA 的交点为 Q.

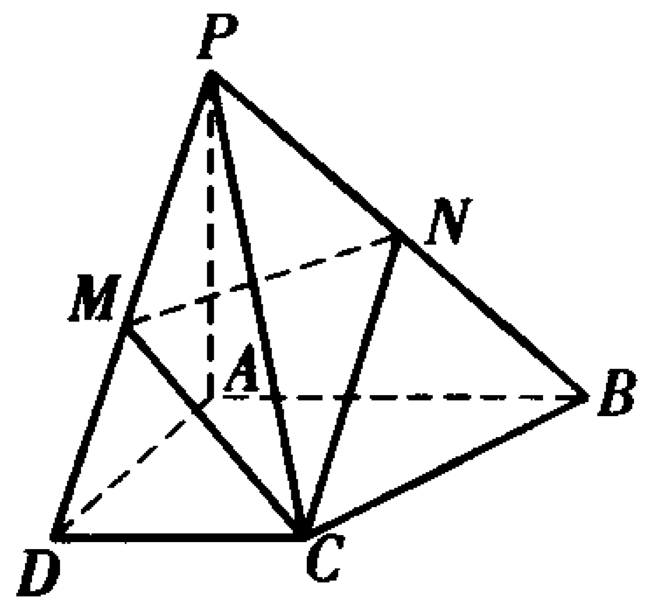

图 1

(1) 求 PQ 的长度;

(2) 求截面 MCN 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(3) 求点 A 到平面 MCN 的距离.

15. (10 分) 设 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$ $(n\in\mathbf{N}_+)$. 证明:

(1) 对所有的 n, $a_n\equiv3\pmod 4$;

(2) 当 $m\neq n$ 时, $(a_m,a_n)=1$ (即 a_m、a_n 互质).

16. (15 分) 如图 2, 已知椭圆 C 过点 $M(2,1)$, 两个焦点分别为 $(-\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6},0)$, O 为坐标原点, 平行于 OM 的直线 l 交椭圆 C 于不同的两点 A、B.

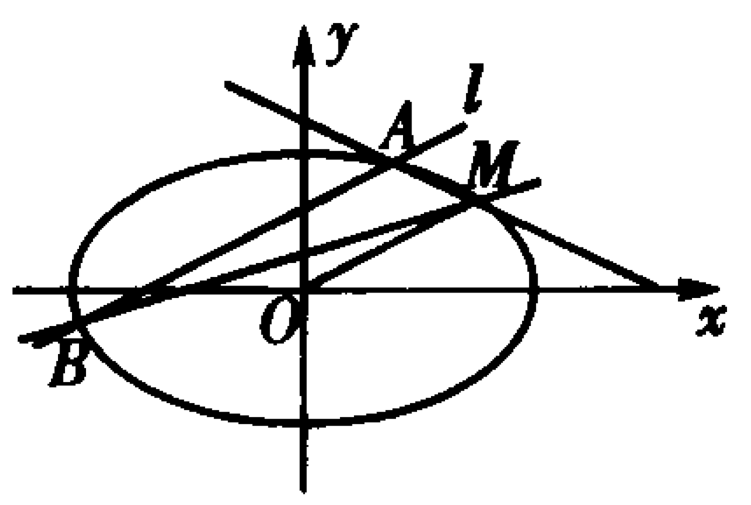

图 2

(1) 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值;

(2) 证明: 直线 MA、MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

17. (15 分) 已知函数

$$f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2x+1+\ln(x+1)\ (m\geqslant1).$$

(1) 若曲线 $C: y=f(x)$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线 l 与 C 有且只有一个公共点, 求 m 的值;

(2) 求证: 函数 $f(x)$ 存在单调递减区间 $[a,b]$, 并求出单调递减区间的长度 $t=b-a$ 的取值范围.

参考答案

一、**1.** D.

令 $y=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ $(0\leqslant x\leqslant2)$. 则

$y^2=x+(2-x)+2\sqrt{x(2-x)}\leqslant4$.

故 $0<y\leqslant2$, 且 $x=1$ 时, 上式等号成立.

所以, 实数 k 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

2. C.

显然, 2 010 是数列 $a_n=2n$ 的第 1 005 项. 设 2 010 位于第 n 组. 则

$\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2i-1)<1\,005\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)$

$\Rightarrow(n-1)^2<1\,005\leqslant n^2$

$\Rightarrow n=32$.

故 2 010 位于第 32 组.

3. C.

可将四面体嵌入到长方体中, 则四面体的三组对棱分别为长方体的面对角线. 故 5、4、x 为一个锐角三角形的三边长.

所以, $x\in(\sqrt{5^2-4^2},\sqrt{5^2+4^2})$, 即

$x\in(3,\sqrt{41})$.

4. A.

由题意知 $a>1$, $b>1$.

又 $a^{2n}-a=a^2+a+1>3a=b^{2n}-b$, 则

$a>b>1$.

5. B.

因为 $f(x)=(x-1)^3+2$, 所以, 函数图像的对称中心为 $(1,2)$.

6. D.

易知 a_{4k} $(k\geqslant1)$ 能被 3 整除, 故选 D.

二、**7.** 2 010.

由 $y=f^{-1}(x+1)$, 得 $x+1=f(y)$, 即

$x=f(y)-1$.

则 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数为 $y=f(x)-1$.

故 $f(x+1)-f(x)=-1$.

令 $x=1,2,\cdots,1\,997$,各式相加并化简得

$f(1\,998)-f(1)=-1\,997$.

所以,$f(1\,998)=2\,010$.

8. $\frac{\pi}{9}$.

由题设知 MN 的中点 P 到点 A 的距离恒为1.所以,点 P 的轨迹是以 A 为球心、1 为半径的球面在三棱柱内的部分.

故所围成的几何体体积是 $\frac{1}{6}V_{\text{半球}}=\frac{\pi}{9}$.

9. $P(1,1)$ 和 $P(-4,4)$.

设 $P(a,b)$,直线 l_1、l_2 的方程分别为

$$y-b=k(x-a),\ y-b=-\frac{1}{k}(x-a),$$

即 $kx-y-ka+b=0,\ x+ky-a-bk=0$.

易得圆心 $C_1(-3,0)$ 到 l_1 的距离与圆心 $C_2(0,5)$ 到 l_2 的距离相等.则

$$\frac{|-3k-ak+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5k-a-bk|}{\sqrt{k^2+1}},$$

即 $|(3+a)k-b|=|(5-b)k-a|$.

此等式对无数多个 k 成立,故

$$\begin{cases}3+a=5-b,\\ b=a\end{cases} \text{或} \begin{cases}3+a=b-5,\\ b=-5.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1;\end{cases}\begin{cases}a=-4,\\ b=4.\end{cases}$

故 $P(1,1)$ 和 $P(-4,4)$.

10. 2^{n-1}.

设所求的个数为 A_n.则 $A_1=1$.

对 $n>1$,若 n 排在第 i 位,则它之后的 $n-i$ 位数完全确定,只能是 $n-i,n-i-1,\cdots,2,1$.而它之前的 $i-1$ 位,$n-i+1,n-i+2,\cdots,n-1$ 有 A_{i-1} 种排法.

令 $i=1,2,\cdots,n$.则

$$A_n=1+A_1+\cdots+A_{n-2}+A_{n-1}$$
$$=(1+A_1+\cdots+A_{n-2})+A_{n-1}$$
$$=A_{n-1}+A_{n-1}=2A_{n-1}.$$

由此得 $A_n=2^{n-1}$.

11. 8.

由条件易知 $a>0,b^2-4ac\leqslant 0$.

注意到

$$M=\frac{a+2b+4c}{b-a}=\frac{a^2+2ab+4ac}{a(b-a)}$$
$$\geqslant\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}.$$

令 $t=\frac{b}{a}$.则 $t>1$.于是,

$$M\geqslant\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}=\frac{t^2+2t+1}{t-1}$$
$$=(t-1)+\frac{4}{t-1}+4$$
$$\geqslant 2\sqrt{4}+4=8.$$

等号成立的充分必要条件为 $t=3,b^2=4ac$,即 $b=3a,c=\frac{9}{4}a$.

所以,M 的最小值为 8.

12. $\frac{1}{6}$.

考虑手持5元钞票的5个人在队中的位置,共有 $C_{10}^5=252$ 种等机率的排队方式.

设 $p(m,n)$ 表示 m 个手持5元钞票、n 个手持10元钞票的人满足条件的排队方式数.

则 $p(m,0)=1$.

当 $m<n$ 时,$p(m,n)=0$,且

$$p(m,n)=p(m,n-1)+p(m-1,n).$$

如图3,$p(5,5)$ 等于从 A 到 B 不能穿过对角线的路径数,即

$p(5,5)=42$.

故所求的概率为 $\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$.

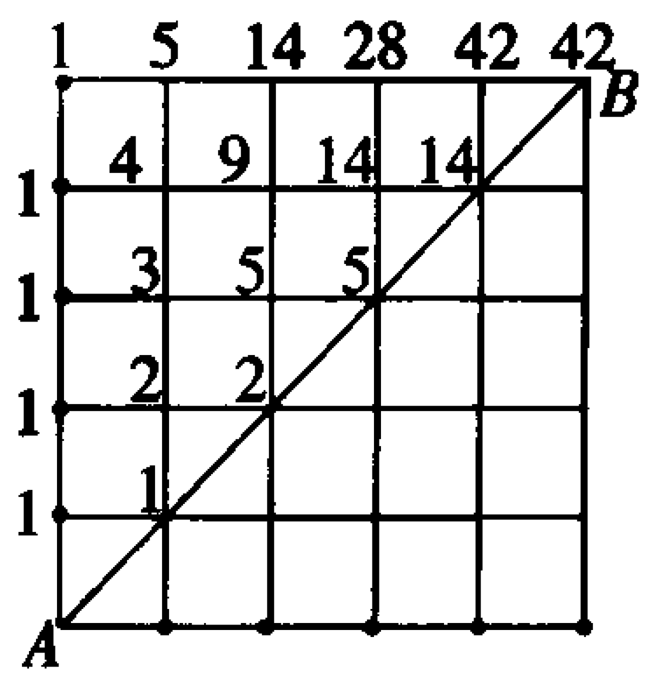

图3

三、**13.** 由 a、$b\in[1,3]$,$a+b=4$,得

$$ab=a(4-a)=-(a-2)^2+4\in[3,4].$$

设 $u=\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}$.则

$$u^2=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}$$

$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$

$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}}$

$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{17}{ab}-2}$.

而$\frac{4}{x}$、$x+\frac{17}{x}$在$[3,4]$上均为减函数，则

$10\leqslant u^2\leqslant\frac{16}{3}+2\sqrt{\frac{20}{3}}<\frac{32}{3}$.

因此，$\sqrt{10}\leqslant u<\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

14. (1)取 AP 的中点 E，联结 ED. 则

$ED\parallel CN$.

再取 EP 的中点即为点 Q，由 $MQ\parallel ED$，故 $MQ\parallel CN$.

所以，M、N、C、Q 四点共面，平面 MCN 与 AP 的交点 Q 即为 AP 的四等分点.

因此，$PQ=1$.

(2)易证平面 $MEN\parallel$底面 $ABCD$. 于是，截面 MCN 与平面 MEN 所成的二面角即为截面 MCN 与底面 $ABCD$ 所成的二面角.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以，

$PA\perp$平面 MEN.

过 E 作 $EF\perp MN$，垂足为 F，联结 QF.

则由三垂线定理可得 $QF\perp MN$.

因此，$\angle QFE$ 为截面 MCN 与平面 MEN 所成二面角的平面角.

在 Rt$\triangle MEN$ 中，

$ME=\frac{\sqrt{2}}{2}, EN=1, MN=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故 $EF=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，$\tan\angle QFE=\sqrt{3}$.

因此，$\angle QFE=\frac{\pi}{3}$.

(3)因为 EP 的中点为 Q，且平面 MCN 与 PA 交于点 Q，所以，点 A 到平面 MCN 的距离是点 E 到平面 MCN 的距离的 3 倍.

由(2)知 $MN\perp$平面 QEF. 则平面 $MCNQ\perp$平面 QEF 且交线为 QF.

作 $EH\perp QF$，垂足为 H.

则 $EH\perp$平面 $MCNQ$，EH 为点 E 到平面 MCN 的距离.

在 Rt$\triangle EQF$ 中，

$EF=\frac{\sqrt{3}}{3}, \angle QFE=\frac{\pi}{3}$.

故 $EH=\frac{1}{2}$.

因此，点 A 到平面 MCN 的距离为$\frac{3}{2}$.

15. (1)当 $n=1$ 时，$a_1\equiv3\pmod 4$.

假设 $a_n\equiv3\pmod 4$. 则

$a_{n+1}=a^2+a-1\equiv3^2+3-1\equiv3\pmod 4$.

所以，对所有的 n，有 $a_n\equiv3\pmod 4$.

(2)由递推关系易得

$a_{n+1}+1=4a_na_{n-1}\cdots a_1$.

不妨设 $m<n$. 易得 $a_m\mid(a_n+1)$.

令 $a_n+1=qa_m(q\in\mathbf{N})$. 于是，

$(a_m,a_n)=(a_m,qa_m-1)=(a_m,-1)=1$.

