目　次

数学活动课程讲座

极端原理 …… 朱华伟(2)

完全平方数 …… 安庆旺(6)

命题与解题

谈谈无穷递降法 …… 王连笑(9)

专题写作

卡尔松不等式及其应用 …… 李奋平(17)

学生习作

一个源于 Weierstrass 函数的数学问题 …… 陈波宇(19)

一道竞赛题的另证 …… 程　川(20)

竞赛之窗

2010 年新知杯上海市初中数学竞赛 …… (21)

2010 年北京市中学生数学竞赛复赛(高一) …… (25)

2010 年全国高中数学联赛山西省预赛 …… (28)

2010 年全国高中数学联赛四川省预赛 …… (31)

2010 年全国高中数学联赛广东省预赛 …… (36)

课外训练

数学奥林匹克初中训练题(140) …… 柯新立(38)

数学奥林匹克高中训练题(140) …… 贺航飞(41)

数学奥林匹克问题 …… 王　宇　宋宝莹　李建国　等(47)

中等数学

High-School Mathematics

2011 年第 4 期(总第 208 期)

(2011 年 4 月中旬出版)

编辑部电话　022-23766781

发行部电话　022-23542233

E-mail　zdsx@chinajournal.net.cn

期刊基本参数:CN 12-1121/O1 * 1982 * m * 16 * 48 * zh * P * ¥4.50 * 11500 * 14 * 2011-4

数学活动课程讲座

极端原理

朱华伟
(广州大学计算机科学与教育软件学院,510006)

中图分类号:O141.2 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2011)04-002-04

(本讲适合初中)

首先,看一个有趣的放硬币游戏.

两人轮流往一张圆桌上平放一枚同样大小的硬币,条件是后放的硬币不能压在先放的硬币上,直到桌子上再也放不下一枚硬币为止.规定:放入最后一枚硬币者获胜.问:先放的人有没有必胜策略?

这道题可以这样思考:一般性的问题比较复杂,先将其极端化.

注意到所放硬币总数 $n\geqslant1$,取其极端情形 $n=1$,即假设桌子小到只能放下一枚硬币,得出特殊问题的解,即先占中心者为胜.然后根据圆桌的对称性,先放者把硬币放在中心位置 O,若后放者把硬币放在 C 处,则先放者把硬币放在与中心位置 O 的对称点 C' 处,这样只要后放者能放下硬币,先放者总能根据对称性,放下硬币,最终获胜.

这种思考问题的方法称为极端原理.

从问题的极端情形考虑,对于数值问题来说,就是指取它的最大或最小值(如最大或最小的数,最大或最小的距离,最大或最小的边(角、面积),得分最多或最少的队员等);对于一个动点来说,指的是线段的端点,三角形的顶点等等.

其实,极端化的假设就是为题目增加了一个条件,使求解变得容易得多.

收稿日期:2010-09-17

例1 设有 $n(n\geqslant2)$ 名选手进行比赛,任两名选手都进行一场比赛,每场比赛均决出胜负.求证:存在选手 A,使得其他的任一名选手,或是输给 A,或是输给被 A 打败的某一名选手.

证明 要寻找的选手 A,依直觉应是"实力"最强的选手.因此,在这 n 名选手中,设取胜的场次最多的一名选手为 A(考虑极端).

下面证明:选手 A 满足题目的要求.

对其他的任一名选手 B,若 B 不输给 A,即 B 胜 A.

因为 B 战胜的对手不多于 A 战胜的对手,所以,除 A、B 之外,A 战胜的对手必多于 B 战胜的对手.从而,必存在选手 C,是 A 战胜的,但不是 B 战胜的,即 B 输给被 A 打败的选手 C.故结论成立.

【评注】该题解法的关键是抓住了"取胜场次最多的一名选手",利用这一点,解决了解题者"无从着手"的难处,使证明过程简洁明快.

例2 把1 600颗花生分给100只猴子.证明:不管怎样分,至少有4只猴子得到的花生一样多,并设计一种分法,使得没有5只猴子得到的花生一样多.

证明 要使没有4只猴子得到的花生一样多,可以考虑极端情形.

最经济(即所用花生数目最少)的分法是 3 只得 0 颗,3 只得 1 颗,…,3 只得 32 颗,还有一只得 33 颗,这样分需花生数为

$$3\times(0+1+\cdots+32)+33=1\,617(\text{颗}).$$

可见,这样的分法已经超过了花生总数 1 600 颗.

所以,不管怎样分,至少有 4 只猴子分得的花生一样多.

没有 5 只猴子得到的花生一样多的分法是很多的. 例如,对前述极端情形稍作调整即可得到一种分法:4 只得 0 颗,3 只得 1 颗,3 只得 2 颗,…,3 只得 31 颗,2 只得 32 颗,还有一只得 48 颗,共计

$$3\times(0+1+\cdots+32)-32+48=1\,600(\text{颗}).$$

例 3　平面上给定 $n(n\geqslant 3)$ 个点,任三点不共线. 求证:在这 n 个点中存在三个点 A、B、C,使其余 $n-3$ 个点都在 $\triangle ABC$ 之外.

【分析】此题有多种思考方法,而最自然的想法是:面积越小的三角形,其形内的点越少,而形外的点越多,所以,要使其余 $n-3$ 个点都在 $\triangle ABC$ 之外,自然取面积最小的三角形.

证明　在 n 个点中任取两点 B、C,作线段 BC. 则其余 $n-2$ 个点都不在 BC 所在的直线上. 以 BC 为底边,其余 $n-2$ 个点为顶点可得 $n-2$ 个三角形. 取面积最小的记为 $\triangle ABC$,即为所求.

事实上,若 $\triangle ABC$ 内还有一点 A',则

$$S_{\triangle A'BC}<S_{\triangle ABC},$$

这与 $S_{\triangle ABC}$ 最小矛盾.

【评注】本题还可从以下几种极端情形着手:

(1)取其余 $n-2$ 个点到直线 BC 的距离最小的一点 A,则 $\triangle ABC$ 即为所求;

(2)其余 $n-2$ 个到 BC 的视角最大的点设为 A,则 $\triangle ABC$ 即为所求;

(3)以 B 为顶点,旋转 BC,首先交到的点(或说旋转角最小的点)设为 A,则 $\triangle ABC$ 即为所求.

以上四种思考方法,从不同角度取定一个几何量,在系统自身状态不断变化时考虑极端情形(最大或最小),从而使问题迎刃而解.

例 4　平面上有 n 个点,其中任三点都可组成三角形,且其面积均不超过 1. 证明:存在一个面积不超过 4 的三角形,它能覆盖住所有 n 个点.

证明　平面上由 n 个点组成的三角形的数目是有限的,其中必有一个面积最大的三角形(设为 $\triangle ABC$).

如图 1,过各顶点分别作对边的平行线,可得到一个新的 $\triangle A'B'C'$,有

$$S_{\triangle A'B'C'}=4S_{\triangle ABC}.$$

因 $S_{\triangle ABC}\leqslant 1$,

所以,$S_{\triangle A'B'C'}\leqslant 4$.

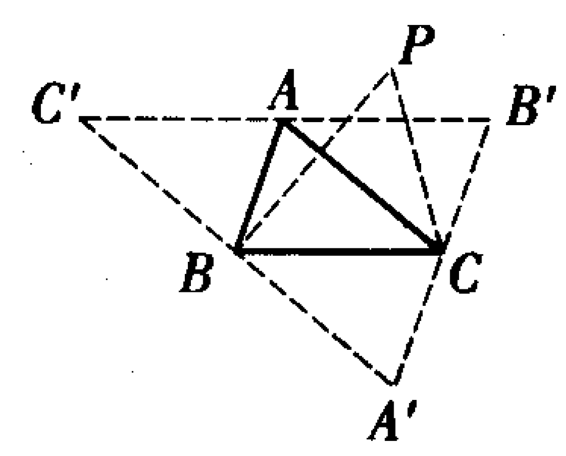

图 1

平面上的 n 个点全被 $\triangle A'B'C'$ 覆盖住,否则,设 $\triangle A'B'C'$ 外有一点 P,则有

$$S_{\triangle PBC}>S_{\triangle ABC},$$

这与 $S_{\triangle ABC}$ 最大矛盾.

【评注】由例 2 ~ 例 4 不难发现,利用极端原理解题的步骤是:选取适当的量——考虑极端情形——反证法证明.

例 5　在凸五边形 $ABCDE$ 的边和对角线中,没有互相平行的线段. 延长边 BC 与对角线 AD 交于某个点,然后在边 BC 上标一个箭头指向交点的方向. 依此办法把五条边都标上箭头. 求证:必有两个箭头指向五边形的同一个顶点.

证明　考虑由凸五边形的每三个相邻顶点所组成的五个三角形,其中必有面积最小者,设 $\triangle ABC$ 的面积最小.

下面证明:边 BC 标的箭头必指向点 B.

由于 DA 不平行于 BC(如图 2),则由 $S_{\triangle ABC}$ 的最小性知

$S_{\triangle ABC} < S_{\triangle DBC}$.

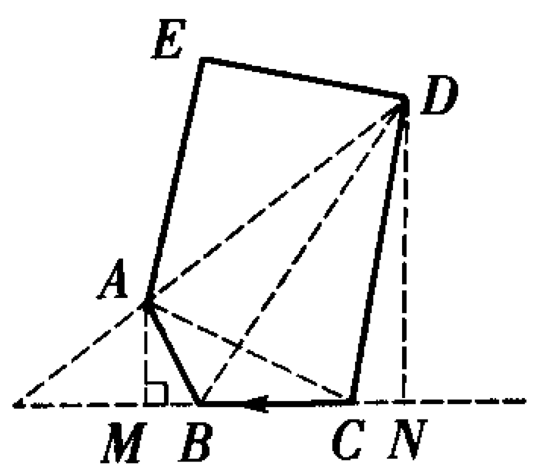

图2

设 M、N 分别是由点 A 及 D 向边 BC 所引垂线的垂足.

于是,$DN > AM$.

所以,直线 AD 与 BC 的交点在边 CB 的延长线上,且位于点 B 的一方.

从而,依箭头的标法,边 BC 上的箭头指向点 B.

同理,边 AB 上的箭头也指向 B.

故结论得证.

例 6 晚会上,$n(n\geqslant 2)$ 对男女青年双双起舞,设任何一名男青年都未与全部女青年跳过舞,而每名女青年至少与一名男青年跳过舞. 求证:必有两男 b_1、b_2 及两女 g_1、g_2,使得 b_1 与 g_1、b_2 与 g_2 跳过舞,而 b_1 与 g_2、b_2 与 g_1 均未跳过舞.

证法 1 记与之跳过舞的女青年数最多的男青年之一为 b_1.

因为 b_1 未与全部女青年跳过舞,所以,可找到女青年 g_2 未与 b_1 跳过舞.

又因为 g_2 至少与一名男青年跳过舞,所以,存在 $b_2(\neq b_1)$ 与 g_2 跳过舞.

若凡与 b_1 跳过舞的女青年都与 b_2 跳过,则与 b_2 跳过舞的女青年数至少比 b_1 大 1,这不可能. 故在与 b_1 跳过舞的女青年中至少有一名未与 b_2 跳过,记其中之一为 g_1. 则这样选取的 b_1、b_2、g_1、g_2 满足要求.

证法 2 记与之跳过舞的男青年数最少的女青年之一为 g_1.

因为 g_1 至少与一名男青年跳过舞,所以,可取 b_1 与 g_1 跳过舞.

又因为 b_1 未与全部女青年跳过舞,所以,又可选取 g_2 未与 b_1 跳过舞.

若凡与 g_2 跳过舞的男青年均与 g_1 跳过,则与 g_1 跳过舞的男青年数至少比 g_2 大 1,这与 g_1 的选法矛盾.

故可选取 b_2 与 g_2 跳过舞,但未与 g_1 跳过舞.

【点评】从上面几例可以看出,对于某些问题,只要解题者把握问题的内在逻辑联系,适当地抓住研究对象的某些极端性质,就会摆脱繁杂的处境,处于极有利的地位,一下子击中问题要害.

例 7 AB 为定圆$\odot O$ 中的定弦,作$\odot O$ 中的弦 $C_1D_1, C_2D_2, \cdots, C_{1\,988}D_{1\,988}$. 对其中每一弦 $C_iD_i(i=1,2,\cdots,1\,988)$,都被弦 AB 平分于点 M_i;过 C_i、D_i 分别作$\odot O$ 的切线,且两切线交于点 P_i. 求证:点 $P_1, P_2, \cdots, P_{1\,988}$ 与某点等距,并指出这定点是什么?

【分析】如图 3,设过点 A、B 的$\odot O$ 的切线交于点 P. 设想过 C_i、D_i 的$\odot O$ 的切线交点无限接近于 P,弦 C_iD_i 两端点无限接近 A. 则过 C_i、D_i 的切线交点也无限接近 A.

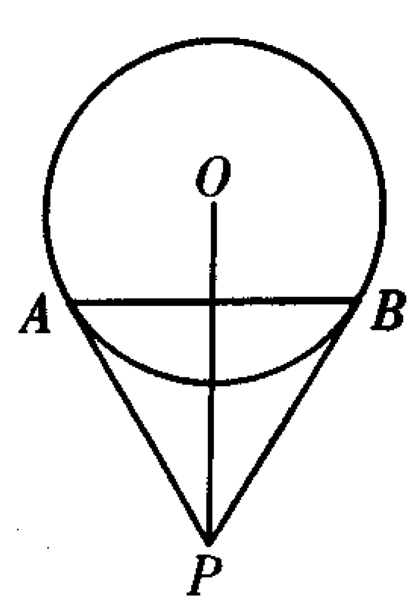

图3

对于点 B 也有类似情形.

于是,可进一步设想所求定点是$\triangle ABP$ 的外心,即 OP 的中点,也就是$\triangle AOB$ 的外心.

证明 如图 4,AB 弦平分 C_iD_i 于点 M_i,联结 OM_i 并延长. 则 OM_i 垂直平分 C_iD_i.