16. (1)设椭圆 C 的方程为

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由题意得

$\begin{cases}a^2-b^2=6,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2.\end{cases}$

所以，椭圆的方程为

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ①

由直线 $l\parallel OM$，可设

$l: y=\frac{1}{2}x+m$.

将上式代入式①得

$x^2+2mx+2m^2-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 则

$x_1+x_2=-2m, x_1x_2=2m^2-4$.

因为直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A、B，所以，

$\Delta=(2m)^2-4(2m^2-4)>0$.

于是，$m\in(-2,2)$，且 $m\neq0$.

故 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|$

$=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=|m|\sqrt{4-m^2}=\sqrt{m^2(4-m^2)}$

$\leqslant 4$.

当且仅当 $m^2=4-m^2$,即 $m=\pm\sqrt{2}$时,上式等号成立.

因此,$\triangle OAB$ 面积的最大值为4.

(2)设直线 MA、MB 的斜率分别为 k_1、k_2.则

$$k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2},k_2=\frac{y_2-1}{x_2-2}.$$

下面只需证明:$k_1+k_2=0$.

事实上,

$$k_1+k_2=\frac{\frac{1}{2}x_1+m-1}{x_1-2}+\frac{\frac{1}{2}x_2+m-1}{x_2-2}$$

$$=1+m\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}\right)$$

$$=1+m\cdot\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=1+m\cdot\frac{-2m-4}{2m^2-4-2(-2m)+4}=0.$$

故直线 MA、MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

17.(1)注意到函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,

$$f'(x)=mx-2+\frac{1}{x+1},f'(0)=-1.$$

所以,在切点 $P(0,1)$ 处的切线 l 的斜率为 -1.

因此,切线方程为 $y=-x+1$.

因为切线 l 与曲线 C 有唯一的公共点,所以,方程

$$\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1)=0$$

有且只有一个实数解.

显然,$x=0$ 是方程的一个解.

令 $g(x)=\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1)$.则

$$g'(x)=mx-1+\frac{1}{x+1}=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}$$

当 $m=1$ 时,$g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geqslant 0$(只有 $x=0$ 时等号成立),于是,$g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,即 $x=0$ 是方程唯一的实数解.

当 $m>1$ 时,由

$$g'(x)=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}=0,$$

得 $x_1=0,x_2=\frac{1}{m}-1\in(-1,0)$.

在区间 $(-1,x_2)$ 上,$g'(x)>0$,在区间 $(x_2,0)$ 上,$g'(x)<0$.

所以,函数 $g(x)$ 在 x_2 处有极大值 $g(x_2)$,且 $g(x_2)>g(0)=0$.

而当 $x\to-1$ 时,$g(x)\to-\infty$,因此,$g(x)=0$在$(-1,x_2)$内也有一个解,矛盾.

综上,得 $m=1$.

(2)注意到

$$f'(x)=\frac{mx^2+(m-2)x-1}{x+1}(x>-1).$$

故 $f'(x)<0$

$\Leftrightarrow h(x)=mx^2+(m-2)x-1<0$. ①

因为 $\Delta=(m-2)^2+4m=m^2+4>0$,且对称轴为

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}>-1,$$

$$h(-1)=m-(m-2)-1=1>0,$$

所以,方程 $h(x)=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 内有两个不同实根 x_1、x_2,即式①的解集为 (x_1,x_2).

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[x_1,x_2]$.

则 $t=x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{\frac{\Delta}{m^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}.$$

又因为 $m\geqslant1$,所以,$1<\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}\leqslant\sqrt{5}$.

从而,函数 $y=f(x)$ 的递减区间长度 t 的取值范围为 $(1,\sqrt{5}]$.

(张生春 提供)

2010 年湖南省高中数学竞赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)02－0031－05

一、选择题(每小题 5 分，共 30 分)

1. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数，且满足 $f(1)=8$，则

$f(2\,010)-f(2\,009)=(\quad)$.

(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

2. 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 有两个命题.

命题甲：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

命题乙：函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 为一次函数.

则甲是乙的(　　)条件.

(A)充分不必要

(B)必要不充分

(C)充分必要

(D)既不充分也不必要

3. 如图 1，Ω 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $EFGH$ 截去几何体 $EFGHB_1C_1$ 后得到的几何体，其中，E、F 分别为线段 A_1B_1、BB_1 上异于 B_1 的点，且 $EH/\!/A_1D_1$. 则下列结论中不正确的是(　　).

(A)$EH/\!/FG$

(B)四边形 $EFGH$ 是矩形

(C)Ω 是棱柱

(D)Ω 是棱台

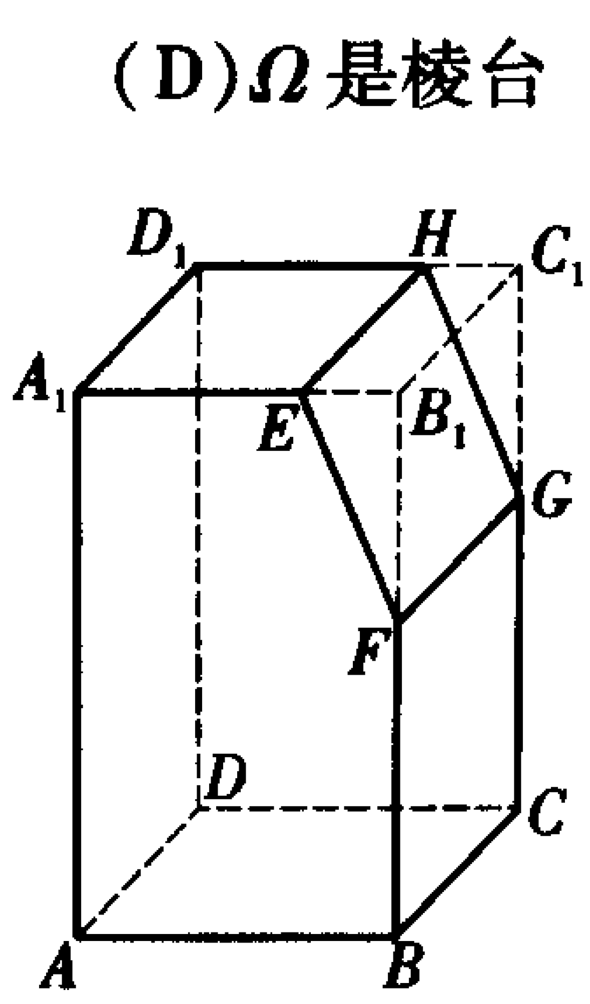

图 1

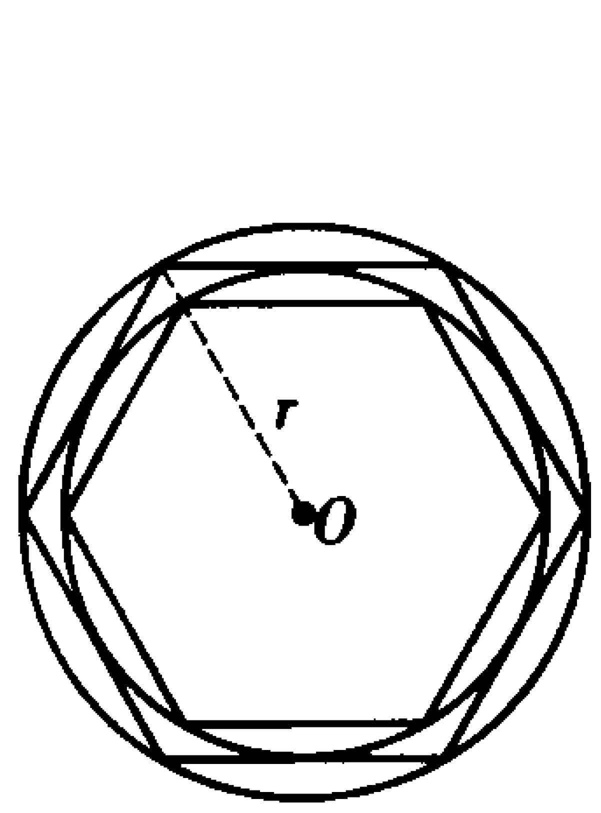

图 2

4. 如图 2，在半径为 $r=1$ 的圆内作内接正六边形，再作正六边形的内切圆，又在此内切圆内作内接正六边形，如此无限继续下去，设 S_n 为前 n 个圆的面积之和. 取正数 $\xi=3\pi\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$. 若 $|S_n-4\pi|<\xi$，则 n 的取值为(　　).

(A)大于 100 的所有自然数

(B)大于 100 的有限个自然数

(C)不大于 100 的所有自然数

(D)不大于 100 的有限个自然数

5. 设直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于点 E_1、E_2，记 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$，任取双曲线 Γ 上的点 P. 若 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ $(a、b\in\mathbf{R})$，则(　　).

(A)$0<a^2+b^2<1$

(B)$0<a^2+b^2<\frac{1}{2}$

(C)$a^2+b^2\geqslant1$

(D)$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

6. 一厂家有一批长 40 cm、宽 30 cm 的矩形红布. 现该厂家要将每块矩形红布剪一次后拼成一面三角形旗子. 则红布可以拼成三角形旗子的种数是(　　).

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

二、填空题(每小题 7 分，共 56 分)

7. 已知定义在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图像与 $y=5\tan x$ 的图像的交点为 P，过 P 作 $PP_1\perp x$ 轴于点 P_1，直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图像交于点 P_2. 则线段 P_1P_2 的长

为______.

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{2\,010}=4$，函数

$$f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\,010}).$$

则函数$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为______.

9. 如果执行图3所示的程序，输入正整数n、$m(n\geqslant m)$，那么，输出的p等于______.

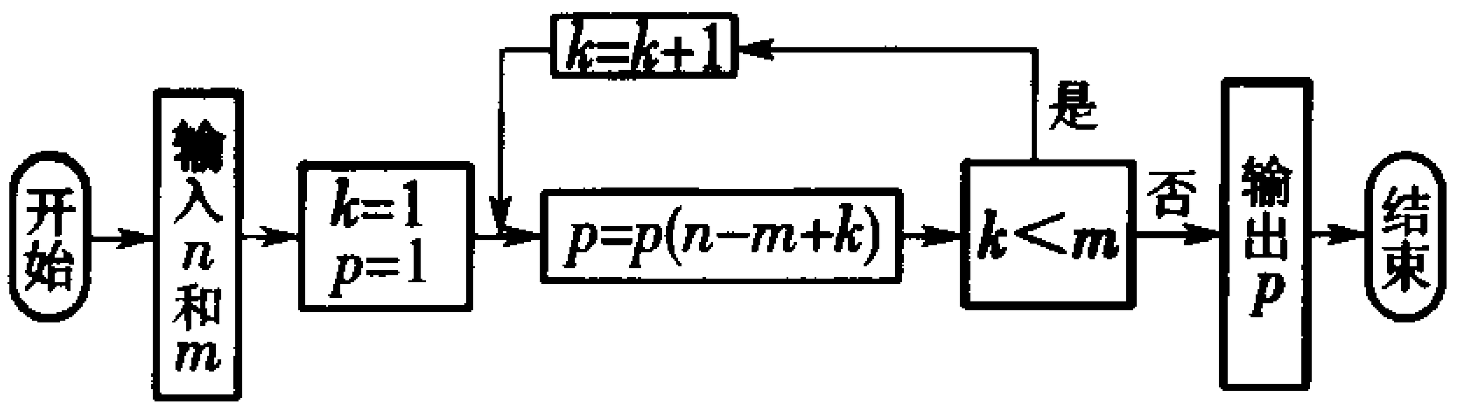

图3

10. 已知$y=f(x)$为区间$[0,1]$上的连续函数，且恒有$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，可以用随机模拟方法近似计算积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 先产生两组（每组$N$个）区间$[0,1]$上的均匀随机数$x_1,x_2,\cdots,x_N$和$y_1,y_2,\cdots,y_N$，由此得到$N$个点$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,N)$；再数出其中满足$y_i\leqslant f(x_i)(i=1,2,\cdots,N)$的点数$N_1$. 那么，由随机模拟方法可得积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$的近似值为______.

11. 设a_n是$(3-\sqrt{x})^n(n=2,3,\cdots)$的二项展开式中$x$的系数. 则

$$\sum_{n=2}^{18}\frac{3^n}{a_n}=\_\_\_\_\_\_.$$

12. 若三个非零实数

$$x(y-z)、y(z-x)、z(y-x)$$

成等比数列，则其公比$q=$______.

13. 设函数

$$f(x)=4\sin x\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\cos 2x.$$

如果$|f(x)-m|<2$成立的充分条件是$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，则实数$m$的取值范围是______.

14. 空间有五个点，任意四点不共面. 若连了若干条线段而图中不存在四面体，则图中三角形个数的最大值为______.

三、解答题（共64分）

15.（15分）已知当$x\in[1,\mathrm{e}]$时，不等式

$$a\ln x\leqslant-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x$$

恒成立. 试求实数a的取值范围.

16.（15分）如图4，$\odot O_1$、$\odot O_2$在$\odot O$内滚动且始终保持与$\odot O$内切，切点分别为P、Q，MN是$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线. 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$的半径分别为r_1、r_2、R.

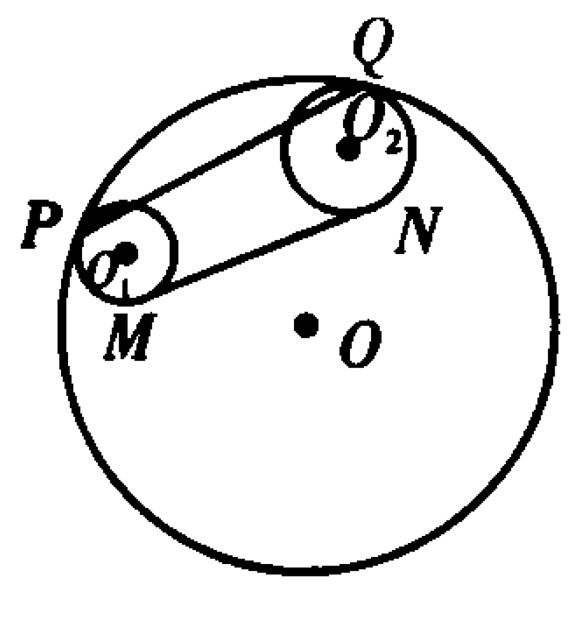

图4

求证：$\frac{MN^2}{PQ^2}$为定值.

17.（17分）设椭圆

$$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,C_2:\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1,$$

过原点O引射线分别与椭圆C_1、C_2交于点A、B，P为线段AB上一点.

（1）求证：$|OA|$、$|OP|$、$|OB|$成等比数列的充要条件是点P的轨迹方程为

$$C_3:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)=1.$$

（2）试利用合情推理，将（1）的结论类比到双曲线得出相应的正确结论（不要求证明）.

18.（17分）设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是整数$1,2,\cdots,n$的一个排列，且满足

（1）$a_1=1$；

（2）$|a_i-a_{i+1}|\leqslant 2(i=1,2,\cdots,n-1)$.

记上述排列的个数为$f(n)$. 试求$f(2\,010)$被3除的余数.

参考答案

一、**1.** C.

由$f(x)$是$\mathbf{R}$上周期为5的奇函数，则

$$f(2\,010)-f(2\,009)=f(0)-f(-1)$$

$=f(0)+f(1)=8$.

2. B.

注意到

$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x^2+(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)x-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

于是，$f(x)$为一次函数$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

而$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$时，$f(x)$可能是常数函数，不一定为一次函数.

3. D.

因为$EH/\!/A_1D_1$，所以，

$EH/\!/BC$，$EH/\!/$平面BCC_1B_1，

$FG=$面$BCC_1B_1\cap$面$EFGH$.

因此，$EH/\!/FG$.

又易知四边形$EFGH$是平行四边形，且$A_1D_1\perp EF$，则$EH\perp EF$.

显然，Ω为棱柱. 所以，Ω不是棱台.

4. A.

记第n个圆的半径为r_n.

易知，$r_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n-1}$，圆面积$a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}$，$a_1=\pi r_1^{\,2}=\pi$.

则$S_n=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\cdot\pi r_1^{\,2}=4\pi\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

由$|S_n-4\pi|=4\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n<3\pi\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$，得

$\left(\frac{3}{4}\right)^n<\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\Rightarrow n>100$.

5. D.

易求得$E_1(2,1)$，$E_2(2,-1)$. 则

$\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2=(2a+2b,a-b)$.

由点P在双曲线上得

$\frac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1$.

化简得$4ab=1$.

故$a^2+b^2\geqslant 2ab=\frac{1}{2}$.

6. D.

如图 5 所示，共有四种不同的拼法.

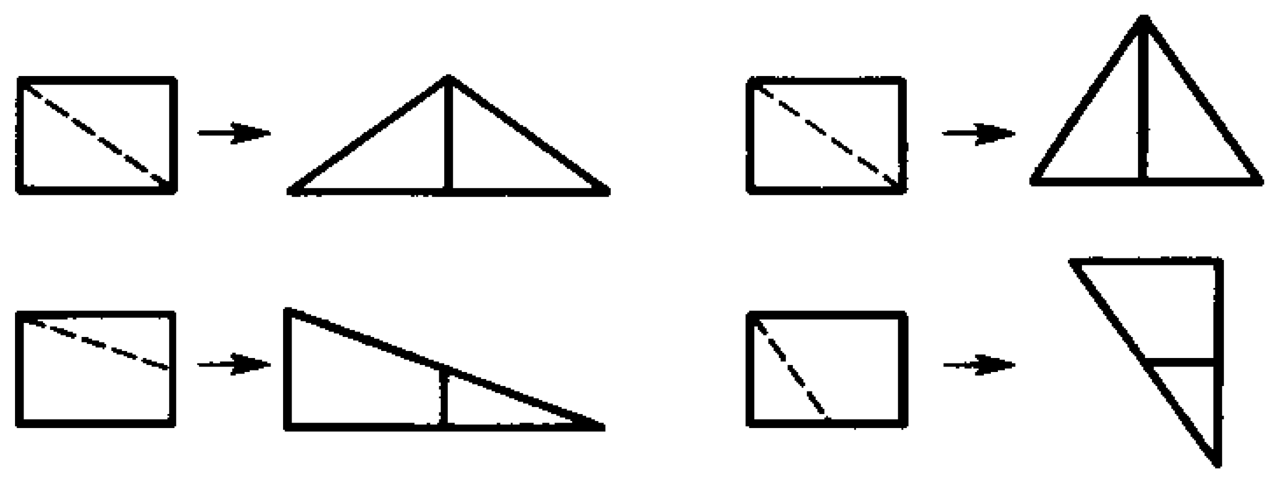

图 5

二、**7.** $\frac{2}{3}$.

设点P的横坐标为x. 则

$6\cos x=5\tan x$.

解得$\sin x=\frac{2}{3}$.

由条件知P_1P_2的长度为$\frac{2}{3}$.

8. $y=2^{2\,010}x$.

令$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\,010})$.

则$f(x)=xg(x)$.

因为$f'(x)=g(x)+xg'(x)$，所以，

$f'(0)=g(0)=a_1a_2\cdots a_{2\,010}$

$=(a_1a_{2\,010})^{\frac{2\,010}{2}}=2^{2\,010}$.

故在点$(0,0)$处的切线方程为

$y=2^{2\,010}x$.

9. A_n^m.

由图 3 可知

$p=(n-m+1)(n-m+2)\cdots n=\mathrm{A}_n^m$.

10. $\frac{N_1}{N}$.

设$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=S$.

若在面积为 1 的区域$x\in[0,1]$、$y\in[0,1]$内任意均匀地取出N个点，在积分区域内的点的个数为N_1，则$\frac{S}{1}=\frac{N_1}{N}$.

所以，S的近似值为$\frac{N_1}{N}$.

11. 17.

因为$a_n=3^{n-2}\mathrm{C}_n^2$，所以，

$\frac{3^n}{a_n}=3^2\times\frac{2}{n(n-1)}=\frac{18}{n(n-1)}$.

从而，$\sum\limits_{n=2}^{18}\frac{3^n}{a_n}=18\sum\limits_{n=2}^{18}\frac{1}{n(n-1)}=17$.

12. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

注意到

$x(y-z)+y(z-x)=z(y-x)$.

所以，$1+q=q^2$.

解得 $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

13. $(1,4)$.

注意到

$$f(x)=2\sin x\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos 2x$$
$$=2\sin x(1+\sin x)+1-2\sin^2 x$$
$$=1+2\sin x.$$

当 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$|f(x)-m|<2$ 恒成立，即 $f(x)-2<m<f(x)+2$ 恒成立.

则 $(f(x)-2)_{\max}<m<(f(x)+2)_{\min}$.

易求得 $(f(x))_{\max}=3$，$(f(x))_{\min}=2$.

因此，$1<m<4$.

14. 4.

首先构造图 6. 易知其符合条件且恰有四个三角形.

下面假设存在某种情况使三角形的个数不少于五个.

若仅有两条线段未连，则这两条线段必无公共端点（如图 6），否则存在四面体. 但仅有四个三角形，矛盾.

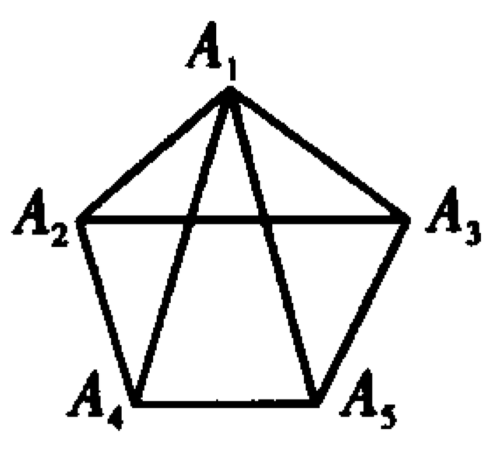

图6

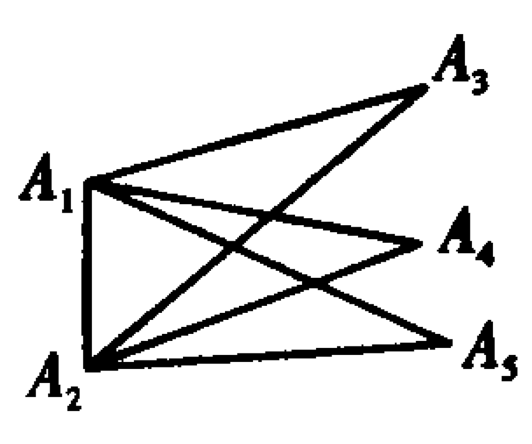

图7

若至少有三条线段未连，当有某条线段作为三个三角形的边时，如图 7 仅有三个三角形；当每条线段至多作为两个三角形的边时，则至多有 $\left[\frac{(C_5^2-3)\times 2}{3}\right]=4$ 个三角形.

三、15. 不等式可化为

$$a(x-\ln x)\geqslant\frac{x^2}{2}-x.$$

因为 $x\in[1,\mathrm{e}]$，所以，$x-\ln x>0$.

于是，不等式化为

$$a\geqslant\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x-\ln x}.$$

设 $g(x)=\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x-\ln x}(x\in[1,\mathrm{e}])$. 注意到

$$g'(x)=\frac{(x-1)\left(\frac{x}{2}+1-\ln x\right)}{(x-\ln x)^2}>0,$$

其中，$x\in(1,\mathrm{e})$，且 $g(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=\mathrm{e}$ 处连续，所以，$g(x)$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上为增函数.

故 $a\geqslant g(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$.

16. 易知，O_1、O_2 分别在线段 OP、OQ 上，且 $O_1M\perp MN$，$O_2N\perp MN$. 则

$$MN^2=O_1O_2^2-(r_1-r_2)^2. \quad ①$$

在 $\triangle O_1OO_2$ 中，由余弦定理得

$$O_1O_2^2=(R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\cos O$$
$$=(r_1-r_2)^2+2(R-r_1)(R-r_2)(1-\cos O).$$

将上式代入式①得

$$MN^2=2(R-r_1)(R-r_2)(1-\cos O).$$

又 $PQ^2=2R^2(1-\cos O)$，故

$$\frac{MN^2}{PQ^2}=\frac{(R-r_1)(R-r_2)}{R^2}$$

为定值.

17. (1) 设射线 OA 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, t>0).$$

设 $A(t_1\cos\theta,t_1\sin\theta)$，$B(t_2\cos\theta,t_2\sin\theta)$，$P(t_3\cos\theta,t_3\sin\theta)$.

将点 A 的坐标代入 C_1 的方程，整理得

$$\frac{1}{t_1^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}.$$

再将 $\sin\theta=\frac{y}{t_3}$，$\cos\theta=\frac{x}{t_3}$，代入上式化简得

$$\frac{1}{t_1^2}=\frac{1}{t_3^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

同理，$\frac{1}{t_2^2}=\frac{1}{t_3^2}\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)$.

故$|OA|$、$|OP|$、$|OB|$成等比数列

$\Leftrightarrow t_1t_2=t_3^2\Leftrightarrow \frac{1}{t_1^2}\cdot\frac{1}{t_2^2}=\frac{1}{t_3^4}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)=1$.

(2)设双曲线C_1、C_2的方程分别为

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$

和 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$.

过原点O引射线分别与曲线C_1、C_2交于点A、B，P为线段AB上一点，则$|OA|$、$|OP|$、$|OB|$成等比数列的充要条件是点P的轨迹方程为

$$C_3:\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}\right)=1.$$

18. 可验证

$f(1)=1$，$f(2)=1$，$f(3)=2$.

设$n\geqslant4$. 则$a_2=2$或3.

对于$a_2=2$，排列数是$f(n-1)$. 这是因为通过删除第一项，且以后所有项都减1，可以建立一一对应的数列.

对于$a_2=3$，若有$a_3=2$，则$a_4=4$，这样排列数为$f(n-3)$；若$a_3\neq2$，则2一定排在4的后面，由此得出所有奇数顺序排列的后面是所有偶数的倒序排列.

因此，$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1$.

设$r(n)$是$f(n)$除以3的余数. 则

$r(1)=r(2)=1$，$r(3)=2$.