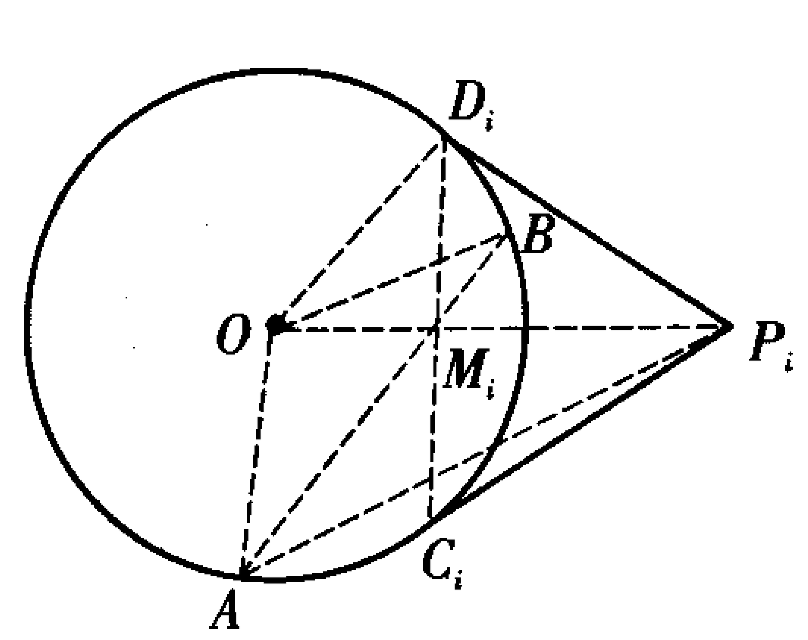

图4

因为 C_iP_i、D_iP_i 是$\odot O$ 的切线,所以,O、M_i、P_i 三点共线.

而 A、C_i、B、D_i 四点共圆，则

$AM_i \cdot BM_i = C_iM_i \cdot D_iM_i = D_iM_i^2$.

由 $\angle OD_iP_i = 90°$，得

$D_iM_i^2 = OM_i \cdot P_iM_i$.

故 $OM_i \cdot P_iM_i = BM_i \cdot AM_i$.

可知 O、P_i、A、B 四点共圆.

又因为 $\triangle AOB$ 外接圆为定圆，所以，点 P_i 到 $\triangle AOB$ 外接圆圆心 O'（定点）等距.

练 习 题

1. 平面上任给 $n(n \geqslant 3)$ 个点，其中没有三点共线. 求证：存在过其中三个点的圆，使其余 $n-3$ 个点都不在圆的内部.

提示：考虑到其中两点 B、C 视角最大的点 A.

2. 试证：在任意的凸五边形中能找出三条对角线，用它们可以构成三角形.

提示：设凸五边形 $ABCDE$ 中最大的一条对角线是 BE. 不难证明：以 BE、CE、BD 为边可组成一个三角形.

3. 有一个 8×8 的棋盘，开始时，在 64 个小方格内各放一枚"城堡"的棋子. 若有一枚城堡的棋子可攻击奇数枚其他还在棋盘上的棋子，就把这枚城堡的棋子拿走. 请问：最多可以拿走多少枚城堡的棋子（一枚城堡的棋子可攻击同一行或同一列但中间没有阻挡的棋子）？

提示：先证棋盘四个角落上的城堡的棋子不会被取走. 因为角落上的城堡最多可攻击两个其他城堡，所以，若这个城堡被取走即代表该城堡仅能攻击一个. 在不失一般性的情形下，可假设左上角的城堡是这四个中第一个被取走的，此时，即代表第一列或第一行已完全取光，换句话说，位于右上角或左下角的城堡已被取走，这是不可能发生的.

当剩五个城堡时，除这四个角落之外的城堡，只能攻击两个或零个城堡，故至少剩五个城堡. 按图 5 数字顺序取城堡即为一种可取到剩五个城堡的方法. 故最多可取走 $64-5=59$ 个城堡.

	49	48	47	45	42	38	
1	50	51	46	44	41	37	33
2	7	52	53	43	40	36	32
3	8	13	54	55	39	35	31
4	9	14	18	56	57	34	30
5	10	15	19	22	58	59	29
6	11	16	20	23	25		28
	12	17	21	24	26	27	

图 5

4. 设 S 为平面上的一个有限点集（点数大于或等于 5），其中若干点染上红色，其余的点染上蓝色. 设任何三个或三个以上同色的点不共线. 求证：存在一个三角形，使得

（1）它的三个顶点染有相同的颜色；

（2）这个三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

提示：对于 S 中的任意五点，染红色或蓝色必有三点同色（抽屉原理），结论（1）成立. 三顶点同色的三角形有有限个，其中必有面积最小的一个（设为 $\triangle ABC$）. 则 $\triangle ABC$ 满足结论（2）. 若不然，$\triangle ABC$ 每条边上都有一个异色的点，则这三个异色点又组成一个比 $\triangle ABC$ 更小的三顶点同色的三角形，矛盾.

5. 有 20 支球队参加全国联赛. 问：至少要进行多少场比赛，才能使任何三支球队中必有两支球队彼此比赛过？

提示：设 A 队比赛场次最少（为 k 场）. 则

（1）有 k 支球队与 A 队比赛过，每队至少比赛 k 场；

（2）没有和 A 队比赛的有 $19-k$ 支球队，它们之间必须两两都比赛过，否则，没有比赛过的两队与 A 队组成的三支球队不符合要求. 故至少比赛的场次为

$$N = \frac{1}{2}[k + k^2 + (19-k)(18-k)]$$

$$= (k-9)^2 + 90 \geqslant 90.$$

接下来证明：90 场比赛可以达到题目要求.

将 20 支球队分成两个小组，每组各 10 支球队，各组分别进行单循球比赛即可.

完全平方数

安庆旺*

（安徽省临泉田家炳实验中学，236400）

中图分类号：O156.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)04－0006－03

（本讲适合高中）

完全平方数是数论中较为常见的一类问题，经常出现在各种数学竞赛中．在解决与完全平方数有关的问题时，需要用到完全平方数的性质及整数的有关知识，比如：

(1)完全平方数的末位数只能是0，1，4，5，6或9；

(2)相邻的两个完全平方数之间没有平方数；

(3)奇数的平方十位数一定是偶数，且奇数的平方模8余1；

(4)形如$3k+2$、$4k+2$、$4k+3$($k\in\mathbf{Z}$)的数不是完全平方数；

(5)设p为质数，a是完全平方数，若$p\mid a$，则$p^2\mid a$．

1 利用完全平方数的特征

例1 求最小的正整数n，使得n^3+2n^2是一个奇数的平方．

解 由$n^3+2n^2=n^2(n+2)$为奇数可知，n为奇数．

要使$n^2(n+2)$为完全平方数，则$n+2$为完全平方数．

所以，最小的正整数$n=7$．

例2 设n是一个正整数，A是一个$2n$位数，且每个数位上的数字均为4，B是一个n位数，且每个数位上的数字均为8．证明：$A+2B+4$是一个完全平方数．

（第七届巴尔干地区数学奥林匹克）

证明 注意到

$$A=\frac{4}{9}(10^{2n}-1),B=\frac{8}{9}(10^n-1).$$

故$A+2B+4$

$$=\frac{4}{9}(10^{2n}-1)+\frac{16}{9}(10^n-1)+4$$

$$=\frac{4}{9}\times10^{2n}+\frac{16}{9}\times10^n+\frac{16}{9}$$

$$=\left(\frac{2\times10^n+4}{3}\right)^2.$$

因为$3\mid(2\times10^n+4)$，所以，$A+2B+4$是一个完全平方数．

2 引入参数

例3 设m、n是正整数，且满足

$$2\,001m^2+m=2\,002n^2+n. \quad ①$$

证明：$m-n$是一个完全平方数．

（2002，澳大利亚数学奥林匹克）

证明 由已知得$m>n$．

设$m=n+k$($k\in\mathbf{N}_+$)．则式①化为

$$n^2-4\,002nk-2\,001k^2-k=0,$$

即 $$(n-2\,001k)^2$$

$$=(2\,001k)^2+2\,001k^2+k$$

$$=k(2\,001\times2\,002k+1).$$

因为$(k,2\,001\times2\,002k+1)=1$，所以，$k$和$2\,001\times2\,002k+1$均为完全平方数．

故$m-n$是一个完全平方数．

例4 求所有的正整数对(m,n)，使得m^2-4n和n^2-4m均为完全平方数．

解 由对称性，不妨设$m\leqslant n$．

(1)若$m\leqslant n-1$，则

$$n^2-4m\geqslant n^2-4n+4=(n-2)^2.$$

又$n^2-4m\leqslant(n-1)^2=n^2-2n+1$，且其

收稿日期：2010－07－22 修回日期：2010－10－18

* 作者系《中等数学》2010年数学奥林匹克等级教练员培训班学员

等号不成立,则

$n^2-4m=(n-2)^2 \Rightarrow n=m+1$.

故 $m^2-4n=(m-2)^2-8=t^2(t\in \mathbf{N}_+)$.

从而,$(m+t-2)(m-t-2)=8$.

因为 $m+t-2$ 与 $m-t-2$ 的奇偶性相同,且 $m+t-2>m-t-2$,所以,

$m+t-2=4, m-t-2=2$.

解得 $m=5, n=6$ 是满足条件的一组解.

(2)若 $m=n$,则

$m^2-4n=(m-2)^2-4=t^2(t\in \mathbf{N})$.

同上解得 $m=n=4$.

综上,所有满足条件的正整数数对

$(m,n)=(4,4),(5,6),(6,5)$.

【评注】此题利用完全平方数的性质进行适当放缩,分类讨论,再引入参数通过联立方程组进行求解.

例 5　求所有的正整数 n,使得 $n+36$ 是一个完全平方数,且除了 2 或 3 以外,n 没有其他的质因数.

(2007,湖北省高中数学竞赛)

解　设 $n+36=(x+6)^2$. 则

$n=x(x+12)$.

依题意得 $n=2^{\alpha_1}\times 3^{\alpha_2}(\alpha_1、\alpha_2\in \mathbf{N})$.

则 $x=2^{a_1}\times 3^{b_1}, x+12=2^{a_2}\times 3^{b_2}$,

其中,$a_1、b_1、a_2、b_2\in \mathbf{N}$.

于是,$2^{a_2}\times 3^{b_2}-2^{a_1}\times 3^{b_1}=12$.　①

显然,当 $a_1=a_2=0$ 时,式①不成立. 故 $a_1、a_2$ 中有正整数.

于是,x 和 $x+12$ 都是偶数.

从而,$a_1、a_2\in \mathbf{N}_+$.

(1)若 $a_2=1$,则

$2\times 3^{b_2}=12+2^{a_1}\times 3^{b_1} \Rightarrow a_1=1$.

此时,$3^{b_2}=6+3^{b_1}$.

显然,$b_1=1, b_2=2$.

此时,$x=6, x+12=18$.

从而,$n=6\times 18=108$.

(2)若 $a_2\geqslant 2$,则 $4\mid(x+12)\Rightarrow 4\mid x$.

故 $a_1\geqslant 2$.

此时,由式①得

$2^{a_2-2}\times 3^{b_2}-2^{a_1-2}\times 3^{b_1}=3$.　②

显然,$a_2=2, a_1=2$ 至少有一个成立.

由前者得到

$3^{b_2}-2^{a_1-2}\times 3^{b_1}=3$.　③

故 $b_2>b_1=1$.

从而,式③变为 $3^{b_2-1}-2^{a_1-2}=1$.

解得 $(a_1,b_2)=(3,2),(5,3)$.

从而,$x=24,96; n=864,10\ 368$.

由后者得到

$2^{a_2-2}\times 3^{b_2}-3^{b_1}=3$.　④

此时,$a_2-2>0$,于是,$b_2\leqslant 1$.

若 $b_2=0$,则式④变为 $2^{a_2-2}-3^{b_1}=3$.

解得 $(a_2,b_1)=(4,0)$.

从而,$x=4, n=64$.

若 $b_2=1$,则式④变为 $2^{a_2-2}-3^{b_1-1}=1$.

解得 $(a_2,b_1)=(4,2),(3,1)$.

从而,$x=12,36; n=288,1\ 728$.

综上,所求的 n 为

64,108,288,864,1 728,10 368.

【评注】此题通过引入适当的参数,从特殊情形出发,分类讨论,从而解决问题.

3　反证法

例 6　设正整数 d 不等于 2、5、13. 证明:在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 $a、b$,使得 $ab-1$ 不是完全平方数.

(第 27 届 IMO)

证明　注意到

$2\times 5-1=3^2, 2\times 13-1=5^2$,

$5\times 13-1=8^2$.

于是,只需证明 $2d-1、5d-1、13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数即可.

否则,假设 $x、y、z\in \mathbf{N}_+$,使得

$2d-1=x^2$,　①

$5d-1=y^2$,　②

$13d-1=z^2$.　③

由式①知 x 为奇数,设

$x=2k+1(k\in \mathbf{N})$.

则 $2d-1=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$.

故 $d=2k^2+2k+1$，这说明 d 为奇数.

由式②、③知 y、z 均为偶数.

令 $y=2m, z=2n(m、n\in\mathbf{N}_+)$.

代入式②、③并相减得

$2d=n^2-m^2=(n+m)(n-m)$.

由于 $2d$ 为偶数，故 m、n 的奇数性相同.

从而，$(n+m)(n-m)$ 是 4 的倍数，即 d 为偶数，矛盾.

因此，所证结论成立.

【评注】反证法是证明此类问题的一种基本方法.

练 习 题

1. 使得 3^n+81 是完全平方数的正整数 n 有(　　)个.

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

(2007，湖北省高中数学竞赛)

提示：见本刊 2008 年第 2 期第 26 页.

2. 设 $a_n=n^2+n+2(n=1,2,\cdots)$. 则在数列 $\{a_n\}$ 中(　　).

(A)有无穷多个质数

(B)有无穷多个平方数

(C)有且只有有限多个质数

(D)有且只有有限个平方数

(2006，江苏省高中数学竞赛)

提示：由 $a_n=n(n+1)+2$，知 a_n 为合数.

又 $a_1=4$，且当 $n\geqslant 2$ 时，

$n^2<a_n<(n+1)^2$.

故选 D.

3. 集合 $\{1!,2!,\cdots,24!\}$ 中删去一个元素______后，余下的元素之积恰好是完全平方数.

(2006，江苏省高中数学竞赛)

提示：集合中各元素之积为

$$\prod_{i=1}^{12}[(2i)!\times(2i-1)!]$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{12}(2i-1)!\right]^2\times 2^{12}\times 12!.$$

故删去的元素为 $12!$.

4. 若 $6^m+2^n+2(m、n\in\mathbf{N})$ 是一个完全平方数，则所有可能的 $(m,n)=$______.