当$n\geqslant4$时，

$r(n)\equiv[r(n-1)+r(n-3)+1](\bmod 3)$.

由此得$\{r(n)\}$构成周期为8的数列：

1，1，2，1，0，0，2，0，….

因$2\,010\equiv2(\bmod 8)$，所以，

$r(2\,010)=1$，

即$f(2\,010)$被3除的余数为1.

（黄元寿　提供）

征　稿　启　事

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为**数学活动课程讲座**、**命题与解题**、**从高考到竞赛**、**赛题新解**、**初等数学研究**、**专题写作**、**学生习作**、**短论集锦**、**课外训练**、**数学奥林匹克问题**、**问题赏析**、**数海拾贝**、**缤纷广角镜**等栏目撰稿，欢迎更多的作者撰写适合初中生阅读的、内容充实的专题讲座和解题指导性文章。来稿时请注意以下各项：

1. 来稿一般不超过3 000字，长文不超过4 000字。
2. 讲座稿应附有相应的练习题(5～7个)，并随练习题给出答案或提示。
3. 文中例题最好选用国内外的竞赛试题，并请注意标出竞赛名称(全称)、届次和时间。
4. 凡为本刊**课外训练**和**数学奥林匹克问题**栏目提供的稿件，请注意：试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准；题目要有新意(不能用成题)，需注明是自编或改编，改编题需注明原题出处。
5. 参考文献请用顺序编码制，在正文引用处注明。

本刊编辑部

●课外训练●

数学奥林匹克初中训练题(138)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)02-0036-04

第一试

一、选择题(每小题7分，共42分)

1. 若$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$，其中，$-3\leqslant x\leqslant 3$，则y的最小值为(　　).

(A)3　(B)4　(C)29　(D)5.5625

2. 从2、3、4、5这四个数中，任取两个数p、$q(p\neq q)$构成函数$y=px-2$和$y=x+q$，并使这两个函数图像的交点在直线$x=2$的右侧. 则这样的有序数对(p,q)共有(　　)对.

(A)12　(B)6　(C)5　(D)3

3. 图1中共有(　　)个四边形.

(A)15　(B)19　(C)20　(D)23

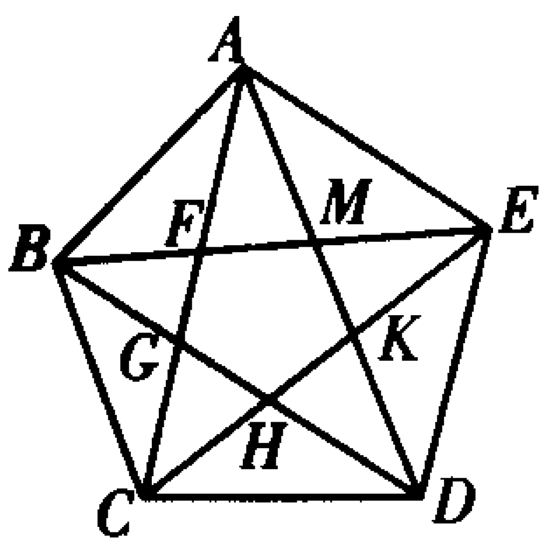

图1

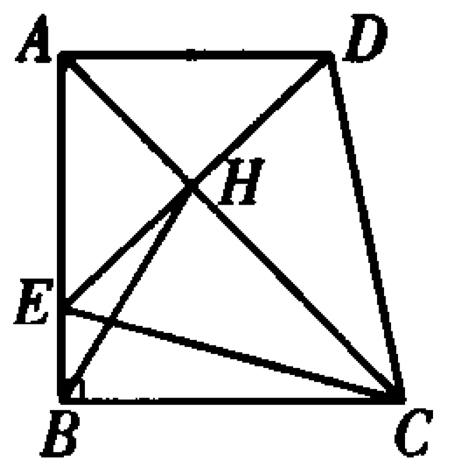

图2

4. 如图2，在直角梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，$AB=BC$，E为边AB上一点，$\angle BCE=15°$，且$AE=AD$. 联结DE与对角线AC交于点H，联结BH. 给出下列结论：

①$\triangle ACD\cong\triangle ACE$；

②$\triangle CDE$为等边三角形；

③$\dfrac{EH}{BE}=2$；

④$\dfrac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle EHC}}=\dfrac{AH}{CH}$.

其中，正确的结论是(　　).

(A)①②　(B)①②④

(C)③④　(D)①②③④

5. 设a、b都是大于1的整数，

$$m=\frac{a^2-1}{b+1},\ n=\frac{b^2-1}{a+1}.$$

若$m+n$为整数，则m、n中的整数是(　　).

(A)m、n　(B)m　(C)n　(D)无

6. 设n为正整数，且$3n+1$、$5n-1$均为完全平方数. 给出以下两个命题：

①$7n+13$必为合数；

②$8(17n^2+3n)$必为两个完全平方数的和.

其中，正确的是(　　).

(A)①　(B)②　(C)①②　(D)无

二、填空题(每小题7分，共28分)

1. 设$a_n=\dfrac{2^n}{2^{2n+1}-2^{n+1}-2^n+1}$($n$为正整数). 则$a_1+a_2+\cdots+a_{2011}$的值______1(填“大于”“等于”或“小于”).

2. 已知正方形$ABCD$的边长为5，P为形内一点，且$PA=\sqrt{5}$，$PC=5$. 则$PB=$______.

3. 已知实数a、b满足$a^3-b^3-3ab=1$. 则$a-b=$______.

4. 在Rt$\triangle ABC$中，CD是斜边AB上的高，$\triangle ABC$的三边长a、b、c均为正整数，$BD=27$. 则$\cos B=$______.

第二试

一、(20 分)对于每个正整数 n,设 $f(n)$ 表示 $1+2+\cdots+n$ 的末位数字(如 $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=6$). 试计算 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,011)$ 的值.

二、(25 分)如图 3,过圆外一点 P 作圆的两条切线 PA、PB,A、B 为切点,再过 P 作圆的一条割线分别与圆交于点 C、D,过 AB 上任一点 Q 作 PA 的平行线分别与直线 AC、AD 交于点 E、F. 证明:

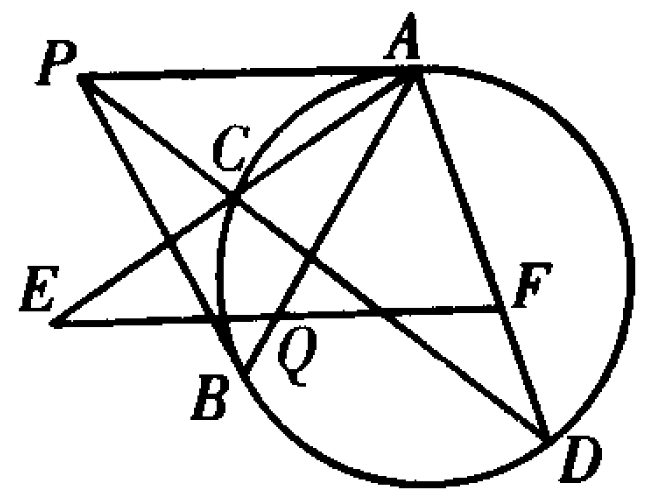

图 3

$QE=QF$.

三、(25 分)试求最小的正整数 n,使得在任何 n 个无理数中总有三个数,其中每两个之和均为无理数.

参考答案

第一试

一、1. B.

注意到

$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+5$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+5$

$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+5$.

令 $z=x^2+5x+4$.

由 $-3\leqslant x\leqslant 3$,得

$-2.25\leqslant z\leqslant 28$, $y=(z+1)^2+4$.

则 $y_{\min}=4$.

2. B.

由题意知

$$px-2=x+q\Rightarrow x=\frac{q+2}{p-1}.$$

又因交点在直线 $x=2$ 的右侧,所以,

$$\frac{q+2}{p-1}>2\Rightarrow q>2(p-2).$$

将 p、$q=2,3,4,5$ 代入上式检验,只有 $(2,3)$,$(2,4)$,$(2,5)$,$(3,4)$,$(3,5)$ 和 $(4,5)$ 共 6 对符合要求.

3. C.

图中共有 10 个点,其中,包含 A、B、C、D、E 五个点中的四个点的四边形有 5 个;包含 A、B、C、D、E 中三个相邻点的四边形有 5 个;包含其中相邻两点的四边形有 5 个;包含其中一个顶点的四边形有 5 个;不含 A、B、C、D、E 的四边形不存在.

总共 20 个.

4. B.

易知,$\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 均为等腰直角三角形.

所以,$\angle BAC=45°$,即 AH 平分 $\angle EAD$.

从而,$\triangle ACD\cong\triangle ACE$,结论①正确.

因 $\angle ACB=45°$,$\angle BCE=15°$,所以,

$\angle DCA=\angle ECA=45°-15°=30°$.

从而,$\angle ECD=2\angle DCA=60°$.

又 $CE=CD$,因此,$\triangle CDE$ 是等边三角形,结论②正确.

设 $\triangle CDE$ 的边长为 $2a$. 则

$EH=AH=a$, $CH=\sqrt{3}a$, $AE=\sqrt{2}a$,

$$AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AC=\frac{AH+CH}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a,$$

$$BE=AB-AE=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}a.$$

所以,$\dfrac{EH}{BE}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,结论③不正确.

又 $S_{\triangle EBC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot BE=\dfrac{1}{2}a^2$,

$S_{\triangle EHC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle CDE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$,

则 $\dfrac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle EHC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{AH}{CH}$,结论④正确.

5. A.

因 $q=mn=(a-1)(b-1)$ 为整数,且

$p=m+n$ 为整数,所以,m、n 是 $x^2-px+q=0$ 的两个有理根.

则 $\Delta=p^2-4q$ 为完全平方数.

解方程有 m、$n=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

因为 p^2-4q 与 p 有相同的奇偶性,所以,根的表达式的分子为偶数.

故 m、n 都是整数.

6. C.

设 $3n+1=a^2$,$5n-1=b^2$(a、b 为正整数).则

$$7n+13=9(3n+1)-4(5n-1)$$
$$=(3a)^2-(2b)^2$$
$$=(3a-2b)(3a+2b).$$

故知 $3a-2b$ 为正整数.

若 $3a-2b=1$,则

$$27n+9=(3a)^2=(2b+1)^2,$$

即 $27n=4(b^2+b-2)$.

所以,$4|n$.

不妨设 $n=4k$.

则 $5n-1=20k-1$ 不为平方数,矛盾.

因此,$3a-2b\geqslant 2$.

故 $7n+13$ 为合数,结论①正确.

又 $8(17n^2+3n)$

$$=[(3n+1)+(5n-1)]\cdot[4(3n+1)+(5n-1)]$$
$$=(a^2+b^2)[(2a)^2+b^2]$$
$$=(2a^2+b^2)^2+(ab)^2.$$

故结论②正确.

二、**1.** 小于.

由 $a_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$

$$=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1},$$

得 $a_1+a_2+\cdots+a_{2011}$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2011}-1}-\frac{1}{2^{2012}-1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{2^{2012}-1}<1.$$

2. $\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{5}$.

如图 4,作 $PE\perp AB$ 于点 E,$PF\perp BC$ 于点 F.

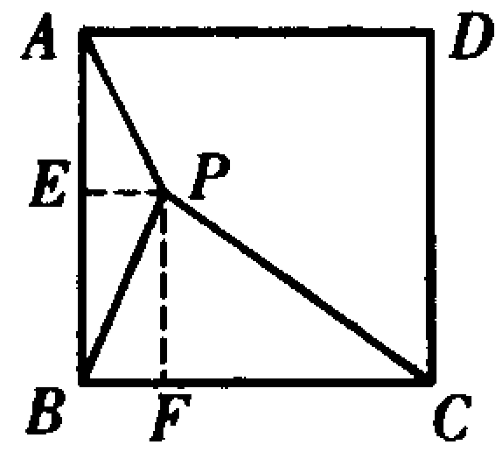

图 4

设 $PE=m$,$PF=n$.

在 Rt$\triangle PAE$ 和 Rt$\triangle PCF$ 中,分别由勾股定理得

$$\begin{cases}m^2+(5-n)^2=5, & ①\\(5-m)^2+n^2=25. & ②\end{cases}$$

②-①得 $10(n-m)=20$.

所以,$m=n-2$.

代入式①得 $n^2-7n+12=0$.

解得 $n=3$ 或 4.

当 $n=3$ 时,$m=n-2=1$,在 Rt$\triangle PBE$ 中,由勾股定理得

$$PB=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}.$$

当 $n=4$ 时,$m=n-2=2$.

同理,$PB=2\sqrt{5}$.

综上,$PB=\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{5}$.

3. 1 或 -2.

设 $a-b=k$.则由条件知

$$k(k^2+3ab)-3ab-1=0$$
$$\Rightarrow k^3+3kab-3ab-1=0$$
$$\Rightarrow (k-1)(k^2+k+1)+3ab(k-1)=0$$
$$\Rightarrow (k-1)(k^2+k+1+3ab)=0.$$

故 $k-1=0$ 或 $k^2+k+1+3ab=0$.

当 $k=1$ 时,得 $a-b=1$.

当 $k^2+k+1+3ab=0$ 时,有

$$(a-b)^2+(a-b)+1+3ab=0,$$

即 $a^2+(b+1)a+b^2-b+1=0$. ①

因为 a 为实数,所以,

$$\Delta=(b+1)^2-4(b^2-b+1)\geqslant 0,$$

即 $(b-1)^2\leqslant 0$.

又因为 $(b-1)^2\geqslant 0$,所以,

$$(b-1)^2=0\Rightarrow b=1.$$

代入方程①得 $a=-1$.

此时，$a-b=-2$.

综上，$a-b=1$ 或 -2.

4. $\frac{3}{5}$.

设 $(a,c)=d, a=a_0d, c=c_0d, (a_0,c_0)=1$.

由射影定理知 $BC^2=BD\cdot BA$

$\Rightarrow a^2=27c \Rightarrow da_0=27c_0$

$\Rightarrow a_0^2 \mid 27 \Rightarrow a_0=1$ 或 3.

若 $a_0=1$，则

$b=\sqrt{c^2-a^2}=d\sqrt{c_0^2-a_0^2}$

$=d\sqrt{c_0^2-1}$

不是正整数，矛盾.

若 $a_0=3$，则 $d=3c_0$，且

$b=\sqrt{c^2-a^2}=d\sqrt{c_0^2-9}$.

设 $c_0^2-9=e^2$. 则

$(c_0-e)(c_0+e)=9$

$\Rightarrow (c_0,e)=(5,4)$.

所以，$\cos B=\frac{a}{c}=\frac{a_0}{c_0}=\frac{3}{5}$.

第 二 试

一、因为任意连续 20 个正整数之和的末位数字为 0，所以，

$f(n+20)=f(n)$.

从而，只需计算从 1 到 20 所对应的 $f(n)$，如表 1.

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	3	6	0	5	1	8	6	5	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0

又 $f(1)+f(2)+\cdots+f(20)=70$,

$2\,011=20\times 100+11$,

则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,011)$

$=70\times 100+f(1)+f(2)+\cdots+f(11)$

$=7\,000+46=7\,046$.

二、如图 5，联结 BD、BC.

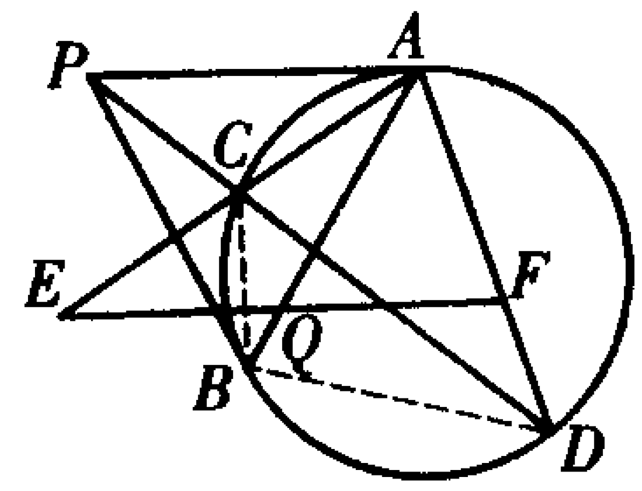

图 5

则 $\angle ABC=\angle PAC=\angle E$.

则 $\triangle ABC \backsim \triangle AEQ$.

故 $\frac{EQ}{BC}=\frac{AQ}{AC}$，即

$$EQ=\frac{AQ\cdot BC}{AC}. \qquad ①$$

同理，

$$QF=\frac{AQ\cdot BD}{AD}. \qquad ②$$

另一方面，由

$\triangle PBC \backsim \triangle PDB$，$\triangle PCA \backsim \triangle PAD$，

得 $\frac{BC}{BD}=\frac{PC}{PB}$，$\frac{AC}{AD}=\frac{PC}{PA}$.

因为 $PA=PB$，所以，$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{AD}$.

由上式及式①、②即得 $QE=QF$.

三、取四个无理数 $\{\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2},-\sqrt{3}\}$，显然不满足条件，故 $n\geqslant 5$.

设五个无理数 a、b、c、d、e，视为五个点.

若两数和为有理数，则相应两点间连红线. 否则连蓝线.

(1) 无红色三角形. 否则，不妨设 $a+b$、$b+c$、$c+a$ 都是有理数. 但 $(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a$，与 a 为无理数矛盾.

(2) 必有同色三角形. 否则，图中必有一红圈，即每点连出两条红线、两条蓝线(若有一点 A 连出至少三条同色的线段 AB、AC、AD，则 $\triangle BCD$ 为另一色的同色三角形，矛盾). 设红圈上依次五个数为 a、b、c、d、e. 则 $a+b$、$b+c$、$c+d$、$d+e$、$e+a$ 为有理数.

由 $(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)=2a$ 推出矛盾. 这样，同色三角形必为蓝色三角形.

综上，n 的最小值为 5.

(宿晓阳　四川成都实验外国语学校，610031)

数学奥林匹克高中训练题(138)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)02-0040-07

第一试

一、填空题(每小题7分,共56分)

1. 已知函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$满足

$f(f(x)+f(y))=f(x)+y(\forall x、y\in\mathbf{R})$. ①

则$f(2\,011)=$______.

2. 已知正四棱锥$P-ABCD$的五个顶点在同一球面上.若该四棱锥的体积为V,则球的表面积的最小值为______.

3. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{2\,011}$是正实数,$S=\sum_{i=1}^{2\,011}a_i$,且

$(S+2\,011)(S+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{2\,011}a_1)$
$=4(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_{2\,011}a_1})^2$.

则$S=$______.

4. 一个不规则的凸立方体内部有一点Q,过Q的直线l与立方体表面交于点M、N.则使$QM=QN$成立的直线l有______条.

5. 已知$x\in\mathbf{R}$,且

$|1-|2-\cdots-|2\,011-x|\cdots||=x$.

则$x_{\max}=$______.

6. 从$\{1,2,\cdots,2\,011\}$中随意取1 005个不同数,使得其和为1 021 035.则其中至少有______个奇数.

7. 将1~16这16个正整数随机地填入4×4棋盘的16个格子中(每格填写一数).则使每行、每列填数之和皆为偶数的概率为______.

8. 已知可以用一系列半径为R且彼此不重叠的圆盘覆盖平面上的所有格点(在平面直角坐标系中,横、纵坐标都是整数的点为格点).则$R_{\max}$______4(填"大于""小于"或"等于").

二、解答题(共56分)

9. (16分)已知$\odot O:x^2+y^2=r^2$,椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,其中,$0<b<a<r$.从$\odot O$上任一点引椭圆$C$的两条切线,两个切点所连线段称为其对应的切点弦.试求椭圆C内部与上述切点弦永远不相交的区域.

10. (20分)操场上有100个人排成一圈,按顺时针方向依次标为$C_1,C_2,\cdots,C_{100}$.主持人将编号为1,2,…,50的纪念品按照以下方式依次分发给众人:先将第1号纪念品交给C_1;然后顺时针跳过1个人,将第2号纪念品交给C_3;再顺时针跳过2个人,将第3号纪念品交给C_6,……第k次顺时针跳过k个人,将第$k+1$号纪念品交给$C_{\varphi(k+1)}$,其中,$\varphi(k)\equiv1+2+\cdots+k\pmod{100}$,如此下去,直到纪念品发完为止.试求得到纪念品最多的人及其所得纪念品的编号.

11. (20分)在半径为4的大球内,已任意放了24个棱长为1的正方体.证明:在大球内至少还可以放置4个半径为$\frac{1}{2}$的小球,使得这些小球及正方体都在大球内且相互不重叠.

加　试

一、(40分)已知锐角$\triangle ABC(AB\neq AC)$,过点B、C的$\odot O$与边AC、AB分别交于点D、E,P为$\triangle ABC$外接圆的弧$\overparen{BAC}$上一点.证明:BD、CE、OP三线共点的充分必要条件是$\triangle PBD$的内心与$\triangle PCE$的内心重合.

二、(40分)已知正实数α、β、γ满足$\alpha+\beta+\gamma=1$.证明:对任意正实数x、y、z,有

$$\alpha(y+z)\sqrt{\frac{x(7x+4y+10z)}{7}+\frac{(2y-5z)^2}{49}}+$$

$$\beta(z+x)\sqrt{4x(x+y+z)+(y-z)^2}+$$

$$\gamma(x+y)\sqrt{\frac{5x(5x+2y+8z)}{16}+\frac{(y-4z)^2}{16}}$$

$$\geqslant 2\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

三、(50 分)试求 2 011!的最末两位非零数字.

四、(50 分)已知 a、b、c 为大于 3 的整数,将 $a\times b\times c$ 的立方体分割为 abc 个单位正方体,从一角的单位正方体起第 i 层、第 j 行、第 k 列的单位正方体记为 (i,j,k). 求所有有序六元数组 $(i_1,j_1,k_1;i_2,j_2,k_2)$ 的个数,使得一只蚂蚁从 $A(i_1,j_1,k_1)$ 出发,经过每个小正方体恰一次到达 $B(i_2,j_2,k_2)$.

【注】蚂蚁可以从一个单位正方体爬到另一个与之有公共面的相邻正方体.

参考答案

第一试

一、1. 2 011.

在式①中令 $x=0$ 得

$$f(f(0)+f(y))=f(0)+y,$$

知 f 为满射.

在式①中令 x 为 $f(x)$ 的零根 a. 则

$$f(f(y))=y.$$

在式①中用 $f(x)$ 代替 x 得

$$f(x+f(y))=x+y. \quad ②$$

在式②中令 $y=a$ 得 $f(x)=x+a$.

代入式①得

$$f(x+a+y+a)=x+a+y,$$

即 $x+y+3a=x+y+a\Rightarrow a=0$.

故 $f(x)=x$.

2. $\dfrac{9\pi\sqrt[3]{9V^2}}{4}$.

设 h、a、R 分别为正四棱锥的高、底面边长、外接球半径. 则

$$V=\frac{1}{3}a^2h\Rightarrow a^2=\frac{3V}{h}.$$

由垂径定理知 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=h(2R-h)$.

故 $2R=\dfrac{a^2+2h^2}{2h}=\dfrac{3V}{2h^2}+h$

$$=\frac{3V}{2h^2}+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{3V}}{2}.$$

当且仅当 $h=\sqrt[3]{3V}$ 时,上式等号成立.

从而,$S_{球面}=4\pi R^2\geqslant\dfrac{9\pi\sqrt[3]{9V^2}}{4}$.

3. 2 011.

由柯西不等式知

$$(S+2\,011)(S+a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{2\,011}a_1)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{2\,011}+\underbrace{1+\cdots+1}_{2\,011个})\cdot$$

$$(a_2+a_3+\cdots+a_1+a_1a_2+\cdots+a_{2\,011}a_1)$$

$$\geqslant[2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\cdots+\sqrt{a_{2\,011}a_1})]^2.$$

由于等号成立,故

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_{2\,011}}{a_1}=\frac{1}{a_1a_2}=\cdots=\frac{1}{a_{2\,011}a_1}.$$

从而,$a_1=a_2=\cdots=a_{2\,011}=1$.

因此,$S=2\,011$.

4. 无数.

过点 Q 任作一个平面 T_1 与该立方体表面交出一条封闭曲线 Γ_1,点 Q 在曲线内部.

设曲线 Γ_1 上点 N_0 到 Q 的距离最小. 延长 N_0Q 与曲线 Γ_1 交于点 M_0. 设 N_α 为曲线 Γ_1 上从 N_0 出发、以 Q 为中心顺时针转 α 角的点,$N_\alpha Q$ 与曲线 Γ_1 交于点 M_α.

设 $f(\alpha)=QN_\alpha-QM_\alpha(\alpha\in[0,\pi])$.

显然,$f(\alpha)$ 为连续函数.

又 $f(0)\leqslant 0$,$f(\pi)\geqslant 0$,故存在 $\alpha\in[0,\pi]$,使 $f(\alpha)=0$,即在平面 T_1 上存在一条直线 l_1 满足条件.

假设已有 k 条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_k$ 满足条件. 则过点 Q 作任一平面 T_{k+1},使

$$l_i\notin T_{k+1}(i=1,2,\cdots,k).$$

同上,知存在一条直线 $l_{k+1}\in T_{k+1}$ 满足条件.

5. 1.

设 $f(x)=|1-|2-\cdots-|2\,011-x|\cdots||$.

则 $f(x)=||\cdots|x-2\,011|-\cdots-2|-1|$.

令 $f_k(x)=|x-k|(k=1,2,\cdots,2\,011)$.

则 $f(x)=f_1(f_2(\cdots f_{2\,011}(x)\cdots))$.

由 $y=f_k(x)$ 的图像,知 $y=f(x)$ 为若干条线段及两条射线(斜率为 ±1)连成的折线,其折角顶点为整点且若 $f(x_0)=0$,则 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的一个折角顶点.

由 $|||0-(k+3)|-(k+2)|-(k+1)|-k|=0$,

知 $f(0)=0,f(1)=1,f(2)=0$.

由 $y=x$ 及 $y=f(x)$ 的图像知

$f(x)=x\Leftrightarrow x\in[0,1]$.

所以,$x_{\max}=1$.

6. 5.