(2005，安徽省高中数学竞赛)

提示：见本刊 2006 年第 3 期第 28 页.

5. 证明：不存在正整数 n，使得 $2n^2+1$、$3n^2+1$、$6n^2+1$ 均为完全平方数.

(2004，日本数学奥林匹克)

提示：假设结论不成立. 则

$$36n^2(6n^2+1)(3n^2+1)(2n^2+1)$$

$$=(36n^4+18n^2+1)^2-1$$

为完全平方数，矛盾.

命题与解题

谈谈无穷递降法

王连笑

（天津市实验中学，300074）

中图分类号：O142　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)04－0009－08

由法国著名数学家费马最先提出的无穷递降法是解不定方程的一个最有效且常用的方法.

他在证明不定方程

$$x^4+y^4=z^2 \quad ①$$

没有不全为零的整数解时，就用到了此方法.

先证明这个命题.

证明　显然，只要证明方程①没有正整数解(x,y,z)即可.

假设(x_0,y_0,z_0)是方程①的一组正整数解，且是所有正整数解中z_0最小的一组解.

接下来证明：x_0、y_0、z_0两两互质.

假设x_0、y_0不互质，且x_0、y_0有公约数$p(p>1)$，此时，$p^4\mid(x_0^4+y_0^4)$，从而，$p^2\mid z_0$.

于是，$\left(\frac{x_0}{p},\frac{y_0}{p},\frac{z_0}{p}\right)$也是方程①的一组正整数解. 但此时$\frac{z_0}{p}<z_0$，与$z_0$最小矛盾.

因而，x_0与y_0互质.

同理，x_0与z_0互质，y_0与z_0互质.

所以，(x_0,y_0,z_0)是方程①的一组两两互质的正整数解.

从而，(x_0^2,y_0^2,z_0)是方程

$$x^2+y^2=z^2 \quad ②$$

的一组两两互质的正整数解.

对于方程②，x和y至少有一个是偶数. 否则，若x和y都是奇数，则

$$x^2+y^2\equiv2(\bmod 4).$$

于是，x^2+y^2不是完全平方数.

因而，方程②不可能成立.

不妨设y为偶数，即y_0为偶数. 则由方程②的解的公式得

$$\begin{cases}x_0^2=u^2-v^2,\\ y_0^2=2uv,\\ z_0=u^2+v^2,\end{cases}$$

其中，u和$v(u>v>0)$互质，并且一个为奇数，一个为偶数.

若u为偶数，v为奇数，则u^2能被4整除，v^2被4除余1，此时，u^2-v^2被4除余3，不能为完全平方数，与$x_0^2=u^2-v^2$矛盾.

故v为偶数，u为奇数.

因为$\left(\frac{y_0}{2}\right)^2=u\cdot\frac{v}{2}$，且$u$和$\frac{v}{2}$互质，所以，

$$u=r^2,\ \frac{v}{2}=s^2,$$

其中，r和s是互质的正整数，并且r是奇数.

故$x_0^2=u^2-v^2=r^4-4s^4$，

$$x_0^2+4s^4=r^4,$$

其中，$2s^2$与x_0互质.

从而，$(x_0,2s^2,r^2)$是方程②的一组正整数解.

故$\begin{cases}x_0=a^2-b^2,\\ 2s^2=2ab,\\ r^2=a^2+b^2\end{cases}$（$a$和$b$互质，且$a>b>0$）.

又$s^2=ab$，则$a=f^2$，$b=g^2$（f、g是互质的正整数）.

因而，$f^4+g^4=r^2$.

收稿日期：2011－01－07

故(f,g,r)是方程①的一组正整数解.

而$r\leqslant r^4<r^4+4s^4=u^2+v^2=z_0$,与$z_0$的最小性矛盾.

所以,方程$x^4+y^4=z^2$没有不全为零的整数解.

【说明】通过方程的一组解一步一步地推出其他解的方法是一种无穷递推法,特别是,从方程有正整数解必有某个未知数的最小解出发,经过无穷递推得到一组一组无穷递降且与原来的某个未知数的最小解更小的解,引出矛盾.此方法称为无穷递降法.

用无穷递降法解决数论问题,可以举出许多例子.

例1 已知正整数a、b,使得

$(ab+1)\mid(a^2+b^2)$.

求证:$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个正整数的平方.

(第29届IMO)

【分析及证】当$a=b$时,存在整数q使

$$\frac{2a^2}{a^2+1}=q\Rightarrow(2-q)a^2=q.$$

由$2-q>0$,可得$q=1=1^2$.

结论显然成立.

当$a\neq b$时,由对称性,不妨设$a>b$.

思路是:如果

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2+t^2}{bt+1},\text{且}a>b>t,\qquad ①$$

只要$t\neq0$,就可以将式①递推下去,直到$t=0$.此时,$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2+0^2}{b\times0+1}=b^2$就是一个完全平方数.

如何实现式①呢?

设$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2+t^2}{bt+1}=s$.则

$$\begin{cases}a^2+b^2=abs+s,\\ b^2+t^2=bts+s.\end{cases}$$

两式相减得$a^2-t^2=bs(a-t)$.

由$a\neq t$,得$a+t=bs$.

经上分析,对于$a\neq b$,可得下面的证明:

设s、t是满足下列条件的整数

$$\begin{cases}a=bs-t,\\ s\geqslant2,0\leqslant t<b.\end{cases}$$

代入$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$得

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}.\qquad ②$$

接下来比较式②与$s-1$、$s+1$的大小.

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}-(s-1)$$
$$=\frac{s(b^2-bt-1)+b(b-t)+t^2+1}{b(bs-t)+1}>0,$$

即 $\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}>s-1$.

同理,$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}<s+1$.

因为$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}$是整数,所以,

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}=s.$$

故$b^2s^2-2bst+t^2+b^2=b^2s^2-bst+s$.

于是,$b^2+t^2=bts+s$,

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2+t^2}{bt+1}=s.$$

因为$a>b>t$,所以,当$t=0$时,$s=b^2$为完全平方数.

如果$t\neq0$,可以将此过程继续下去(因为t是一个有限数),则一定会经过有限步之后,可以使最小的t变为0,而使s为完全平方数.

此题的另一个证法也用到了无穷递降法.

另证 设$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=s$.则

$a^2+b^2=s(ab+1)$.

于是,(a,b)是不定方程

$$x^2+y^2=s(xy+1)\qquad ①$$

的一组整数解.

假定s不是一个完全平方数,此时,x、y均不为0.

故$s(xy+1)=x^2+y^2>0\Rightarrow xy>-1$.

由于x、y是整数，则$xy\geqslant 0$.

又x、y均不为0，则$xy>0$. 故x和y同号. 从而，只需研究方程①的正整数解即可.

设(a_0,b_0)（$a_0\geqslant b_0$）是方程①的所有正整数解中使$x+y$为最小的一组解.

于是，方程①可以看作是关于x的方程

$$x^2-syx+y^2-s=0. \quad ②$$

所以，a_0是方程

$$x^2-sb_0x+b_0^2-s=0 \quad ③$$

的一个整数解.

设a_1是方程③的另一个解. 则由韦达定理得

$$a_1=sb_0-a_0，且\ a_1a_0=b_0^2-s.$$

可知$a_1\neq 0$. 否则，$b_0^2=s$是一个完全平方数.

因此，(a_1,b_0)也是方程①的正整数解.

但$a_1=\frac{b_0^2-s}{a_0}\leqslant\frac{b_0^2-1}{a_0}\leqslant\frac{a_0^2-1}{a_0}<\frac{a_0^2}{a_0}=a_0$，则

$$a_1+b_0<a_0+b_0,$$

这与a_0+b_0的最小性矛盾.

因此，s是一个完全平方数.

【注】两个证法都归功于无穷递降法. 关于此题还有一段轶闻. 自从举办第一届IMO以来，负责命题的主试委员会都没能命制一道试题难倒参赛的每一名中学生. 而此题却难倒了由各参赛国领队组成的主试委员会. 后来，此题又给澳大利亚的四位数论专家去解，每一位都花了一整天的时间，可是谁也没有解出来. 然而，参赛的选手中却有11名学生在指定的时间给出了正确解答，正所谓“宣父犹能畏后生，丈夫未可轻年少”（唐·李白《上李邕》）.

数论中还有一个著名的华林问题（由英国数学家爱德华·华林（Edward waring）提出）：

若k是一个正整数，则是否存在整数$g(k)$，使得每一个正整数都可以写为$g(k)$个非负整数的k次幂之和，且是否有比$g(k)$小的整数满足这个条件.

拉格朗日在1770年证明了“每一个正整数都可以写成四个非负整数的平方和”，即$g(2)=4$.

后来，在19世纪数学家证明了$3\leqslant k\leqslant 8$和$k=10$的情形，直到1906年才由大卫·希尔伯特证明：

对于每一个正整数k，都存在一个常数$g(k)$，使得每一个正整数都可以表示成$g(k)$个非负整数的k次幂之和.

但是，他没有给出计算$g(k)$的公式.

关于$g(2)=4$，即拉格朗日在1770年证明的“每一个正整数都可以写成四个非负整数的平方和”的问题，需以例2为基础. 而例2的解决正是依靠了无穷递降法.

例2 设p是一个质数. 则p能表示成四个非负整数的平方和，即方程

$$x^2+y^2+z^2+w^2=p$$

存在整数解(x,y,z,w).

证明 当$p=2$时，因$2=1^2+1^2+0^2+0^2$，所以，结论正确.

下面考虑p是一个奇质数的情形.

首先证明：若p是一个奇质数，则存在一个整数$k(k<p)$，使得

$$x^2+y^2+z^2+w^2=kp. \quad ①$$

注意到，若p是一个奇质数，则存在整数x、y，使得

$$x^2+y^2+1\equiv 0\pmod p\left(0\leqslant x、y<\frac{p}{2}\right).$$

考虑两个集合

$$S=\left\{0^2,1^2,\cdots,\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}$$

和 $$T=\left\{-1-0^2,-1-1^2,\cdots,-1-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\}.$$

S中的任意两个元素都对模p不同余（若$x^2\equiv y^2\pmod p$，则$x\equiv\pm y\pmod p$，这是不可能的）.

同理，T中的任意两个元素都对模p也不同余.

由于$S\cup T$共有$p+1$个不同的元素，因

此，由抽屉原理知，一定有两个元素（整数）对模 p 同余，即存在整数 x、y，使得

$$x^2\equiv -1-y^2 \pmod p.$$

故 $x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p \left(0\leqslant x、y<\frac{p}{2}\right)$.

这样，就存在某个整数 k 使得

$$x^2+y^2+1^2+0^2=kp.$$

由 $x^2+y^2+1<2\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+1<p^2$，则

$k<p$.

由上面的证明，可以令 m 是使得

$$x^2+y^2+z^2+w^2=mp \qquad ①$$

有整数解的最小正整数.

为证明 p 能表示成四个非负整数的平方和，即方程

$$x^2+y^2+z^2+w^2=p$$

存在整数解 (x,y,z,w).

只需证明 $m=1$.

若 m 是一个偶数，则 $x、y、z、w$ 或同为奇数，或同为偶数，或两个为奇数、两个为偶数. 由此，可以重排这四个整数，使得

$$x\equiv y \pmod 2,\ z\equiv w \pmod 2.$$

故 $\frac{x-y}{2}$、$\frac{x+y}{2}$、$\frac{z-w}{2}$、$\frac{z+w}{2}$ 都是整数，且

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{z-w}{2}\right)^2+\left(\frac{z+w}{2}\right)^2$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2+w^2}{2}=\frac{m}{2}p,$$

这与 m 是使得 mp 表示成四个非负整数的平方和的最小正整数矛盾.

所以，m 不能是偶数.

若 $m(m>1)$ 是一个奇数，则令整数 a、b、c、d 满足下面条件

$$a\equiv x \pmod m,\ b\equiv y \pmod m,$$
$$c\equiv z \pmod m,\ d\equiv w \pmod m,$$

且 $-\frac{m}{2}<a、b、c、d<\frac{m}{2}$.

故 $a^2+b^2+c^2+d^2$

$$\equiv x^2+y^2+z^2+w^2 \pmod m.$$

因此，存在某个整数 k 使得

$$a^2+b^2+c^2+d^2=km, \qquad ②$$

且 $0\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2<4\left(\frac{m}{2}\right)^2=m^2$.

所以，$0\leqslant k<m$.

若 $k=0$，则 $a=b=c=d=0$. 进而，

$$x\equiv y\equiv z\equiv w\equiv 0 \pmod m.$$

于是，$m^2\mid mp$.

而因为 $1<m<p$，所以，这是不可能的.

从而，$k>0$.

由①×②得

$$(x^2+y^2+z^2+w^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$=m^2pk. \qquad ③$$

由恒等式

$$(x^2+y^2+z^2+w^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$=(ax+by+cz+dw)^2+(bx-ay+dz-cw)^2+$$
$$(cx-dy-az+bw)^2+(dx+cy-bz-aw)^2, \qquad ④$$

易知，式④的右边四项都可以被 m 整除.

设 $X=\frac{ax+by+cz+dw}{m}$,

$$Y=\frac{bx-ay+dz-cw}{m},$$

$$Z=\frac{cx-dy-az+bw}{m},$$

$$W=\frac{dx+cy-bz-aw}{m}.$$

则 $X^2+Y^2+Z^2+W^2=\frac{m^2kp}{m^2}=kp$.

但是 $k<m$，这与 m 是使得 mp 表示成四个非负整数的平方和的最小正整数矛盾.

综上，$m=1$，即质数 p 能表示成四个非负整数的平方和.

例3 证明：不定方程

$$x^4-y^4=z^2\ ((x,y)=1) \qquad ①$$

没有正整数解 (x,y,z).

证明 假设方程①有正整数解，且设 x、y、z 是所有正整数解中 x 最小.

若 x 是偶数，由 $(x,y)=1$，则 y 是奇数. 此时，$x^4-y^4\equiv 3 \pmod 4$，x^4-y^4 不可能是完全平方数. 所以，x 是奇数.

若 y 是奇数，则由方程①有

$$x^2=a^2+b^2, y^2=a^2-b^2, z=2ab,$$

其中，$(a,b)=1, a、b\in \mathbf{N}_+$.

于是，$a^4-b^4=(xy)^2$.

从而，(a,b,xy) 是方程①的正整数解.

然而，$0<a<x$，与 x 的最小性矛盾.