从 1 ~2 011 中取 1 005 个偶数,其和为

$$\frac{1\,005(2+2\,010)}{2}=1\,011\,030.$$

换下 2,4,6,8,10,换上 2 003,2 005,2 007,2 009,2 011,增加了

$2\,001\times5=10\,005$,

总和变为 1 021 035.

故至少有 5 个奇数.

7. $\frac{41}{2\,145}$.

首先,将 4×4 棋盘染黑白两色,使黑、白两种格子各有 8 个,且每行(或列)中同色的格子有偶数个.

分三种情况讨论:

(1)若第一列为两黑两白,则该列有 C_4^2 种染法.

考虑后三列每行黑格的个数,则有

$1+2\times3\times2+3\times2\times2+3\times3=34$

种染法.

(2)若第一列为四黑,则后三列共有

$3+C_3^2C_4^2=21$

种染法.

(3)若第一列为四白,则后三列共有 21 种染法.

对于以上每种染法,将 1 ~16 中的偶数填入黑格中,奇数填入白格中,得到满足条件的填法.

故所求概率为

$$\frac{(6\times34+21\times2)\times(8!)^2}{16!}=\frac{41}{2\,145}.$$

8. 小于.

将半径为 R 的三个圆盘 $G(O_i,R)(i=1,2,3)$ 两两外切地放入以格点为顶点的网格中,则必有一个单位网格其顶点 $A、B、C、D$ 分别包含在三个圆盘中.

【注】若一个单位网格的顶点在四个圆盘中,则 $R\leqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

不妨设 $A、B\in G(O_1,R)$,$C\in(O_2,R)$,$D\in G(O_3,R)$(如图 1).

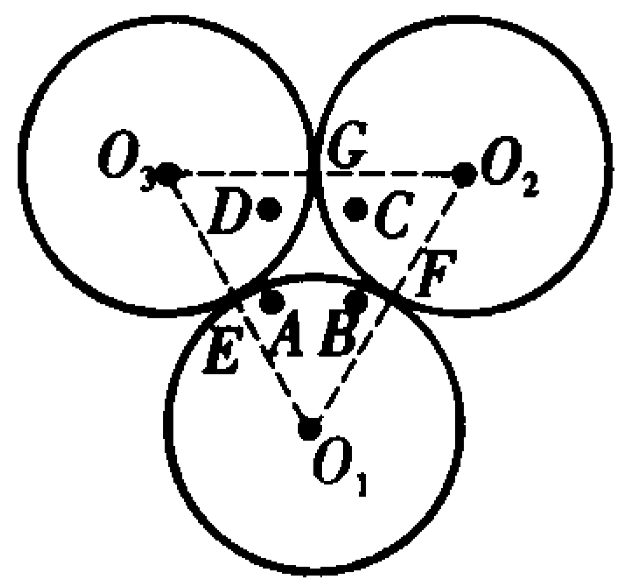

图 1

设 $\odot O_i(i=1,2,3)$ 的三个切点分别为 $E、F、G$. 不妨设点 D 比 C 离 EF 近.

过 D 作 EF 的平行线与 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 的弧 $\overset{\frown}{FG}$、$\overset{\frown}{EG}$ 交于点 C'、D',分别过 C'、D' 作 EF 的垂线与 $\odot O_1$ 的弧 $\overset{\frown}{EF}$ 交于点 B'、A'.

则四边形 $A'B'C'D'$ 为矩形,且

$C'D'=2a\leqslant1,A'D'=b\leqslant1$.

作 $l_1/\!/l_2/\!/O_1G$,且 $l_i(i=1,2)$ 到 O_1G 的距离为 $\frac{1}{2}$.

设 l_1 与弧 $\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{EG}$ 交于点 A''、D'',l_2 与弧 $\overset{\frown}{EF}$、$\overset{\frown}{FG}$ 交于点 B''、C''. 则

$A''D''=B''C''\leqslant b\leqslant1$.

故$\sqrt{R^2-\left(R-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+1\geqslant\sqrt{3}R$,

即 $$\sqrt{R-\frac{1}{4}}+\sqrt{R^2-\frac{1}{4}}\geqslant\sqrt{3}R-1. \quad ①$$

但当 $R=4$ 时,不等式①不成立,即当 $R=4$时,不能将所有格点覆盖,且当 $R>4$ 时,图 1 中的空隙(曲线△ EFG)成比例扩大,从而也不能将所有格点覆盖.

二、9. 设⊙O 上任一点为

$A(r\cos\alpha,r\sin\alpha)(\alpha\in[0,2\pi))$.

则 A 所对应的椭圆的切点弦方程为

$$\frac{xr\cos\alpha}{a^2}+\frac{yr\sin\alpha}{b^2}=1. \quad ①$$

取一椭圆$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{d^2}=1$($c$、$d$ 待定).

于是,过其上一点 $B(c\cos\alpha,d\sin\alpha)$的切线为

$$\frac{xc\cos\alpha}{c^2}+\frac{yd\sin\alpha}{d^2}=1. \quad ②$$

将式②与式①对照,取 $c=\frac{a^2}{r},d=\frac{b^2}{r}$. 则上述所有椭圆 C 的切点弦都是

$$\frac{r^2x^2}{a^4}+\frac{r^2y^2}{b^4}=1 \quad ③$$

的切线.

故式③即为所求区域的边界.

从而,所求区域为椭圆③的内部.

10. 记第 s 个与第 $t(1\leqslant s<t\leqslant50)$个纪念品为同一人所得. 则

$$100\left|\left[\frac{t(t+1)}{2}-\frac{s(s+1)}{2}\right]\right.,$$

即 $200\mid(t-s)(t+s+1)$.

显然,$t+s+1\leqslant100$,且 $t-s$ 与 $t+s+1$ 的奇偶性不同.

(1)如果 $8\mid(t+s+1)$,则$25\nmid(t+s+1)$.

(i)若 $5\mid(t+s+1)$,则

$t+s+1=40k(k=1,2)$.

又 $5\mid(t-s)$,故 $t\equiv s\equiv2\pmod 5$.

所以,$(s,t)=(5r+2,40k-5r-3)$,其中,$r=0,1,\cdots,4k-1;k=1,2$.

经计算

$(s,t)=(2,37),(7,32),(12,27),$
$(17,22),(32,47),(37,42)$.

(ii)若 $5\nmid(t+s+1)$,则

$25\mid(t-s)\Rightarrow t-s=25$.

由 $8\mid(t+s+1)\Rightarrow8\mid(2s+26)$

$\Rightarrow4\mid(s+1)\Rightarrow s\equiv3\pmod 4$.

故$(s,t)=(3,28),(7,32),(11,36),$
$(15,40),(19,44),(23,48)$.

(2)如果 $8\mid(t-s)$,则 $25\nmid(t-s)$.

(i)若 $5\mid(t-s)$,则

$40\mid(t-s)\Rightarrow t-s=40$.

又 $5\mid(t+s+1)\Rightarrow5\mid(2s+41)$

$\Rightarrow5\mid(2s+1)\Rightarrow s\equiv2\pmod 5$.

故$(s,t)=(2,42),(7,47)$.

(ii)若 $5\nmid(t-s)$,则

$25\mid(t+s+1)\Rightarrow t+s+1=25,75$.

故$(s,t)=(4,20),(8,16),(25,49),$
$(29,45),(33,41)$.

综上,$(2,37,42)$与$(7,32,47)$分别被 C_3 与 C_{28}得到,其余各人至多得到 2 个纪念品.

11. 要使半径为$\frac{1}{2}$的小球完全放在大球 $D(O,4)$内,它的球心应与球面的距离不小于$\frac{1}{2}$,即球心在球 $D\left(O,4-\frac{1}{2}\right)$内,该球体积为

$$\frac{4\pi}{3}\left(4-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{343\pi}{6}.$$

此外,小球心应与任何一个正方体的表面的距离不小于$\frac{1}{2}$,于是,每个正方体在大球内所控制的体积为

$$3\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+4=\frac{11\pi}{12}+4,$$

即小球心不在以该正方体的棱为中心轴、$\frac{1}{2}$为半径的$\frac{1}{4}$圆柱(12 个),以顶点为球心、$\frac{1}{2}$

为半径的$\frac{1}{8}$球(8 个),以面为底面、$\frac{1}{2}$为高的长方体(6 个)及该正方体内.

类似地,每个小球在大球内所控制的体积为$\frac{4\pi}{3}$.

设已放了 l 个小球. 则可放第 $l+1$ 个小球的充分条件是

$$\frac{343\pi}{6}-24\left(\frac{11\pi}{12}+4\right)-l\cdot\frac{4\pi}{3}\geqslant 0,$$

即 $$l\leqslant\frac{3}{4}\left(\frac{343}{6}-22\right)-96\cdot\frac{3}{4\pi}$$

$$=\frac{211}{8}-\frac{72}{\pi}\approx 3.457.$$

故至少可以放 4 个小球.

加 试

一、必要性.

如图 2,设 BD、CE、OP 三线共点于 F,OP 与$\odot O$ 交于点 I,$\odot O$ 的半径为 r. 在射线 OF 上取点 P',使

$$OF\cdot OP'=r^2.$$

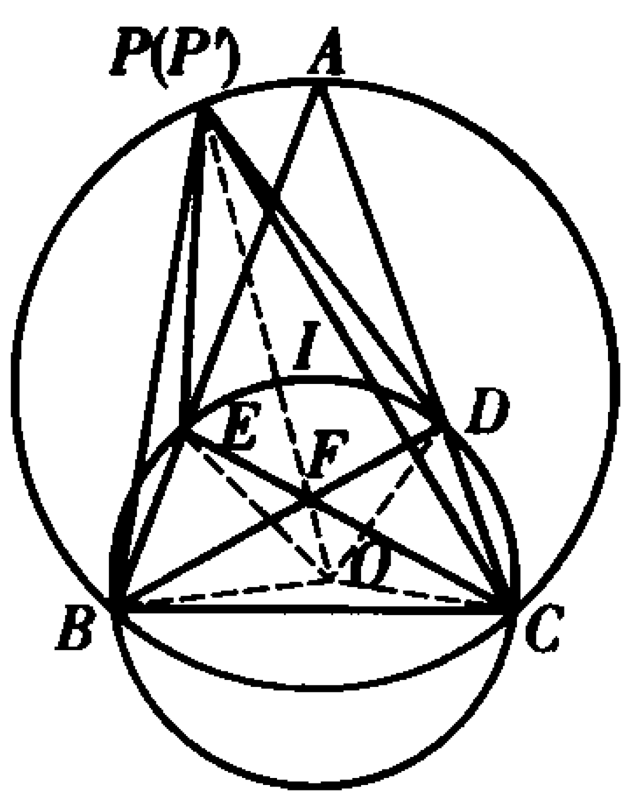

图 2

则 $OF\cdot FP'$

$=OF(OP'-OF)$

$=r^2-OF^2=BF\cdot FD=CF\cdot FE.$

于是,B、O、D、P',C、O、E、P' 分别四点共圆.

故$\angle BP'C=\angle BP'O+\angle CP'O$

$=\angle BDO+\angle CEO$

$=180^\circ-\angle BCD-\angle CBE=\angle BAC.$

因此,P'为射线 OF 与$\triangle ABC$ 外接圆的交点,即点 P'与 P 重合.

从而,B、O、D、P,C、O、E、P 分别四点共圆.

由 $OB=OD=OI$,$OC=OE=OI$ 及三角形内心性质,知 I 为$\triangle PBD$、$\triangle PCE$ 的内心.

充分性.

设 I 是$\triangle PBD$、$\triangle PCE$ 的共同内心. 则

$\angle BPI=\angle IPD$,$\angle EPI=\angle IPC.$

因此,$\angle BPE=\angle CPD.$

又$\angle PBE=\angle PBA=\angle PCA=\angle PCD$,

于是,$\angle PEA=\angle PDA.$

故 P、E、D、A 四点共圆,即 P 为$\triangle ADE$ 的外接圆与$\triangle ABC$ 外接圆的交点(另一交点为 A).

从而,满足充分性的点 P 是唯一的.

又由前面的必要性证明知射线 OF 与$\triangle ABC$外接圆的交点满足充分性,故 OP、BD、CE 三线共点.

二、用构造法证明.

如图 3,作$\triangle ABC$,使

$AB=x+y$,

$BC=y+z$,

$CA=z+x$.