若 y 是偶数，则

$$x^2=a^2+b^2, y^2=2ab,$$

其中，$(a,b)=1, a、b\in \mathbf{N}_+$.

此时，a 与 b 一为奇数，一为偶数.

不失一般性，设 a 为偶数，b 为奇数. 则

$$a=2p^2, b=q^2,$$

其中，$(p,q)=1, p、q\in \mathbf{N}_+$，且 q 为奇数.

于是，$x^2=4p^4+q^4, y=2pq$.

故 $p^2=rs, q^2=r^2-s^2((r,s)=1, r、s\in \mathbf{N}_+)$.

又 $r=u^2, s=v^2((u,v)=1, u、v\in \mathbf{N}_+)$，则

$$u^4-v^4=q^2.$$

因此，(u,v,q) 是方程①的正整数解，且

$$u=\sqrt{r}\leqslant p<x,$$

仍与 x 的最小性矛盾.

综上，不定方程①没有正整数解 (x,y,z).

例 4 证明：不存在整数 $x、y、z$ 满足

$$2x^4+2x^2y^2+y^4=z^2(x\neq 0). \qquad ①$$

(2003，韩国数学奥林匹克)

证明 设 $x、y、z$ 是方程①的整数解.

显然，由 $x\neq 0$，可得 $y\neq 0$.

不妨设 $x>0, y>0((x,y)=1)$. 进一步假设 x 是满足上述条件的最小解.

由 $z^2\equiv 0,1,4(\bmod 8)$，可知 x 是偶数，y 是奇数.

方程①可化为

$$x^4+(x^2+y^2)^2=z^2. \qquad ②$$

显然，$(x^2, x^2+y^2)=1$.

于是，$x^2、x^2+y^2、z$ 是一组勾股数.

故存在一个奇数 p 和一个偶数 q，使

$$x^2=2pq, x^2+y^2=p^2-q^2,$$

$$z=p^2+q^2((p,q)=1).$$

因此，存在一个整数 a 和一个奇数 b，使

$$p=b^2, q=2a^2.$$

于是，$x=2ab, y^2=b^4-4a^4-4a^2b^2$.

因 $\left(\frac{2a^2+b^2-y}{2}\right)^2+\left(\frac{2a^2+b^2+y}{2}\right)^2=b^4$,

及 $\left(\frac{2a^2+b^2+y}{2}, \frac{2a^2+b^2-y}{2}\right)=1$,

所以，存在整数 $s、t(s>t,(s,t)=1)$，使得

$$\begin{cases}\frac{2a^2+b^2+y}{2}=2st,\\ \frac{2a^2+b^2-y}{2}=s^2-t^2,\\ b^2=s^2+t^2,\end{cases}$$

或 $\begin{cases}\frac{2a^2+b^2+y}{2}=s^2-t^2,\\ \frac{2a^2+b^2-y}{2}=2st,\\ b^2=s^2+t^2.\end{cases}$

从而，$a^2=t(s-t)$.

由于 $(s,t)=1$，于是，存在正整数 $m、n$ $((m,n)=1)$，使得

$$s-t=m^2, t=n^2.$$

因此，$n^4+(n^2+m^2)^2=b^2$.

这就回到了式②.

设 $x_1=n, x_1^2+y_1^2=n^2+m^2$. 则

$$x_1^4+(x_1^2+y_1^2)^2=z_1^2.$$

于是，$x_1、y_1、z_1$ 是方程①的解.

但是，$x=2ab>t=n^2\geqslant n=x_1$，与 x 的最小性矛盾.

所以，方程没有整数解.

例 5 已知奇数 $m、n$ 满足

$$(m^2-n^2+1)\mid(n^2-1).$$

证明：$|m^2-n^2+1|$ 是一个完全平方数.

(2005，第 18 届爱尔兰数学奥林匹克)

证明 先用无穷递降法证明两个引理.

引理 1 设 $p、k(p\geqslant k)$ 是给定的正整数，k 不是一个完全平方数. 则关于 $a、b$ 的不定方程

$$a^2-pab+b^2-k=0 \quad ①$$

无正整数解.

引理1的证明 假设方程①有正整数解.设$(a_0,b_0)(a_0\geqslant b_0)$是使$a+b$最小的一组正整数解.

又设$a_0'=pb_0-a_0$.则a_0、a_0'是关于t的二次方程

$$t^2-pb_0t+b_0^2-k=0 \quad ②$$

的两个根.

所以,$a_0'^2-pa_0'b_0+b_0^2-k=0$.

若$0<a_0'<a_0$,则(b_0,a_0')也是方程①的一组正整数解,且有

$b_0+a_0'<b_0+a_0$,

与(a_0,b_0)是使$a+b$最小的一组正整数解的假设矛盾.

所以,$a_0'\leqslant 0$或$a_0'\geqslant a_0$.

(1)若$a_0'=0$,则$pb_0=a_0$.

代入方程①得$b_0^2-k=0$,但k不是一个完全平方数,矛盾.

(2)若$a_0'<0$,则$pb_0<a_0$.

从而,$a_0\geqslant pb_0+1$.

故$a_0^2-pa_0b_0+b_0^2-k$

$=a_0(a-pb_0)+b_0^2-k$

$\geqslant a_0+b_0^2-k\geqslant pb_0+1+b_0^2-k$

$>p-k\geqslant 0$,

与方程①矛盾.

(3)若$a_0'\geqslant a_0$,因为a_0、a_0'是方程②的两个根,所以,由韦达定理得$a_0a_0'=b_0^2-k$.

但$a_0a_0'\geqslant a_0^2\geqslant b_0^2>b_0^2-k$,矛盾.

综上,方程①无正整数解.

引理2 设p、$k(p\geqslant 4k)$是给定的正整数.则关于a、b的不定方程

$$a^2-pab+b^2+k=0 \quad ③$$

无正整数解.

引理2的证明 假设方程③有正整数解.设$(a_0,b_0)(a_0\geqslant b_0)$是使$a+b$最小的一组正整数解.

又设$a_0'=pb_0-a_0$.则a_0、a_0'是关于t的二次方程

$$t^2-pb_0t+b_0^2+k=0 \quad ④$$

的两个根.

所以,$a_0'^2-pa_0'b_0+b_0^2+k=0$.

若$0<a_0'<a_0$,则(b_0,a_0')也是方程③的一组正整数解,且有

$b_0+a_0'<b_0+a_0$,

与(a_0,b_0)是使$a+b$最小的一组正整数解的假设矛盾.

所以,$a_0'\leqslant 0$或$a_0'\geqslant a_0$.

(1)若$a_0'\leqslant 0$,则$pb_0\leqslant a_0$.

故$a_0^2-pa_0b_0+b_0^2+k$

$=a_0(a-pb_0)+b_0^2+k$

$\geqslant b_0^2+k>0$,

与方程③矛盾.

(2)若$a_0'\geqslant a_0$,则$a_0\leqslant\frac{pb_0}{2}$.

因为方程④的两个根是

$$\frac{pb_0\pm\sqrt{(pb_0)^2-4(b_0^2+k)}}{2},$$

所以,$a_0=\frac{pb_0-\sqrt{(pb_0)^2-4(b_0^2+k)}}{2}$.

又$a_0\geqslant b_0$,则

$$b_0\leqslant\frac{pb_0-\sqrt{(pb_0)^2-4(b_0^2+k)}}{2}$$

$\Rightarrow(p-2)b_0\geqslant\sqrt{(pb_0)^2-4(b_0^2+k)}$

$\Rightarrow(p-2)^2b_0^2\geqslant(pb_0)^2-4b_0^2-4k$

$\Rightarrow(4p-8)b_0^2\leqslant 4k$.

而$p\geqslant 4k\geqslant 4$,则

$(4p-8)b_0^2\geqslant 4p-8\geqslant 2p>4k$,

与上式矛盾.

综上,方程③无正整数解.

回到原题.

不妨设m、$n>0$.

由$(m^2-n^2+1)\mid(n^2-1)$,则

$(m^2-n^2+1)\mid[(n^2-1)+(m^2-n^2+1)]=m^2$.

(1)若 $m=n$,则 $m^2-n^2+1=1$ 是完全平方数.

(2)若 $m>n$,由 m、n 都是奇数,则可设

$m+n=2a, m-n=2b(a、b\in\mathbf{N}_+)$.

因 $m^2-n^2+1=4ab+1, m^2=(a+b)^2$,

所以,$(4ab+1)\mid(a+b)^2$.

设 $(a+b)^2=k(4ab+1)(k\in\mathbf{N}_+)$. 则

$a^2-(4k-2)ab+b^2-k=0$.

若 k 不是一个完全平方数,由引理 1,矛盾. 因此,k 是一个完全平方数.

故 $m^2-n^2+1=4ab+1$

$$=\frac{(a+b)^2}{k}=\left(\frac{a+b}{\sqrt{k}}\right)^2$$

也是一个完全平方数.

(3)若 $m<n$,由 m、n 都是奇数,则可设

$m+n=2a, n-m=2b(a、b\in\mathbf{N}_+)$.

因 $m^2-n^2+1=-4ab+1, m^2=(a-b)^2$,

所以,$(4ab-1)\mid(a-b)^2$.

设 $(a-b)^2=k(4ab-1)(k\in\mathbf{N}_+)$. 则

$a^2-(4k+2)ab+b^2+k=0$.

若 k 不是一个完全平方数,由引理 2,矛盾. 因此,k 是一个完全平方数.

故 $|m^2-n^2+1|=4ab-1$

$$=\frac{(a-b)^2}{k}=\left(\frac{a-b}{\sqrt{k}}\right)^2$$

也是一个完全平方数.

综上,$|m^2-n^2+1|$ 是一个完全平方数.

例 6 设 k、$n(n>2)$ 是正整数. 证明:方程 $x^n-y^n=2^k$ 无整数解.

(2002,罗马尼亚数学奥林匹克(决赛))

证明 假设结论不成立,即已知方程有整数解. 由于 n 是正整数,必有一个最小的 n,设 $n_0>2$ 是满足

$x^{n_0}-y^{n_0}=2^m(m>0)$

中最小的一个 n.

若 n_0 是偶数,设 $n_0=2l(l\in\mathbf{N}_+)$. 则

$x^{n_0}-y^{n_0}=x^{2l}-y^{2l}=(x^l-y^l)(x^l+y^l)$.

于是,x^l-y^l 是 2 的正整数次幂.

而 $l<n_0$,与 n_0 的最小性矛盾.

若 n_0 是奇数,定义集合

$A=\{p\mid x^{n_0}-y^{n_0}=2^p, p、x、y\in\mathbf{N}_+\}$.

由于 p 是正整数,由极端原理知,必有一个最小的(设 p_0 是 A 中最小的一个元素),则

$x^{n_0}-y^{n_0}=2^{p_0}$.

所以,x 和 y 的奇偶性相同.

又 $x^{n_0}-y^{n_0}$

$=(x-y)(x^{n_0-1}+x^{n_0-2}y+\cdots+xy^{n_0-2}+y^{n_0-1})$

$=2^{p_0}$,

则 x 和 y 均为偶数.

设 $x=2x_1, y=2y_1$. 则

$x_1^{n_0}-y_1^{n_0}=2^{p_0-n_0}$.

若 $p_0-n_0\geqslant1$,则与 p_0 的最小性矛盾.

若 $p_0-n_0=0$,则 $x_1^{n_0}-y_1^{n_0}=1$.

而对于 $n_0>2$,此方程无整数解.

综上,方程 $x^n-y^n=2^k$,对 $n>2, k\in\mathbf{N}_+$ 无整数解.

例 7 证明:方程

$$2a^2+b^2+3c^2=10n^2 \qquad ①$$

没有正整数解 (a,b,c,n).

证明 假设方程①有一组正整数解 (a_0,b_0,c_0,n_0),且是所有正整数解中 n_0 最小.

由方程①知 $b_0^2+3c_0^2$ 是偶数,则 b_0 和 c_0 同奇偶.

当 b_0 和 c_0 同为奇数时,

$2a_0^2+b_0^2+3c_0^2\equiv4,6(\bmod 8)$,

$10n_0^2\equiv0,2(\bmod 8)$.

此时,方程①无正整数解.

当 b_0 和 c_0 同为偶数时,令 $b_0=2b_1$, $c_0=2c_1$. 代入方程①得

$$a_0^2+2b_1^2+6c_1^2=5n_0^2. \qquad ②$$

此时,a_0 和 n_0 同奇偶.

当 a_0 和 n_0 同为奇数时,

$a_0^2+2b_1^2+6c_1^2\equiv1,3,7(\bmod 8)$,

$5n_0^2\equiv5(\bmod 8)$.

此时,方程②无正整数解.

当 a_0 和 n_0 同为偶数时,令 $a_0=2a_1$, $n_0=2n_1$. 代入方程②得

$$2a_1^2+b_1^2+3c_1^2=10n_1^2. \quad ③$$

由方程③知,(a_1,b_1,c_1,n_1)满足方程①.

但 $n_1<n_0$,与 n_0 的最小性矛盾.

所以,方程 $2a^2+b^2+3c^2=10n^2$ 没有正整数解(a,b,c,n).

例8 证明:方程

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2) \quad ①$$

没有正整数解(x,y,z,u).

证明 假设方程①有正整数解,且(x_0,y_0,z_0,u_0)是使 x^2+y^2 最小的一组正整数解,即

$$x_0^2+y_0^2=3(z_0^2+u_0^2). \quad ②$$

由式②知 $x_0^2+y_0^2$ 是 3 的倍数. 此时,x_0 和 y_0 都是 3 的倍数. 因此,可设

$$x_0=3m, y_0=3n(m、n\in\mathbf{N}_+).$$

代入式②得 $9m^2+9n^2=3z_0^2+3u_0^2$,即

$$z_0^2+u_0^2=3(m^2+n^2).$$

由上式知(z_0,u_0,m,n)也是方程①的解.

然而,由式②知 $z_0^2+u_0^2<x_0^2+y_0^2$,这与 $x_0^2+y_0^2$ 的最小性矛盾.

所以,方程①没有正整数解(x,y,z,u).

例9 设 a 是给定的正整数,A、B 是两个实数. 试确定方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(13a)^2, & ① \\ x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2) \\ =\frac{1}{4}(2A+B)(13a)^4 & ② \end{cases}$$

有正整数解的充分必要条件(用 A、B 的关系式表示并予以证明).

(第5届中国数学奥林匹克)

解 由② $-\frac{B}{2}\times$①^2 得

$$\left(A-\frac{1}{2}B\right)(x^4+y^4+z^4)=\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{2}B\right)(13a)^4.$$

(1)$A\neq\frac{1}{2}B$.

上式化为

$$2(x^4+y^4+z^4)=(13a)^4. \quad ③$$

假设 x、y、z 是方程③的一组正整数解,显然,a 是偶数. 则可设 $a=2a_1$. 方程③化为

$$x^4+y^4+z^4=8(13a_1)^4. \quad ④$$

由方程④知 x、y、z 都是偶数.

设 $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$. 则方程④化为

$$2(x_1^4+y_1^4+z_1^4)=(13a_1)^4. \quad ⑤$$

显然,a_1 是偶数.

则可设 $a_1=2a_2$. 方程⑤化为

$$x_1^4+y_1^4+z_1^4=8(13a_2)^4. \quad ⑥$$

又可得 x_1、y_1、z_1 都是偶数.

设 $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$. 则方程⑥化为

$$2(x_2^4+y_2^4+z_2^4)=(13a_2)^4.$$

又可得 a_2 是偶数.

设 $a_2=2a_3$. 显然,$a_3<a_2<a_1<a$.

所以,上述推理过程经过有限次之后,可以得到正整数 x_k、y_k、z_k,满足

$$2(x_k^4+y_k^4+z_k^4)=13^4,$$

而这是不可能的.

于是,当 $A\neq\frac{1}{2}B$ 时,原方程组没有正整数解.

(2)$A=\frac{1}{2}B$.

若 $A=B=0$,则方程②为恒等式,只需解方程①.

若 $B\neq0$,把 $B=2A$ 代入方程②得

$$(x^2+y^2+z^2)^2=(13a)^4,$$

即 $x^2+y^2+z^2=(13a)^2$,

这就是方程①.

因此,无论 $B\neq0$ 还是 $B=0$,只要 x、y、z 满足方程①,就必定满足方程②.

从而,方程①显然有解

$$(x,y,z)=(3a,4a,12a).$$

于是,方程组有正整数解的充分必要条件是 $A=\frac{1}{2}B$.

专题写作

卡尔松不等式及其应用

李奋平

(山西大学附属中学,030006)

中图分类号：O122.3　文献标识码：A　文章编号：1005 - 6416(2011)04 - 0017 - 02

定理　对于 $n\times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

其中,$a_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$,则

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\right]^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}},$$

其中,等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或所有行中的数对应成比例.

这个不等式称为卡尔松不等式.

证明　记 $A_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}(j=1,2,\cdots,m)$,

$G_i=\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$.

若某个 $A_j=0$,则由 $a_{ij}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,得 $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{nj}=0$.

此时,$G_1=G_2=\cdots=G_n=0$,

$$\left[\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\right]^{\frac{1}{m}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}=0.$$

从而,不等式成立.

若所有的 $A_j>0$,由均值不等式得

$$\frac{a_{i1}}{A_1}+\frac{a_{i2}}{A_2}+\cdots+\frac{a_{im}}{A_m}$$

$$\geqslant m\left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}}{\prod\limits_{j=1}^{m}A_j}\right)^{\frac{1}{m}}(i=1,2,\cdots,n).$$

将以上 n 个不等式相加得

$$m\geqslant m\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}}{\prod\limits_{j=1}^{m}A_j}\right)^{\frac{1}{m}}=m\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}G_i^{\frac{1}{m}}}{\left(\prod\limits_{j=1}^{m}A_j\right)^{\frac{1}{m}}}.$$

故 $\left[\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\right]^{\frac{1}{m}}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\prod\limits_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{\frac{1}{m}}$.

等号成立的充要条件是至少有一列数都是 0 或 $\frac{a_{i1}}{A_1}=\frac{a_{i2}}{A_2}=\cdots=\frac{a_{im}}{A_m}$,即所有行中的数对应成比例.

利用卡尔松不等式可以推证柯西不等式、均值不等式及幂平均不等式.

(1)构造 $n\times 2$ 矩阵 $\begin{pmatrix} a_1^2 & b_1^2 \\ a_2^2 & b_2^2 \\ \cdots & \cdots \\ a_n^2 & b_n^2 \end{pmatrix}$.

利用卡尔松不等式得柯西不等式

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

(2)构造 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

利用卡尔松不等式得

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

即均值不等式

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

收稿日期:2010 - 10 - 29

(3)构造 $n\times\alpha$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1^\alpha & x_1^\alpha & \cdots & x_1^\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ x_2^\alpha & x_2^\alpha & \cdots & x_2^\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^\alpha & x_n^\alpha & \cdots & x_n^\alpha & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

其中,x_i^α 共有 β 列,1 共有 $\alpha-\beta$ 列.

利用卡尔松不等式得

$$[(x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha)^\beta n^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\geqslant[(x_1^\alpha)^\beta\cdot 1^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{\alpha}}+[(x_2^\alpha)^\beta\cdot 1^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots+[(x_n^\alpha)^\beta\cdot 1^{\alpha-\beta}]^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$=x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta,$$

即幂平均不等式

$$\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqslant\left(\frac{x_1^\beta+x_2^\beta+\cdots+x_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}(\alpha、\beta\in\mathbf{N}_+,\alpha>\beta).$$

【说明】(1)卡尔松不等式和均值不等式是等价的,柯西不等式是卡尔松不等式的一种特殊形式,即 $n\times m$ 矩阵中 $m=2$ 的情形.

(2)利用卡尔松不等式证明不等式的关键是构造矩阵,充分利用条件和结论提供的信息,注意取等号的条件是构造矩阵的关键.

例1 已知 $a、b、c>0,a^2+b^2+c^2=14$.

求证:$a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27}\geqslant 14$.

证明 构造 3×5 矩阵

$$\begin{pmatrix} a^5 & a^5 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{b^5}{8} & \frac{b^5}{8} & 4 & 4 & 4 \\ \frac{c^5}{27} & \frac{c^5}{27} & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

利用卡尔松不等式得

$$\left[\left(a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27}\right)^2(1+4+9)^3\right]^{\frac{1}{5}}$$
$$\geqslant(a^5\cdot a^5\cdot 1^3)^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{b^5}{8}\cdot\frac{b^5}{8}\cdot 4^3\right)^{\frac{1}{5}}+\left(\frac{c^5}{27}\cdot\frac{c^5}{27}\cdot 9^3\right)^{\frac{1}{5}}.$$

因为 $a^2+b^2+c^2=14$,所以,

$$a^5+\frac{b^5}{8}+\frac{c^5}{27}\geqslant\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)^5}{14^3}\right]^{\frac{1}{2}}=14.$$

例2 设 $a、b、c、d\geqslant 0,ab+bc+cd+da=1$.

求证:$\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{1}{3}$.

其中,“$\sum$”表示轮换对称和.

证明 构造 4×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{a^3}{b+c+d} & b+c+d \\ \frac{b^3}{c+d+a} & c+d+a \\ \frac{c^3}{d+a+b} & d+a+b \\ \frac{d^3}{a+b+c} & a+b+c \end{pmatrix}.$$

利用卡尔松不等式得

$$\left[\sum\frac{a^3}{b+c+d}\cdot 3(a+b+c+d)\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\sum a^{\frac{3}{2}}.$$

又构造 4×6 矩阵

$$\begin{pmatrix} a^{\frac{3}{2}} & a^{\frac{3}{2}} & a^{\frac{3}{2}} & a^{\frac{3}{2}} & 1 & 1 \\ b^{\frac{3}{2}} & b^{\frac{3}{2}} & b^{\frac{3}{2}} & b^{\frac{3}{2}} & 1 & 1 \\ c^{\frac{3}{2}} & c^{\frac{3}{2}} & c^{\frac{3}{2}} & c^{\frac{3}{2}} & 1 & 1 \\ d^{\frac{3}{2}} & d^{\frac{3}{2}} & d^{\frac{3}{2}} & d^{\frac{3}{2}} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用卡尔松不等式得

$$\left[\left(\sum a^{\frac{3}{2}}\right)^4\cdot 4^2\right]^{\frac{1}{6}}\geqslant\sum[(a^{\frac{3}{2}})^4]^{\frac{1}{6}},$$

即 $$\sum a^{\frac{3}{2}}\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}.$$

则 $$\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{\left(\sum a^{\frac{3}{2}}\right)^2}{3\sum a}\geqslant\frac{1}{12}\left(\sum a\right)^2.$$

又 $a+b+c+d\geqslant 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$

$=2\sqrt{ab+bc+cd+da}=2$,

故 $\sum\frac{a^3}{b+c+d}\geqslant\frac{1}{3}$.

例3 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n),m\in\mathbf{R}_+$, $a\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s\leqslant n$. 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\geqslant\left[\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

学生习作

一个源于 Weierstrass 函数的数学问题

陈波宇　指导老师　金荣生
（上海市市北中学高三(10 班)，200071）

中图分类号：O174　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)04－0019－01

问题　任取一个区间 (a,b). 证明：必存在一个无理数 $x\in(a,b)$，使数列 $\{\cos(6^n\pi x)\}$ 中有无穷多项大于 $\frac{1}{2}$.

证明　要证数列 $\{\cos(6^n\pi x)\}$ 中有无穷多项大于 $\frac{1}{2}$，只需证明有无穷多个正整数 n，使

$$2k+\frac{1}{3}>6^nx>2k-\frac{1}{3}(k\in\mathbf{Z}).$$

考虑将 a、b 的小数部分六进制化.

设 $a=a_0+(0.a_1a_2\cdots a_k\cdots)_6$，

$b=b_0+(0.b_1b_2\cdots b_k\cdots)_6$，

其中，a_0、$b_0\in\mathbf{Z}$，a_k、$b_k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ $(k=1,2,\cdots)$，且不存在整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，a_n、b_n 恒为 5.

因 $a<b$，所以，必存在整数 t，使 $a_t<b_t$，且若 $i<t(i\in\mathbf{N}_+)$，有 $a_i=b_i$.

设 a_m 是从 a_{t+1} 项起第一个不为 5 的数码. 令

$$\begin{aligned}x&=x_0+(0.x_1x_2\cdots x_k\cdots)_6\\&=a_0+(0.a_1a_2\cdots a_{t-1}a_t5\cdots5a_{m-1}50101101110\cdots)_6,\end{aligned}$$

则有 $a<x<b$，且 x 是无理数.

设 x 的小数部分在 m 位后数码为 0 的数位依次是 $n_1,n_2,\cdots$. 则对任意的 n_i 有

$$6^{n_i}x>6^{n_i}a_0+(x_1x_2\cdots x_{n_i-1}0)_6+(0.1x_{n_1+2}x_{n_1+3}\cdots)_6.$$

收稿日期：2011－02－02

证明　构造 $3\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}x_1^m & x_2^m & \cdots & x_n^m\\ \frac{1}{x_1^m} & \frac{1}{x_2^m} & \cdots & \frac{1}{x_n^m}\\ a & a & \cdots & a\end{pmatrix}.$$

利用卡尔松不等式即得

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^m\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^m}\right)^{\frac{1}{n}}+(a^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\left[1-\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^m\right)^{\frac{1}{n}}\right]^2}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^m\right)^{\frac{1}{n}}}+2+a.$$

又 $\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^m\right)^{\frac{1}{n}}=(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})^m\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m$，

则 $\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$$\geqslant\frac{\left[1-\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m\right]^2}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m}+2+a$$

$$=\frac{\left[1-\left(\frac{s}{n}\right)^m\right]^2}{\left(\frac{s}{n}\right)^m}+2+a,$$

即　$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^m+\frac{1}{x_i^m}+a\right)\geqslant\left[\frac{(n^m-s^m)^2}{n^ms^m}+2+a\right]^n$$

$$=\left[\left(\frac{s}{n}\right)^m+\left(\frac{n}{s}\right)^m+a\right]^n.$$

一道竞赛题的另证

程 川 指导老师 赵建刚

(河北省实验中学09级28班,051430)

中图分类号:O123.1 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2011)04-0020-01

题目 如图1,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是边BC的中点,E是$\triangle ABC$外一点,满足$CE\perp AB$,$BE=BD$.过线段BE的中点M作直线$MF\perp BE$,交$\triangle ABD$的外接圆的劣弧$\overset{\frown}{AD}$于点F.求证:$ED\perp DF$.

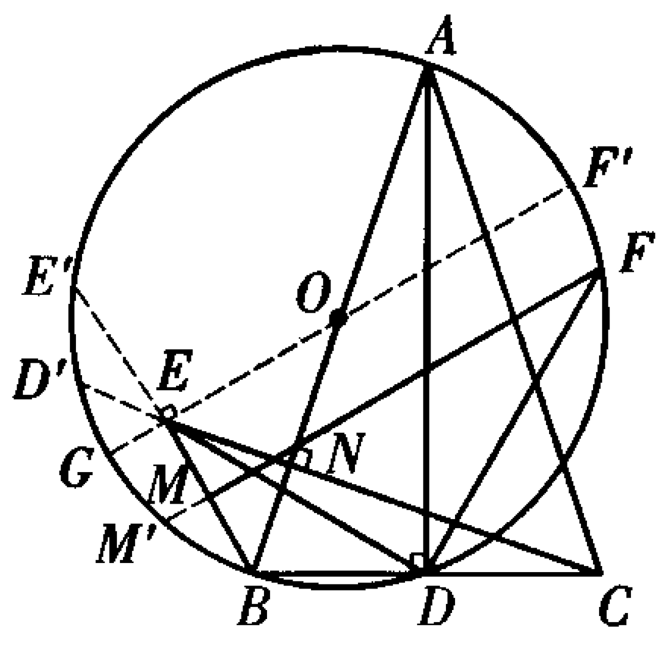

图1

(2010,女子数学奥林匹克)

证明 由$\triangle ABD\backsim\triangle CBN$,知

$BD:BN=AB:BC=BO:BD$.

则 $BE:BN=BD:BN$

$=BO:BD=BO:BE$.

又因为$\angle NBE=\angle EBO$,所以,

$\triangle EBN\backsim\triangle OBE$

$\Rightarrow\angle OEB=\angle BNE=\frac{\pi}{2}$.

于是,$OE/\!/FM$.

设BE、FM、DE的延长线与$\odot O$分别交于点E'、M'、D',OE的延长线与$\odot O$交于点G、F'.

注意到

$ED\perp DF\Leftrightarrow\angle ADF=\angle EDB$

$\Leftrightarrow\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BD}$.