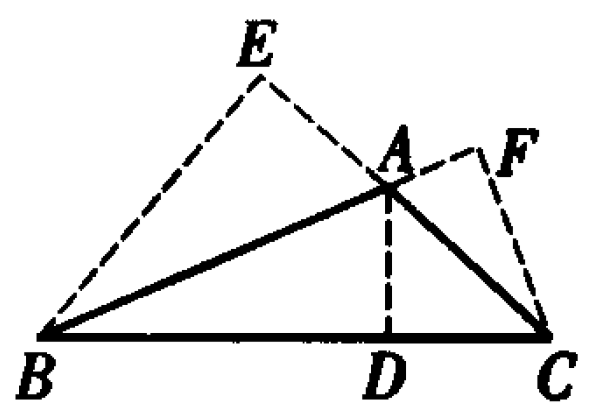

图 3

在直线 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F,满足

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\frac{5}{2},\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\frac{2}{-1},\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\frac{-1}{5}.$$

由斯特瓦尔特定理知

$$AD^2=\frac{2}{7}AB^2+\frac{5}{7}AC^2-\frac{10}{49}BC^2$$

$$=\frac{2}{7}(x+y)^2+\frac{5}{7}(x+z)^2-\frac{10}{49}(y+z)^2$$

$$=\frac{x}{7}(7x+4y+10z)+\frac{1}{49}(2y-5z)^2,$$

$$BE^2=2(x+y)^2-(y+z)^2+2(x+z)^2$$

$$=4x(x+y+z)+(y-z)^2,$$

$$CF^2=\frac{5}{4}(x+z)^2-\frac{1}{4}(y+z)^2+\frac{5}{16}(x+y)^2$$

$$=\frac{5x}{16}(5x+2y+8z)+\frac{1}{16}(y-4z)^2.$$

又由海伦公式知

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

于是,所证不等式等价于

$$\alpha\times\frac{1}{2}BC\cdot AD+\beta\times\frac{1}{2}CA\cdot BE+\gamma\times\frac{1}{2}AB\cdot CF$$
$$\geqslant S_{\triangle ABC}. \qquad ①$$

显然，$\frac{1}{2}BC\cdot AD\geqslant S_{\triangle ABC}$，

$\frac{1}{2}CA\cdot BE\geqslant S_{\triangle ABC}$，

$\frac{1}{2}AB\cdot CF\geqslant S_{\triangle ABC}$.

而 $\alpha+\beta+\gamma=1$，故式①成立.

三、记正整数 k 最末两位非零数字为 $f(k)$.

下面在模 100 的意义下讨论.

显然，$5\nmid f(k!)$，且若 $5\nmid f(k)$，$5\nmid f(l)$，则 $f(kl)\equiv f(k)f(l)$. 故

$$f(2\,011!)\equiv f\left(\frac{2\,011!}{2\,000!}\right)f(2\,000!)$$
$$\equiv 68f(2\,000!),$$
$$f(2\,000!)$$
$$\equiv f\left(\prod_{i\in A_1}g_{200}(i)\right)f\left(\prod_{i\in A_2}g_{200}(i)\right)f(g_{200}(10)),$$

其中，$A_1=\{1,2,3,7,8,9\}$，$A_2=\{4,5,6\}$，

$$g_k(i)=\prod_{j=0}^{k-1}(10j+i).$$

易知，$g_k(i)g_k(10-i)\equiv i^k(10-i)^k(i=1,2,3,4)$，且当 $20\mid k$ 时，

$$g_k(i)\equiv i^k\equiv\begin{cases}1, & i=1,3,7,9;\\ 76, & i=2,4,6,8.\end{cases}$$

则 $f\left(\prod_{i\in A_1}g_{200}(i)\right)\equiv 76^2\equiv 76$，

$$f\left(\prod_{i\in A_2}g_{200}(i)\right)$$
$$\equiv\left(\prod_{j=0}^{199}\frac{10j+4}{2}\right)\left(\prod_{j=0}^{199}\frac{10j+6}{2}\right)f\left(2^{400}\prod_{j=0}^{199}(10j+5)\right)$$
$$\equiv\left(\prod_{i\in A_1\setminus\{1,9\}}g_{100}(i)\right)f\left(2^{200}\prod_{j=1}^{200}(2j-1)\right)$$
$$\equiv 76f\left(2^{200}\prod_{j=1}^{200}(2j-1)\right),$$
$$f(g_{200}(10))=f(200!).$$

故 $f(2\,000!)$
$$\equiv 76f\left(2^{200}\prod_{j=1}^{200}(2j-1)\right)f(200!)$$
$$\equiv 76f(400!)$$
$$\equiv 76f\left(\prod_{i\in A_1}g_{40}(i)\right)f\left(\prod_{i\in A_2}g_{40}(i)\right)f(g_{40}(10)).$$

又 $f\left(\prod_{i\in A_1}g_{40}(i)\right)\equiv 76$，

$$f\left(\prod_{i\in A_2}g_{40}(i)\right)$$
$$\equiv\left(\prod_{i\in A_1\setminus\{1,9\}}g_{20}(i)\right)f\left(2^{40}\prod_{j=1}^{40}(2j-1)\right)$$
$$\equiv 76f\left(2^{40}\prod_{j=1}^{40}(2j-1)\right),$$
$$f(g_{40}(10))=f(40!),$$

故 $f(2\,000!)\equiv 76f(80!)$
$$\equiv 76f\left(\prod_{i\in A_1}g_8(i)\right)f\left(\prod_{i\in A_2}g_8(i)\right)f(g_8(10)).$$

而 $f\left(\prod_{i\in A_1}g_8(i)\right)\equiv\prod_{i=1}^{3}g_8(i)g_8(10-i)$
$$\equiv\prod_{i=1}^{3}i^8(10-i)^8\equiv 76,$$
$$f\left(\prod_{i\in A_2}g_8(i)\right)\equiv\left(\prod_{i\in A_1\setminus\{1,9\}}g_4(i)\right)f\left(2^8\prod_{j=1}^{8}(2j-1)\right)$$
$$\equiv 2^4\times 7^4\times 3^4\times 8^4f(2^8\times 15!!)\equiv 44,$$
$$f(g_8(10))=f(8!)=32,$$

故 $f(2\,000!)\equiv 76^2\times 44\times 32\equiv 8$.

所以，$f(2\,011!)\equiv 68\times 8\equiv 44$.

四、按照国际象棋棋盘的染色规则交替地将各个单位正方体染为黑色或白色，其中，(1,1,1)为黑色.

当 abc 为偶数时，任两个异色的小正方体满足条件；当 abc 为奇数时，任两个黑色的小正方体满足条件.

首先证明三个引理.

引理 1 (i)在 $1\times l\times 2m$ 立方体中，异色的两个小正方体满足条件；

(ii)在 $1\times(2l+1)\times(2m+1)$ 立方体中，黑色的两个小正方体满足条件.

引理 1 的证明 由文[1]加试第四题可证.

引理 2　在 $k\times l\times 2m$ 立方体中，

$A(1,i_1,j_1)\leftrightarrow B(1,i_2,j_2)$

满足条件，其中，$i_1+j_1\equiv 1+i_2+j_2 \pmod 2$，即 A、B 异色.

引理 2 的证明　在第 1 层中，由引理 1(i)，有 $A\leftrightarrow B$ 满足条件，其路径为

$A=A_1 \rightharpoondown A_2 \rightharpoondown \cdots \rightharpoondown A_{2ml}=B$，

其为黑白相间的. 则在 $k\times l\times 2m$ 立方体中，对 $A_{2i-1}(1,s,t)$、$A_{2i}(1,s',t')$，用

$(1,s,t)\rightharpoonup(2,s,t)\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup(k,s,t)\rightharpoondown$

$(k,s',t')\rightharpoonup(k-1,s',t')\rightharpoonup\cdots\rightharpoonup(1,s',t')$

代替 $A_{2i-1}\rightharpoondown A_{2i}$，而 $A_{2i}\rightharpoondown A_{2i+1}$ 不变.

【注】$\rightharpoondown$ 为同一层相邻，$\rightharpoonup$ 为不同层相邻.

故在 $k\times l\times 2m$ 立方体中，$A=A_1\leftrightarrow A_{2ml}=B$ 满足条件.

引理 3　在 $k\times l\times 2m$ 立方体中，

$A(1,i_1,j_1)\leftrightarrow B(k,i_2,j_2)$

满足条件，其中，$i_1+j_1\equiv k+i_2+j_2 \pmod 2$，即 A、B 异色.

引理 3 的证明　在第 1 层中，由引理 1(i)，有 $A\leftrightarrow B_1$（与 A 异色）满足条件，取第 2 层中与 B_1 相邻的小正方体为 A_2；类似有

$A_2\leftrightarrow B_2 \rightharpoonup A_3\leftrightarrow B_3 \rightharpoonup\cdots\rightharpoonup A_k\leftrightarrow B$，

其中，A_i、B_i 分别为第 i 层与 A、B 同色的小正方体.

故在 $k\times l\times 2m$ 正方体中，$A\leftrightarrow B$ 满足条件.

回到原题.

(1) abc 为偶数.

不妨设 c 为偶数，异色的小正方体 A、B 分别在第 k、l 层（$1\leqslant l\leqslant k\leqslant a$）.

若 $k\geqslant l+2$，则将 $a\times b\times c$ 立方体按 $1\sim l$ 层、$l+1\sim k-1$ 层、$k\sim a$ 层分成三部分，在上、下两部分应用引理 2，在中间部分应用引理 1(i) 或引理 3，得到在 $a\times b\times c$ 立方体中的路径

$A\leftrightarrow B_k \rightharpoonup A_{k-1}\leftrightarrow B_{l+1}\rightharpoonup A_l\leftrightarrow B$

（A_i、B_i 同引理 3）.

若 $k=l+1$，则将 $a\times b\times c$ 立方体按 $1\sim l$ 层、$l+1\sim a$ 层分成两部分，类似得在 $a\times b\times c$ 立方体中的路径

$A\leftrightarrow B_k \rightharpoonup A_l\leftrightarrow B$.

若 $k=l$，则将 $a\times b\times c$ 立方体按 $1\sim l-1$ 层、l 层、$l+1\sim a$ 层分成三部分.

在第 l 层，由引理 1(i) 有

$A=C_1\rightharpoondown C_2\rightharpoondown\cdots\rightharpoondown C_{bc}=B$.

取 $1\leqslant i<i+1<j<j+1\leqslant bc$，则由引理 2 知在上、下两部分中分别有 $D_{l-1}\leftrightarrow E_{l-1}$，$D_{l+1}\leftrightarrow E_{l+1}$ 满足条件.

从而，在 $a\times b\times c$ 立方体中有路径

$A\rightharpoondown\cdots\rightharpoondown C_i\rightharpoonup D_{l-1}\leftrightarrow E_{l-1}\rightharpoonup C_{i+1}\rightharpoondown$

$\cdots\rightharpoondown C_j\rightharpoonup D_{l+1}\leftrightarrow E_{l+1}\rightharpoonup C_{j+1}\rightharpoondown\cdots\rightharpoondown B$，

其中，D_t、E_t 分别为第 t 层的小正方体.

(2) abc 为奇数.

若黑色的小正方体 A、B 在 $a\times b\times c$ 立方体的对角，则由引理 1(ii)，仿引理 2 可构造 $A\leftrightarrow B$ 路径满足条件；否则，$a\times b\times c$ 立方体有一面不含 A、B，且 A、B 到该面的投影不同. 不妨设 $A(i_1,j_1,k_1)$、$B(i_2,j_2,k_2)$，其中，i_1、$i_2>1$，$j_1<j_2$.

将 $a\times b\times c$ 立方体先按第 1 层、第 $2\sim a$ 层分成两部分，再将后者按第 $1\sim j_1$ 行、第 $j_1+1\sim b$ 行分成两部分.

因 $a-1$ 为偶数，所以，由 (1) 知在后两部分内分别有 $A\leftrightarrow B_2$，$B\leftrightarrow A_2$ 满足条件，其中，A_2、B_2 为第 2 层中的白色小正方体.

在第 1 层中分别取与 A_2、B_2 相邻的黑色小正方体，记为 B_1、A_1. 由引理 1(ii) 知 $A_1\leftrightarrow B_1$ 满足条件.

则 $a\times b\times c$ 立方体中有路径

$A\leftrightarrow B_2\rightharpoonup A_1\leftrightarrow B_1\rightharpoonup A_2\leftrightarrow B$.

故当 abc 为奇数时，所求为 $\frac{a^2b^2c^2-1}{4}$；

当 abc 为偶数时，所求为 $\frac{a^2b^2c^2}{2}$.

参考文献：

[1]　宋岐水. 数学奥林匹克高中训练题[J]. 中等数学，2009(5).

（宋　强　编拟）

数学奥林匹克问题

本期问题

初 291 设锐角△ABC 的三条高分别为 AD、BE、CF，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别与 EF、FD、DE 交于点 A'、B'、C'. 证明：

$S_{\triangle A'B'C'} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle DEF}$.

初 292 求 $\underbrace{\sqrt[3]{23+\sqrt[3]{23+\cdots+\sqrt[3]{23}}}}_{n个}$ $(n \geqslant 1)$ 的整数部分.

高 291 如图 1，$\angle XOY < 90°$，△ABC 的顶点 A 在 OY 上、边 BC 在 OX 上，且 $AB = AC$，BE、CF 是△ABC 的两条高线，⊙M 是△AOB 的内切圆、半径为 m，⊙N 是△AOC 的旁切圆、半径为 n. △ABC、△AEF 的外接圆半径为 R、r. 求证：$R + r = m + n$.