而$\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AF'}+\overset{\frown}{F'F}=\overset{\frown}{GB}+\overset{\frown}{M'G}$

$=\overset{\frown}{E'G}+\overset{\frown}{M'G}=\overset{\frown}{E'M'}$,

收稿日期:2010-12-19

因为$6^{n_i}a_0+(x_1x_2\cdots x_{n_i-1}0)_6$是偶数,所以,可令其为$2k(k\in\mathbf{Z})$.

又$\frac{1}{3}=(0.2)_6>(0.1x_{n_1+2}x_{n_1+3}\cdots)_6>0>-\frac{1}{3}$,

可见,x符合条件,原问题得证.

【注】笔者凭论文《Weierstrass函数在不可列的稠密集上不可导的一种证明》获得了第三届丘成桐中学数学奖金奖.

Weierstrass函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$是数学历史上极其著名的一个“病态函数”.它的发现者Weierstrass证明了:

当$0<a<1$,b为奇整数,且$ab>1+\frac{3\pi}{2}$时,$f(x)$在$\mathbf{R}$上处处不可导.

由此打破了人们直觉上认为连续函数必然是近乎可导的猜想.

2002年,刘文发表在《高等数学研究》上的文章是将a、b的范围推广为:

$0<a<1$,b为奇整数,且$ab>1+\frac{(1-a)\pi}{2}$.

事实上,在哈代的论文中已经证明:

在$0<a<1$,$ab>1$的情况下,$f(x)$在$\mathbf{R}$上处处不可导.

其证明用的是实分析的方法,这在许多《数学分析》书上只有结论,而缺少证明.

笔者独立地用相对初等的方法证明了:在$0<a<1$,$ab>1$,$b\geqslant6$,且$b\in\mathbf{Z}$的情况下,$f(x)$在一个不可列的稠密集上不可导.

竞赛之窗

2010年新知杯上海市初中数学竞赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)04-0021-04

解答本试卷可以使用计算器.

一、填空题(第1~5小题，每题8分，第6~10小题，每题10分，共90分)

1. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$. 则

$x^{10}+x^{5}+\frac{1}{x^{5}}+\frac{1}{x^{10}}=$______.

2. 满足方程

$(x+3)^2+y^2+(x-y)^2=3$

的所有实数对(x,y)为______.

3. 在Rt$\triangle ABC$中，已知$\angle C=90°$，$BC=6$，$CA=3$，CD为$\angle C$的角平分线. 则$CD=$______.

4. 若前2 011个正整数的乘积

$1\times2\times\cdots\times2\ 011$

能被$2\ 010^k$整除，则正整数k的最大值为______.

5. 如图1，在平面直角坐标系内，正$\triangle ABC$的顶点$B(1,0)$、$C(3,0)$，过坐标原点O的一条直线分别与边AB、AC交于点M、N. 若$OM=MN$，则点M的坐标为______.

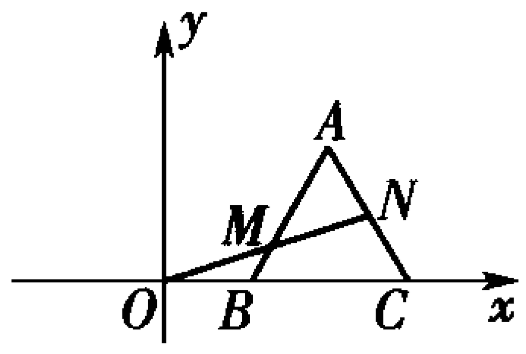

图1

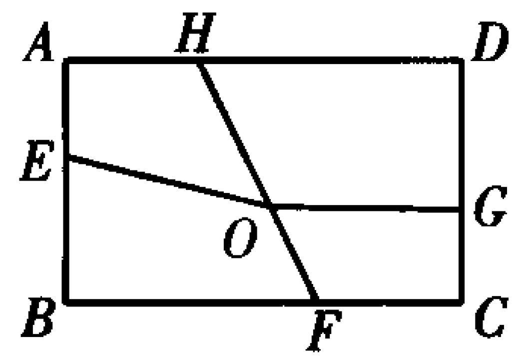

图2

6. 如图2，在矩形$ABCD$中，$AB=5$，$BC=8$，点E、F、G、H分别在边AB、BC、CD、DA上，使得$AE=2$，$BF=5$，$DG=3$，$AH=3$，点O在线段HF上，使得四边形$AEOH$的面积为9. 则四边形$OFCG$的面积是______.

7. 已知整数p、q满足$p+q=2\ 010$，且关于x的一元二次方程$67x^2+px+q=0$的两个根均为正整数. 则$p=$______.

8. 已知实数a、b、c满足

$a\geqslant b\geqslant c$，$a+b+c=0$，且$a\neq0$.

设x_1、x_2是方程$ax^2+bx+c=0$的两个实数根. 则平面直角坐标系内两点$A(x_1,x_2)$、$B(x_2,x_1)$之间的距离的最大值为______.

故只需证$\overset{\frown}{E'M'}=\overset{\frown}{BD'}$.

于是，原题转化为：

如图2，$\odot O$直径$F'G\perp E'B$，MM'为EB的中垂线，弧$\overset{\frown}{BF'E'}$上一点D使$BD=BE$，DE的延长线与$\odot O$交于点D'. 求证：

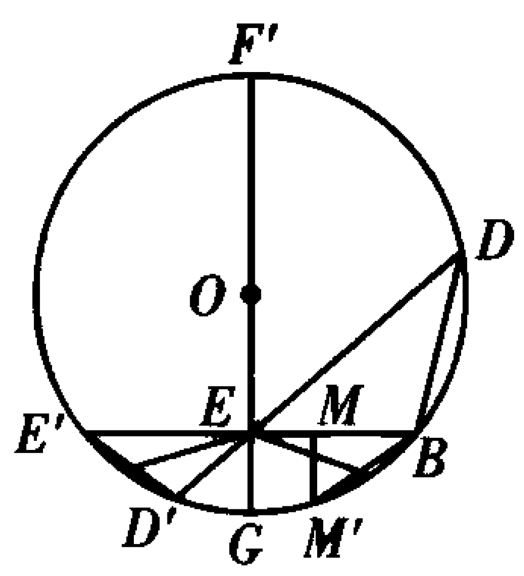

图2

$\overset{\frown}{E'M'}=\overset{\frown}{BD'}$. ①

式① $\Leftrightarrow\angle E'BM'=\angle D'DB$.

而$\angle D'DB=\angle DEB=\angle E'ED'$，且

$\angle D'DB=\angle D'E'E$，

于是，点D'在EE'的中垂线上.

故点D'、M'关于$F'G$对称.

从而，$\angle E'BM'=\angle D'E'E=\angle D'DB$.

9. 如图 3，已知五边形 $ABCDE$ 是正五边形，五角星 $ACEBD$（阴影部分）的面积为 1. 设 AC 与 BE 交于点 P，BD 与 CE 交于点 Q. 则四边形 $APQD$ 的面积等于______.

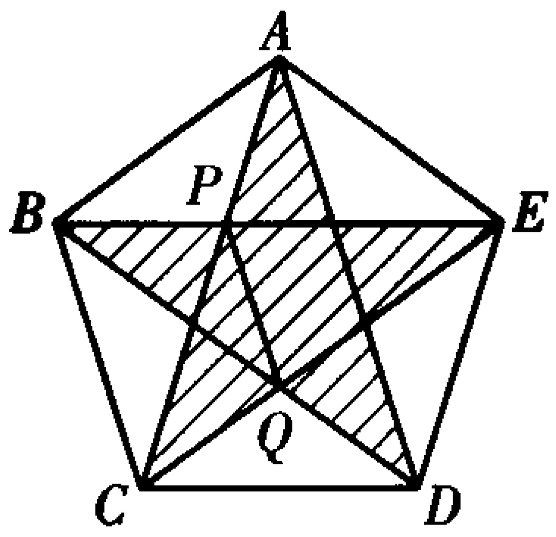

图3

10. 设 a、b、c($1\leqslant a<b<c\leqslant9$) 是整数，且 $\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}+1$ 能被 9 整除. 则 $a+b+c$ 的最小值是______，最大值是______.

二、解答题（每小题 15 分，共 60 分）

11. 已知面积为 4 的 $\triangle ABC$ 的边长分别为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c(c>b)$，AD 是 $\angle A$ 的角平分线，C' 是点 C 关于直线 AD 的对称点. 若 $\triangle C'BD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求 $\triangle ABC$ 周长的最小值.

12. 将 1，2，…，9 这九个数字分别填入图 4 中的九个小方格中，使得七个三位数 $\overline{abc}$、$\overline{def}$、$\overline{ghi}$、$\overline{adg}$、$\overline{beh}$、$\overline{cfi}$ 和 $\overline{aei}$ 都能被 11 整除. 求三位数 $\overline{ceg}$ 的最大值.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图4

13. 设实数 x、y、z 满足 $x+y+z=0$，且

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\leqslant2$.

求 x 的最大值和最小值.

14. 称具有 a^2+161b^2 形式的数为“好数”，其中，a、b 都是整数. 证明：

(1) 100、2 010 都是好数；

(2) 存在正整数 x、y，使得 $x^{161}+y^{161}$ 是好数，而 $x+y$ 不是好数.

参考答案

一、1. 15 250.

由 $x+\frac{1}{x}=3$，得 $x^2+\frac{1}{x^2}=9-2=7$.

进而，$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=21$.

则 $x^3+\frac{1}{x^3}=21-\left(x+\frac{1}{x}\right)=18$.

于是，$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=126$.

所以，$x^5+\frac{1}{x^5}=126-\left(x+\frac{1}{x}\right)=123$.

从而，$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)^2-2=15\ 127$.

故 $x^{10}+x^5+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^{10}}$

$=123+15\ 127=15\ 250$.

2. $(-2,-1)$.

将已知方程展开整理得

$x^2+3x+y^2-xy+3=0$.

配方得 $\left(y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\right)^2=0$.

由此得 $x=-2$，$y=-1$.

3. $2\sqrt{2}$.

设 $CD=t$. 则由三角形面积关系得

$\frac{1}{2}\times3t\sin45^\circ+\frac{1}{2}\times6t\sin45^\circ$

$=S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\times3\times6$.

解得 $t=2\sqrt{2}$.

4. 30.

$2\ 010=2\times3\times5\times67$.

在 $1\times2\times\cdots\times2\ 011$ 中含 67 的指数为

$\left[\frac{2\ 011}{67}\right]+\left[\frac{2\ 011}{67^2}\right]+\cdots=30$.

显然，$1\times2\times\cdots\times2\ 011$ 中含 2、3、5 的指数都大于 30.

故 k 的最大值为 30.

5. $M\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

过点 N 作 x 轴的平行线与 AB 交于点 L.

因为 $OM=MN$，所以，

$\triangle OBM\cong\triangle NLM\Rightarrow ML=OB=1$.

由 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，知 $\triangle ALN$ 是边长为 1 的等边三角形，N 为边 AC 的中点.

又 $A(2,\sqrt{3})$，$C(3,0)$，则 $N\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

进而，$M\left(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

6. 6.5.

如图 5，联结 EF、FG、GH、HE.

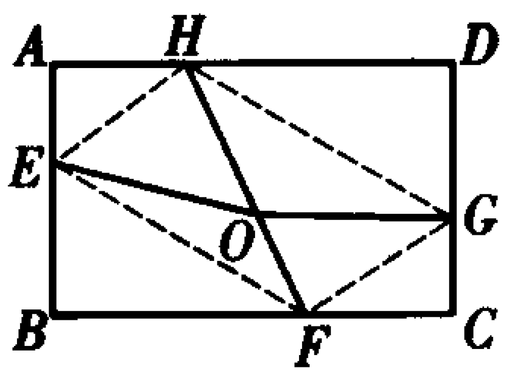

图 5

则易知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，且

$S_{\square EFGH}$

$=40-(S_{\triangle AEH}+S_{\triangle EBF}+S_{\triangle FCG}+S_{\triangle GDH})$

$=19$.

由 $S_{\triangle EOH}+S_{\triangle FOG}=\frac{1}{2}S_{\square EFGH}=9.5$，得

$S_{\triangle FOG}=9.5-(9-S_{\triangle AEH})=3.5$.

故 $S_{四边形OFCG}=3.5+S_{\triangle FCG}=6.5$.

7. $-2\,278$.

设方程的两个正整数根为 x_1、$x_2(x_1\leqslant x_2)$.

则 $x_1+x_2=-\frac{p}{67}$，$x_1x_2=\frac{q}{67}$.

故 $x_1x_2-x_1-x_2=\frac{p+q}{67}=\frac{2\,010}{67}=30$

$\Rightarrow(x_1-1)(x_2-1)=31$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=31.\end{cases}$

于是，$x_1+x_2=34$，$p=-34\times67=-2\,278$.

8. $3\sqrt{2}$.

由题意知 $a>0$，$c<0$.

于是，由 $a\geqslant b\geqslant c$，得 $\frac{c}{a}\leqslant\frac{b}{c}\leqslant1$.

又由 $a+b+c=0$，得 $\frac{b}{a}=-1-\frac{c}{a}$.

故 $\frac{c}{a}\leqslant-1-\frac{c}{a}\leqslant1$，$-2\leqslant\frac{c}{a}\leqslant-\frac{1}{2}$.

因为 $a+b+c=0$，所以，$ax^2+bx+c=0$ 的两根为 1、$\frac{c}{a}$.

故 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_2-x_1)^2}$

$=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2}\left(1-\frac{c}{a}\right)$.

当 $\frac{c}{a}=-2$ 时，$|AB|_{\max}=3\sqrt{2}$.

9. $\frac{1}{2}$.

如图 6，联结 QR.

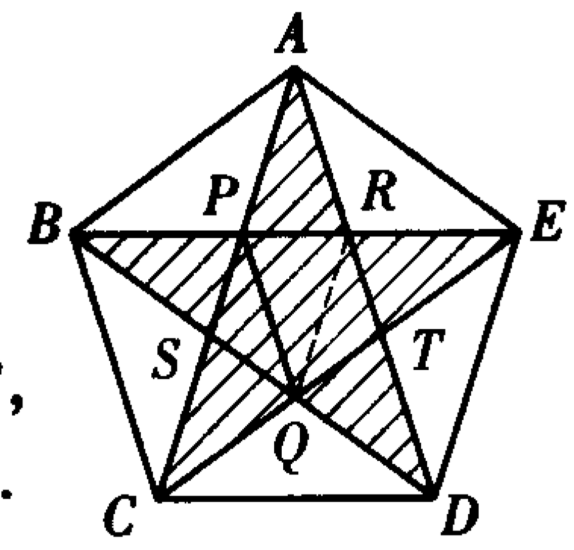

图 6

则易知四边形 $APQR$ 为菱形，

$\triangle QPR\cong\triangle ARP$，

$\triangle SPQ\cong\triangle TRQ$.

记 $S_{\triangle APR}=a$，

$S_{\triangle PSQ}=b$.

则 $1=S_{阴}=6a+2b$，

$S_{四边形APQD}=3a+b=\frac{1}{2}$.

10. 8，23.

设 $a+b+c\equiv r(\bmod 9)$. 则 $\overline{abc}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$ 除以 9 的余数都是 r. 进而，

$\overline{abc}\cdot\overline{bca}\cdot\overline{cab}+1\equiv r^3+1\equiv0(\bmod 9)$，

$r\equiv2,5,8(\bmod 9)$.

因为 a、b、c 是三个非零数码，所以，

$6\leqslant a+b+c\leqslant24$.

结合前面结果知

$(a+b+c)_{\min}=8$，$(a+b+c)_{\max}=23$.

二、**11.** 如图 7，显然，点 C' 在边 AB 上，且 $BC'=c-b$.

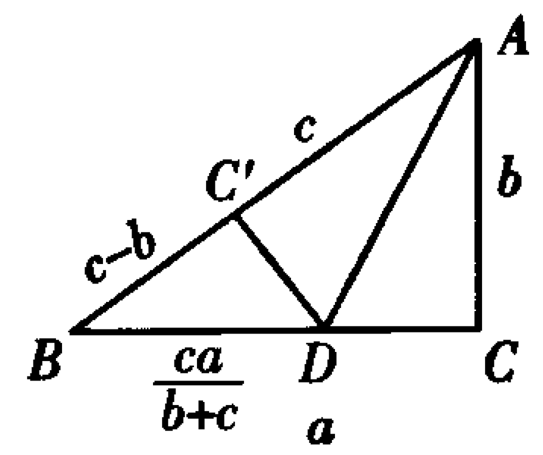

图 7

由内角平行线性质得 $BD=\frac{ca}{b+c}$.

因为 $\triangle C'BD\backsim\triangle ABC$，且 $\angle B$ 为公共角，所以，

$\frac{c-b}{c}=\frac{\frac{ca}{b+c}}{a}$ 或 $\frac{c-b}{a}=\frac{\frac{ca}{b+c}}{c}$.

由前者得 $c^2-b^2=c^2\Rightarrow b^2=0$，这不可能.

由后者得 $c^2-b^2=a^2$，即 $c^2=a^2+b^2$.

故 $\angle C=90°$.

由 $S_{\triangle ABC}=4$，得 $ab=8$. 则

$\triangle ABC$ 的周长

$=a+b+c=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

$\geqslant2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=4\sqrt{2}+4$.

当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$，$c=4$ 时，上式等号

成立.

因此,$\triangle ABC$ 周长的最小值为 $4\sqrt{2}+4$.

12. 按题设,对模 11 有

$a+c\equiv b, d+f\equiv e, g+i\equiv h, a+g\equiv d,$

$b+h\equiv e, c+i\equiv f, a+i\equiv e.$

则 $(a+c)+(d+f)+(g+i)+(b+h)+e$

$\equiv b+h+3e\equiv 4e \pmod{11}$.

上式左端即是

$1+2+\cdots+9=45\equiv 1 \pmod{11}$.

所以,$4e\equiv 1 \pmod{11}$, $e=3$.

于是,$d+f\equiv b+h\equiv a+i\equiv 3 \pmod{11}$.

故 $\{d,f\}$、$\{b,h\}$、$\{a,i\}$ 是 $\{1,2\}$、$\{6,8\}$、$\{5,9\}$ 的一个排列.

从而,$\{c,g\}$ 为 $\{4,7\}$.

欲使 $\overline{ceg}$ 最大,可取

$c=7, g=4$.

图 8 是满足题意的一种填法.

1	8	7
5	3	9
4	6	2

图 8

因此,$\overline{ceg}$ 的最大值是 734.

13. 由题意知

$2\geqslant (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$

$=2x^2+2(y+z)^2-4yz-2(y+z)-2yz$

$=6x^2-6yz$

$=6x^2-6\cdot\frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{4}$

$=\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}(y-z)^2\geqslant\frac{9}{2}x^2.$

于是,$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$.

当 $x=-\frac{2}{3}, y=z=\frac{1}{3}$ 时,满足题设条件;

当 $x=\frac{2}{3}, y=z=-\frac{1}{3}$ 时,也满足题设条件.

故 x 的最大值为 $\frac{2}{3}$,最小值为 $-\frac{2}{3}$.

14. (1)由 $100=10^2+161\times 0^2$,

$2\,010=43^2+161\times 1^2$,

知 100 和 2 010 都是好数.

(2)令 $x=2^{162}+2=2(2^{161}+1)$, $y=2^{161}+1$.

则 $x^{161}+y^{161}=2^{161}(2^{161}+1)^{161}+(2^{161}+1)^{161}$

$=(2^{161}+1)^{162}=[(2^{161}+1)^{81}]^2+161\times 0^2$.

故 $x^{161}+y^{161}$ 为好数.

而对任意整数 m, $m^2\equiv 0,1 \pmod 4$,于是,对任意整数 a、b,

$a^2+161b^2\equiv a^2+b^2\equiv 0,1,2 \pmod 4$.

但 $x+y=2^{162}+2^{161}+3\equiv 3 \pmod 4$,因此,$x+y$ 不是好数.

(熊 斌 刘鸿坤 顾鸿达 叶声扬 李大元 命题)

●会讯●

全国数学竞赛命题工作研讨会在津召开

由华东师范大学国际数学奥林匹克研究中心主办,湖南师范大学数学竞赛研究所、《中等数学》编辑部、华东师范大学出版社和天津华英学校协办的 2011 年全国数学竞赛命题工作研讨会,于 2011 年 1 月 22 日至 25 日在天津南开大学陈省身数学研究所举行。

此次研讨会是经裘宗沪教授提议、在中国数学会普及工作委员会的支持下举办的,其目的是进一步提高我国数学竞赛命题的水平。

参加研讨会的有上海大学冷岗松教授、浙江大学李胜宏教授、华东师范大学熊斌教授、天津师范大学李建泉教授以及来自全国多所中学多年从事数学竞赛教学和研究的四十余位教师。在研讨会上,冷岗松教授做的《命题的探索与实践》和李建泉教授做的《几何命题的方法》的报告,让与会者初步了解了我国数学命题工作的现状,学会了对一道数学竞赛试题命制"好"与"不好"如何进行判断,大家统一了思想、开阔了视野,并对竞赛命题工作的方法有了新的认识。此外,与会的老师都将自己原创的一至两个试题向同仁们进行了介绍。围绕这些命制的题目,专家和老师们就"什么是好的数学竞赛题目"、"如何命制好的数学竞赛题目"等话题展开了热烈的讨论,形成了共识。

短暂的会议结束了。与会的专家与老师们深信,只要通过大家共同不断的努力,一定能使我国数学竞赛命题水平达到一个新的高度。

(高旭东 供稿)

2010 年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)04-0025-03

一、填空题(每小题 8 分,共 40 分)

1. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 3 的函数, 图 1 所示的是该函数在区间 $[-2,1]$ 上的图像. 则 $\frac{f(2\,010)}{f(5)f(16)}$ 的值等于______.

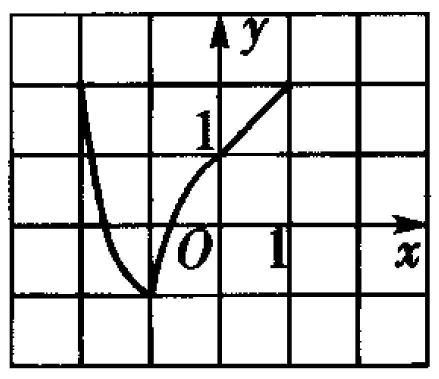

图 1

2. 方程 $\left|x^2-x+\frac{1}{2\,010}\right|=\frac{1}{2\,010}$ 的所有根的立方和等于______.

3. 如图 2, AB 与 $\odot O$ 切于点 A, 联结点 B 与 $\odot O$ 内一点 D 的线段与 $\odot O$ 交于点 C, $AB=6$, $DC=CB=3$, $OD=2$. 则 $\odot O$ 的半径等于______.

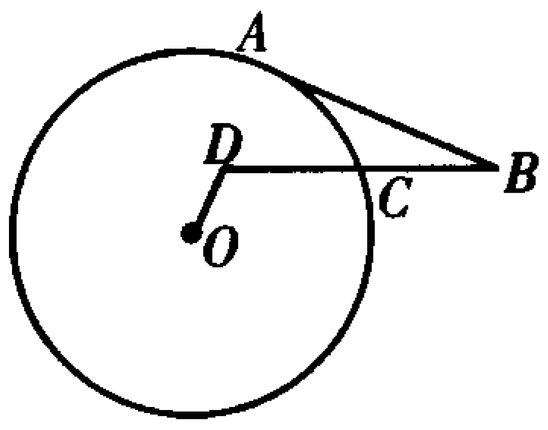

图 2

4. 满足方程

$f(x)+(x-2)f(1)+3f(0)=x^3+2(x\in\mathbf{R})$

的函数 $f(x)=$______.

5. 称自然数为"好数"是指该自然数比它的数字和恰好大 2 007. 则所有好数的和等于______.

二、(15 分) 如图 3, 四个阴影三角形的面积都等于 1.

(1) 求证:

$CB_2=C_1B_2$,

$AC_2=A_1C_2$,

$BA_2=B_1A_2$;

(2) 求证:

$S_{\text{四边形}AB_1B_2C_2}=S_{\text{四边形}BC_1C_2A_2}=S_{\text{四边形}CA_1A_2B_2}$;

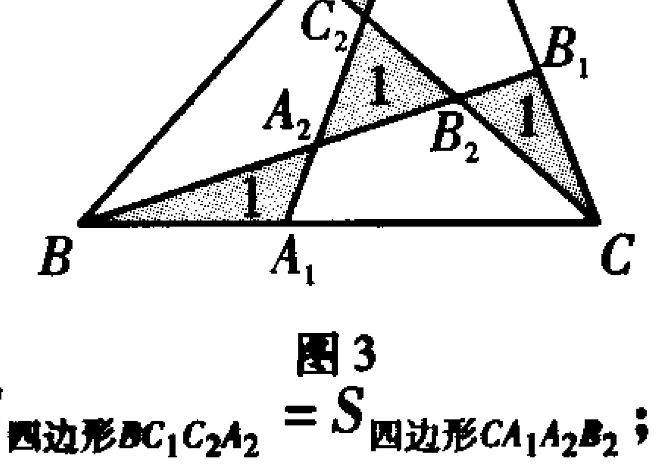

图 3

(3) 求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

三、(15 分) 能否将 2 010 写成 k 个互不相等的质数的平方和? 如果能, 请确定出所有的 k 值, 并对相应的 k 值各写出一个例子; 如果不能, 请简述理由.

四、(15 分) 已知平面上九个点, 任两点间的距离都不小于 1. 证明: 其中至少存在两个点间的距离不小于 $\sqrt{3}$.

五、(15 分) 如图 4, 已知凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O, O_1、O_2、O_3、O_4 分别为 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$、$\triangle DOA$ 的内切圆圆心, 且对应的内切圆半径 r_1、r_2、r_3、r_4 满足关系式

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}.$$

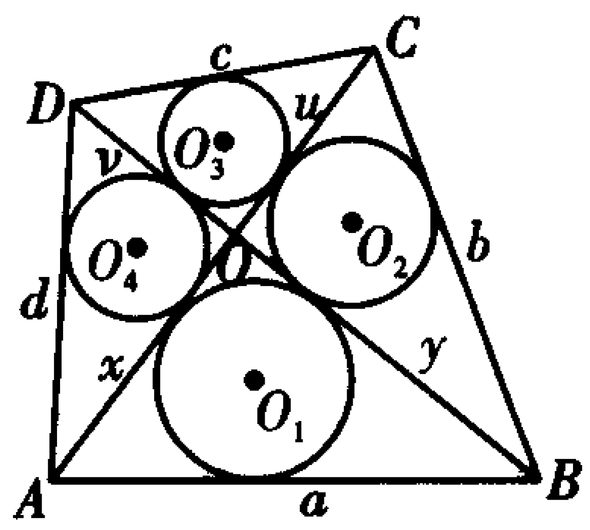

图 4

求证: (1) 四边形 $ABCD$ 存在内切圆;

(2) O_1、O_2、O_3、O_4 四点共圆.

参 考 答 案

一、**1.** $-\frac{1}{2}$.

注意到

$f(5)=f(-1)=-1$,

$f(16)=f(1)=2$,

$f(2\,010)=f(0)=1$.

则 $\frac{f(2\,010)}{f(5)f(16)}=-\frac{1}{2}$.

2. $\frac{669}{335}$.

原方程等价于

$x^2-x=0$ 或 $\frac{-1}{1\ 005}$.

其根为 $x_1=1, x_2=0, x_3、x_4$ 满足

$x_3+x_4=1, x_3x_4=\frac{1}{1\ 005}$.

则 $x_3^3+x_4^3$

$=(x_3+x_4)[(x_3+x_4)^2-3x_3x_4]$

$=1\times\left(1-\frac{3}{1\ 005}\right)=1-\frac{1}{335}=\frac{334}{335}$.

故 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\frac{669}{335}$.

3. $\sqrt{22}$.

如图5，延长 BD 与 $\odot O$ 交于点 E，延长 OD 与 $\odot O$ 交于点 $F、G$，FG 是 $\odot O$ 的直径. 设 $\odot O$ 的半径为 r.

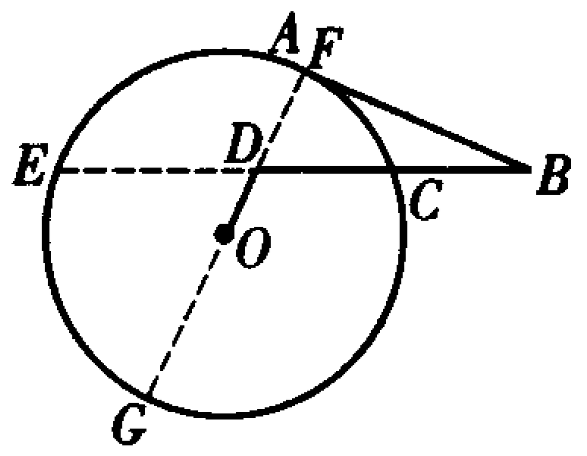

图5

由切割线定理有

$BC\cdot BE=BA^2$,

即 $3(DE+6)=6^2=36$.