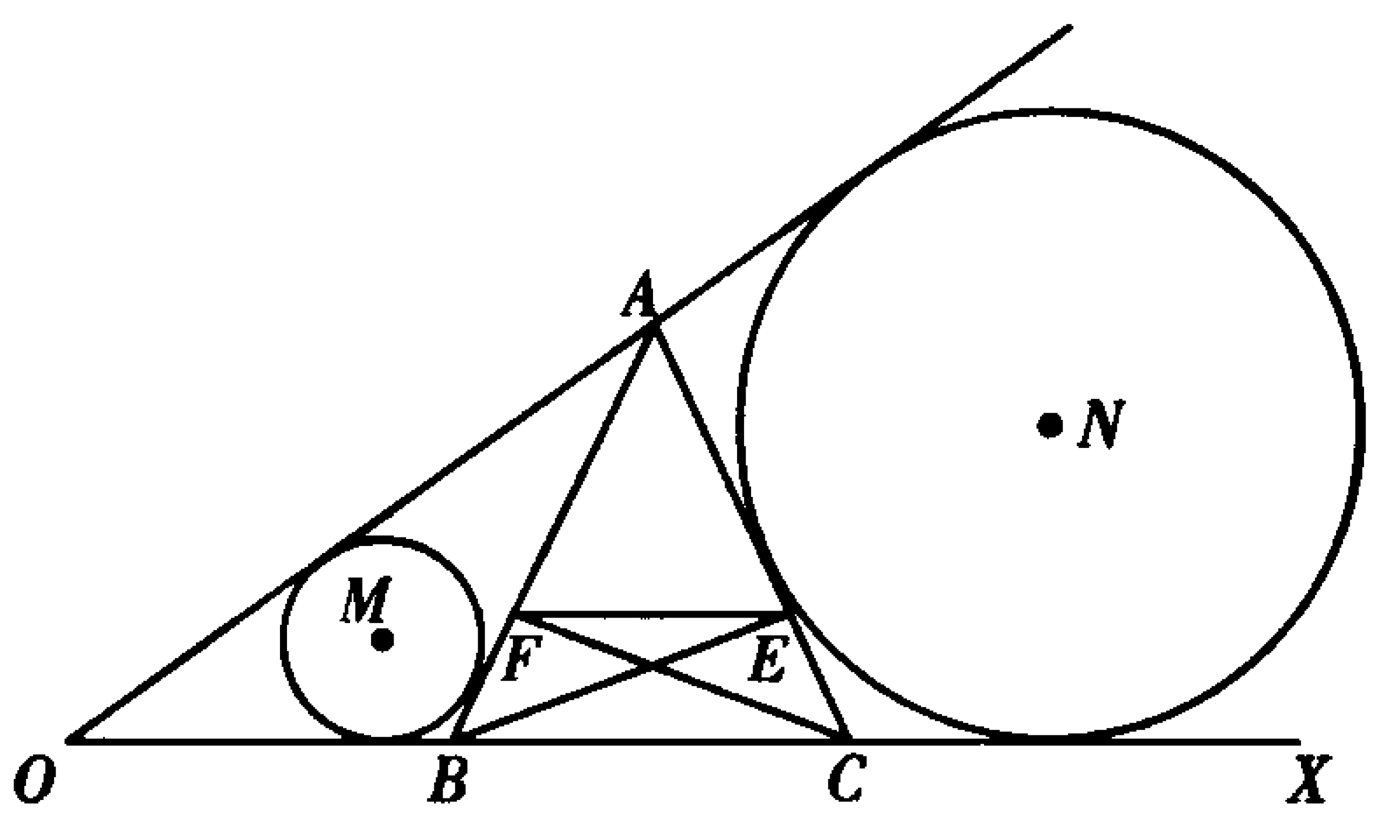

图 1

高 292 已知 P 是△ABC 内一点，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，且 $PD /\!/ AB$，$PE /\!/ BC$，$PF /\!/ CA$，记△AEF、△BFD、△CDE、△DEF 的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_0. 求证：$S_1S_2S_3 \leqslant \frac{8}{27}S_0^3$，等号成立当且仅当 P 是△ABC 的重心.

上期问题解答

初 289 网民上网的级别标志是使用星星、月亮、太阳. 规定：全天在 0 点至 24 点之间上网时间累计满 2 小时就算上网 1 天. 从第一天上网开始算起，上网满 5 天时，级别标志为 1 颗星星；又满 7 天时，级别标志为 2 颗星星；……（得到第 n 颗星星要比得到第 $n-1$ 颗星星时多耗时 2 天）. 每够 4 颗星星就改用 1 个月亮，每够 4 个月亮就改用 1 个太阳（即 16 颗星星为 1 个太阳）. 如果从 2005 年 7 月 1 日开始，每天不间断上网，请问：到 2011 年元旦这一天的时候，级别标志是什么？再过多少天，进入下一级别标志？

解 由 2005 年 7 月 1 日为上网第 1 天，可知 2011 年元旦为上网的第

$185 + 365 \times 5 + 1$(2008 年为闰年，有 366 天)

$= 2\ 011$ 天.

设 2011 年元旦这一天的级别标志是 n 颗星星. 可知 n 为满足

$$5 + 7 + \cdots + (2n + 3) < 2\ 011$$

的最大值.

由 $\frac{n(5 + 2n + 3)}{2} < 2\ 011$，即

$$n^2 + 4n - 2\ 011 < 0,$$

解得 $n \leqslant 42$.

由 $42 = 16 + 16 + 4 + 4 + 1 + 1$，可知 2011 年元旦这一天的级别标志是 2 个太阳、2 个月亮和 2 颗星星.

由 $\frac{43 \times (5 + 2 \times 43 + 3)}{2} - 2\ 011 = 10$，可知进入下一级别标志要再过 10 天.

（田永海　黑龙江省绥化市教育学院，152054）

初290 如图2,已知$\odot O_1$与$\odot O_2$交于点M、N,MA是$\odot O_2$的切线与$\odot O_1$交于点A,MB是$\odot O_1$的切线与$\odot O_2$交于点B,延长MN到点P,使$MN=NP$,PA与$\odot O_1$交于点C,PB与$\odot O_2$交于点D.求证:C、N、D三点共线,且$CN=ND$.

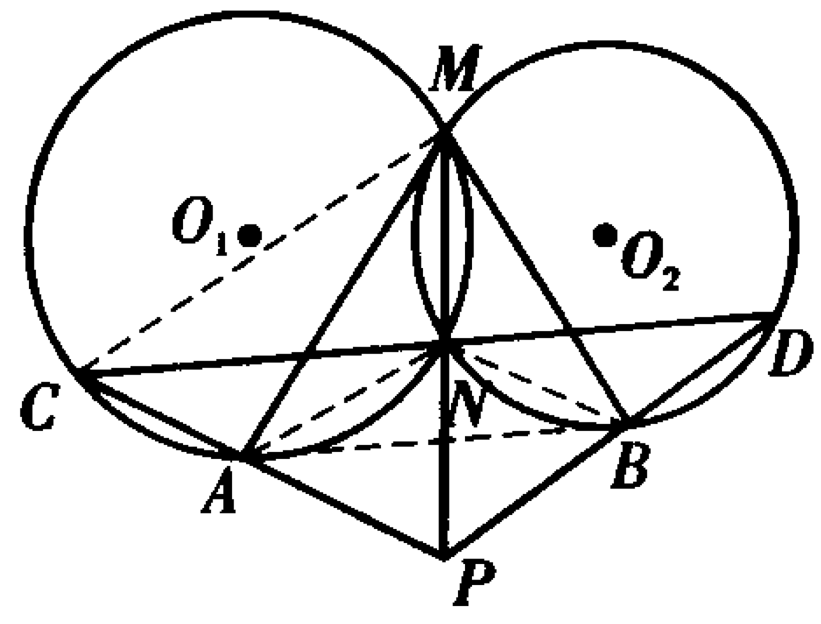

图2

证明 如图2,联结AB、NA、NB、MC.

因为MB、MA分别是$\odot O_1$、$\odot O_2$的切线,所以,

$\angle MAN=\angle BMN$,$\angle AMN=\angle MBN$

$\Rightarrow \triangle MAN \backsim \triangle BMN$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MN}{NB}$.

又$MN=NP$,则

$\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{NP}{NB} \Rightarrow \dfrac{NP}{MA}=\dfrac{NB}{MB}$.

而$\angle PNB=\angle MBN+\angle BMN$

$=\angle AMN+\angle BMN=\angle AMB$,

则$\triangle PNB \backsim \triangle AMB$.

故$\angle NPB=\angle MAB$.

于是,A、P、B、M四点共圆.

因此,$\angle MAP=\angle MBD=\angle MND$.

又$\angle CAM=\angle CNM$,而

$\angle CAM+\angle MAP=180°$,

则$\angle CNM+\angle MND=180°$.

因此,C、N、D三点共线.

从而,$\angle MCN=\angle PMB=\angle NDB$.

于是,$MC /\!/ PD$,有$\triangle MCN \cong \triangle PDN$.

故$CN=ND$.

(吴远宏 辽宁省大连三洋压缩机有限公司,116033)

高289 对任意一个正整数$n(n\geqslant 2)$,试求:

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right]+\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

的值.

解 注意到

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right]$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\log_{\frac{3}{2}}\frac{k^3+1}{k^3-1}=\log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}\right), \quad ①$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}=\frac{n(n+1)}{2}, \quad ②$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2+(k-1)+1}{k^2+k+1}$$

$$=\frac{3}{n^2+n+1}. \quad ③$$

又 $1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$

$$=\left[\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]^2,$$

则$\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\left[1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(1+n)^2}\right]$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}. \quad ④$$

将式②、③代入式①得

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right]$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left[\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3}{n^2+n+1}\right]. \quad ⑤$$

由式④、⑤得

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right]+\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left[\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{3}{n^2+n+1}\right]+\log_{\frac{3}{2}}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}=1.$$

(徐万镒 宁夏回族自治区教研室,750001)

高290 设x_1、x_2是实系数一元二次方程$x^2-bx+c=0$的两个根.求$x_1^n+x_2^n(n\in \mathbf{N}_+)$.

解 由韦达定理得

$x_1+x_2=b, x_1x_2=c.$

则 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c.$

令 $x_1^n+x_2^n=S_n$. 则 $S_n=bS_{n-1}-cS_{n-2}$. 故

$S_3=bS_2-cS_1=b(b^2-2c)-cb=b^3-3bc.$

同理，$S_4=b^4-4b^2c+2c^2$，

$S_5=b^5-5b^3c+5bc^2$，

……

$S_9=b^9-9b^7c+27b^5c^2-30b^3c^3+9bc^4$，

$S_{10}=b^{10}-10b^8c+35b^6c^2-50b^4c^3+25b^2c^4-2c^5.$

为了寻求 S_n 的一般表达式，可将 S_9、S_{10} 的展开式各项系数与组合数联系，S_9、S_{10} 可分别改写如下：

$$S_9=b^9-\mathrm{C}_9^1b^7c+(\mathrm{C}_8^2-\mathrm{C}_6^0)b^5c^2-(\mathrm{C}_7^3-\mathrm{C}_5^1)b^3c^3+(\mathrm{C}_6^4-\mathrm{C}_4^2)bc^4,$$

$$S_{10}=b^{10}-\mathrm{C}_{10}^1b^8c+(\mathrm{C}_9^2-\mathrm{C}_7^0)b^6c^2-(\mathrm{C}_8^3-\mathrm{C}_6^1)b^4c^3+(\mathrm{C}_7^4-\mathrm{C}_5^2)b^2c^4-(\mathrm{C}_6^5-\mathrm{C}_4^3)c^5.$$

于是，可猜测：

$$S_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i(\mathrm{C}_{n+1-i}^i-\mathrm{C}_{n-1-i}^{i-2})b^{n-2i}c^i,$$

其中，$[x]$ 为高斯函数；定义：

若 $m<0$，$\mathrm{C}_n^m=0$.

下面用数学归纳法证明此猜测正确.

当 $n=1$、2 时，显然成立.

假设当 $n=k-1$、k 时猜测成立.

当 $n=k+1$ 时，

$$S_{k+1}=bS_k-cS_{k-1}$$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+1-i}^i-\mathrm{C}_{k-1-i}^{i-2})b^{k+1-2i}c^i-\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^i(\mathrm{C}_{k-i}^i-\mathrm{C}_{k-2-i}^{i-2})b^{k-1-2i}c^{i+1}.$$

当 k 为偶数时，

$$S_{k+1}=b^{k+1}+\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+1-i}^i-\mathrm{C}_{k-1-i}^{i-2})b^{k+1-2i}c^i-\sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}(-1)^i(\mathrm{C}_{k-i}^i-\mathrm{C}_{k-2-i}^{i-2})b^{k-1-2i}c^{i+1}$$

$$=b^{k+1}+\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+1-i}^i-\mathrm{C}_{k-1-i}^{i-2})b^{k+1-2i}c^i+\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+1-i}^{i-1}-\mathrm{C}_{k-1-i}^{i-3})b^{k+1-2i}c^i$$

$$=b^{k+1}+\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+2-i}^i-\mathrm{C}_{k-i}^{i-2})b^{k+1-2i}c^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]}(-1)^i(\mathrm{C}_{k+2-i}^i-\mathrm{C}_{k-i}^{i-2})b^{k+1-2i}c^i.$$

当 k 为奇数时，类似可证.

故 $x_1^n+x_2^n$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^i(\mathrm{C}_{n+1-i}^i-\mathrm{C}_{n-1-i}^{i-2})b^{n-2i}c^i.$$

（徐　道　江苏省如皋市教师进修学校，226500）