所以，$DE=6$.

由相交弦定理得

$DE\cdot DC=DF\cdot DG$,

即 $6\times3=(r-2)(r+2)$.

所以，$18=r^2-4\Rightarrow r=\sqrt{22}$.

4. x^3-x+1.

取 $x=1$ 和 $x=0$，代入方程得

$f(0)=1, f(1)=1$.

故 $f(x)=x^3+2-(x-2)f(1)-3f(0)$

$=x^3-x+1$.

5. 20 145.

设 $f(n)=n-S(n)$（$S(n)$ 是自然数 n 的数字和）. 则函数 $f(n)$ 是非严格的增函数，且

$f(2\ 009)<f(2\ 010)$

$=f(2\ 011)=\cdots=f(2\ 019)=2\ 007$

$<f(2\ 020)$.

所以，满足条件的所有自然数只有10个，其和为

$2\ 010+2\ 011+\cdots+2\ 019=20\ 145$.

二、(1) 设 $\frac{AB_1}{B_1C}=\lambda$.

如图6，联结 AB_2. 则

$S_{\triangle AB_1B_2}=\lambda$.

联结 B_1C_2、CA_2. 于是，

$B_1C_2 /\!/ CA_2$.

故 $\frac{AC_2}{C_2A_2}$

$=\frac{AB_1}{B_1C}=\lambda$.

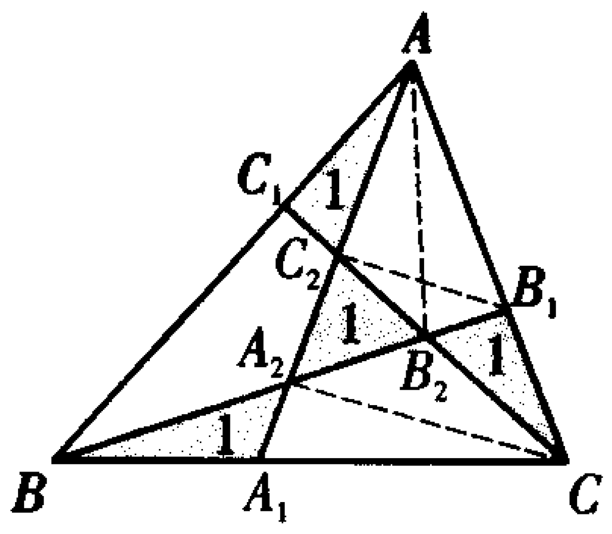

图6

则 $\frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}=\lambda$

$\Rightarrow S_{\triangle AB_2C_2}=\lambda, S_{四边形AB_1B_2C_2}=2\lambda$.

由 $S_{\triangle AB_2C_1}=1+\lambda=S_{\triangle AB_2C}$，则

$C_1B_2=B_2C$.

同理，设 $\frac{BC_1}{C_1A}=\mu, \frac{CA_1}{A_1B}=\eta$，分别得

$S_{四边形BC_1C_2A_2}=2\mu\Rightarrow AC_2=C_2A_1$,

$S_{四边形CA_1A_2B_2}=2\eta\Rightarrow BA_2=A_2B_1$.

故 $CB_2=C_1B_2, AC_2=A_1C_2, BA_2=B_1A_2$.

(2) 由(1)所证得 $C_1B_2=B_2C$. 易知

$S_{\triangle BC_1B_2}=S_{\triangle BB_2C}$,

即 $1+S_{四边形BC_1C_2A_2}=1+S_{四边形CA_1A_2B_2}$.

所以，$S_{四边形BC_1C_2A_2}=S_{四边形CA_1A_2B_2}$.

同理，由 $BA_2=B_1A_2$，得

$S_{四边形AB_1B_2C_2}=S_{四边形BC_1C_2A_2}$.

故 $S_{四边形AB_1B_2C_2}=S_{四边形BC_1C_2A_2}$

$=S_{四边形CA_1A_2B_2}$.

(3) 由 $S_{四边形AB_1B_2C_2}=S_{四边形BC_1C_2A_2}$

$=S_{四边形CA_1A_2B_2}$,

即 $2\lambda=2\eta=2\mu$,

得 $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{CA_1}{A_1B}$.

则 $\frac{S_{\triangle AA_2B_2}}{S_{\triangle AB_2B_1}}=\frac{S_{\triangle CA_2B_2}}{S_{\triangle CB_2B_1}}\Rightarrow\frac{1+\lambda}{\lambda}=\frac{\lambda}{1}$

$\Rightarrow\lambda^2-\lambda-1=0$.

解得 $\lambda=\frac{\pm\sqrt{5}+1}{2}$（负根舍去）.

故 $S_{\text{四边形}AB_1B_2C_2}=S_{\text{四边形}BC_1C_2A_2}=S_{\text{四边形}CA_1A_2B_2}$
$=\sqrt{5}+1$.

因此,$S_{\triangle ABC}=4+3(\sqrt{5}+1)=7+3\sqrt{5}$.

三、(1)若 2 010 能写成 k 个质数的平方和,因最小的 10 个互不相等的质数的平方和

$$4+9+25+49+121+169+289+361+529+841=2\ 397>2\ 010,$$

所以,$k\leqslant 9$.

易知,只有一个偶质数 2,其余质数都是奇数,而奇数的平方被 8 除余 1.

显然,2 010 不是一个质数的平方,故 $k\neq 1$.

又两个不同质数的平方之和被 3 除余 1 或 2,但 $3\mid 2\ 010$,故 $k\neq 2$.

因 2 010 被 8 除余 2,但 $l(l=3,4,5,6,8,9)$ 个不同质数的平方和被 8 除余 3 或 6,4 或 7,5 或 0,6 或 1,0 或 3,1 或 4,所以,$k\neq 3,4,5,6,8,9$.

注意到

$$2\ 010=2^2+3^2+7^2+11^2+13^2+17^2+37^2.$$

故 $k=7$.

四、设已知的九个点的集合为 S. 则在平面上可画一直线 l,使 S 中的点在 l 同一侧. 平移直线 l,直到遇到 S 中的点 O 为止. 此时,S 中的点在直线 l 上或 l 的同一侧.

如图 7,以 O 为圆心、1 为半径画圆与直线 l 交成半圆区域 P,再以 O 为圆心、$\sqrt{3}$ 为半径画半圆,与直线 l 和前面画的半圆 $(O,1)$ 交成半圆环 Q.

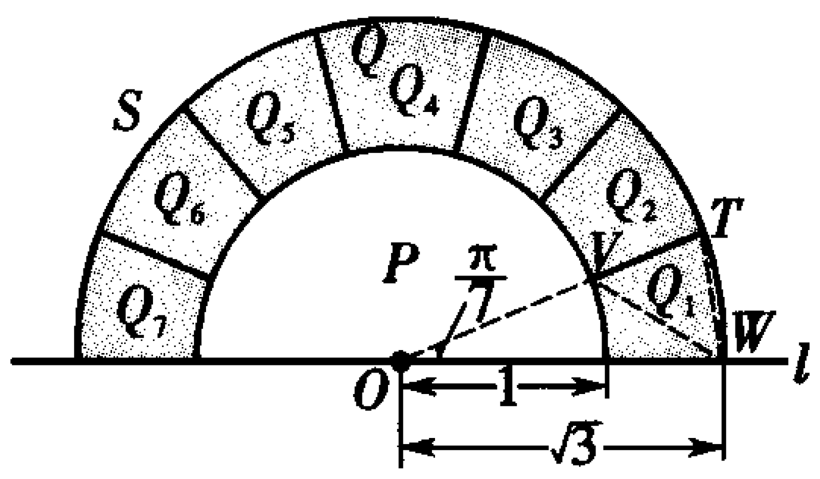

图 7

显然,除点 O 外的其余八个点不能在半圆区域 P 中.

接下来证明:这八个点中至少有一个点不在半圆环 Q 中.

事实上,以 O 为始点作射线,将半圆环 Q 等分成圆心角为 $\frac{\pi}{7}$ 的七个相等的小区域 Q_i $(i=1,2,\cdots,7)$. 可估计 Q_i 中两点间的距离.

则 $TV=\sqrt{3}-1<1$, $WT<\overset{\frown}{WT}=\frac{2\pi\sqrt{3}}{14}<1$,

且 $$VW=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{7}}$$
$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{7}}<\sqrt{4-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}$$
$$=\sqrt{4-2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=1.$$

故每个 Q_i 中任两点间的距离都小于 1.

所以,每个 Q_i 中至多分布 S 中的一个点.

于是,前述八个点中至少有一点 A 要分布在半圆 $(O,\sqrt{3})$ 之外.

因此,$OA\geqslant\sqrt{3}$.

五、(1)设 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AO=x,BO=y,CO=u,DO=v,\cos\angle AOB=k$.

则 $\cos\angle BOC=-k$.

由已知条件得

$$\frac{a+x+y}{xy}+\frac{c+u+v}{uv}=\frac{b+y+u}{yu}+\frac{d+x+v}{xv}$$
$$\Rightarrow auv+cxy=bxv+dyu$$
$$\Rightarrow a^2u^2v^2+c^2x^2y^2+2auvcxy=b^2x^2v^2+d^2y^2u^2+2bxvdyu.$$

用余弦定理表示 a^2、b^2、c^2、d^2 并代入上式得

$$(x^2+y^2-2kxy)u^2v^2+(u^2+v^2-2kuv)x^2y^2+2acxyuv$$
$$=(y^2+u^2+2kuy)x^2v^2+(x^2+v^2+2kxv)y^2u^2+2bdxyuv$$
$$\Rightarrow 2ac-2kuv-2kxy=2bd+2kxv+2kyu.$$

上式两边同时添加 $x^2+y^2+u^2+v^2$ 得

$$2ac+(u^2+v^2-2kuv)+(x^2+y^2-2kxy)=2bd+(x^2+v^2-2kxv)+(y^2+u^2-2kyu)$$
$$\Rightarrow 2ac+c^2+a^2=2bd+d^2+b^2$$
$$\Rightarrow (a+c)^2=(b+d)^2$$
$$\Rightarrow a+c=b+d.$$

故四边形 $ABCD$ 存在内切圆.

2010年全国高中数学联赛山西省预赛

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)04-0028-03

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 已知12个互不相同的正整数之和为2 010. 则这些正整数的最大公约数的最大值是______.

2. 已知函数$f(x)=ax^2-\sqrt{2}$. 若

$$f(f(\sqrt{2}))=-\sqrt{2},$$

则$a=$______.

3. 设$a_n=\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\cdots+\sqrt{n\times(n+1)}$.

则$\left[\frac{2a_n}{n}\right]=$______($[x]$表示不超过实数$x$的最大整数).

4. 设$A(0,b)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴端点,$B$是椭圆上一点,$C(0,-1)$是点$B$在$y$轴上的投影. 若$AB=3\sqrt{2}$,$AC=BC$,则椭圆的焦距为______.

5. 若$x\in[0,\pi]$,则函数

$$y=\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin x+\cos x}$$

的值域是______.

6. 设正四棱锥的侧棱长为1. 则其体积的最大值为______.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_1=1,a_n+a_{n+1}=-n^2.$$

则$a_{15}=$______.

8. 若四位数n的四个数位中至多含有两个不同的数码,则称n为"简单四位数"(如5 555和3 313). 那么,简单四位数的个数是______.

二、(16分)如图1,M是正$\triangle A_1A_2A_3$的中心,N是其所在平面上的任意一点,以MN为直径的圆分别与直线MA_i($i=1,2,3$)交于点B_i. 证明:

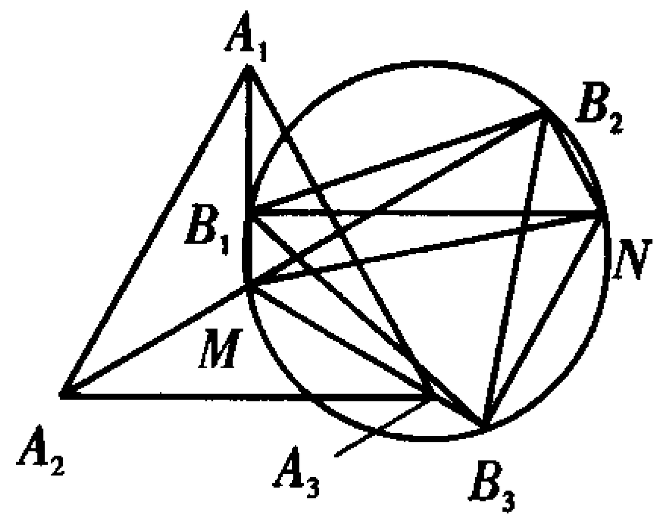

图1

---

(2)设$\angle AOB=\theta$.

易知,O_1、O、O_3,O_2、O、O_4分别三点共线,且$O_1O_3\perp O_2O_4$.

因此,要证O_1、O_2、O_3、O_4四点共圆,只需证明$OO_1\cdot OO_3=OO_2\cdot OO_4$,即

$$\frac{r_1r_3}{\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{r_2r_4}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.\qquad①$$

事实上,设由O引向

$\odot(O_1,r_1)$、$\odot(O_2,r_2)$、$\odot(O_3,r_3)$、$\odot(O_4,r_4)$

的切线长分别为l_1、l_2、l_3、l_4. 则

$$l_1=\frac{1}{2}(x+y-a)=r_1\cot\frac{\theta}{2},$$

$$l_2=\frac{1}{2}(y+u-b)=r_2\tan\frac{\theta}{2},$$

$$l_3=\frac{1}{2}(u+v-c)=r_3\cot\frac{\theta}{2},$$

$$l_4=\frac{1}{2}(v+x-d)=r_4\tan\frac{\theta}{2}.$$

因为$a+c=b+d$,所以,

$$l_1+l_3=l_2+l_4,$$

即

$$(r_1+r_3)\cot\frac{\theta}{2}=(r_2+r_4)\tan\frac{\theta}{2}.\qquad②$$

由已知式得

$$\frac{r_1+r_3}{r_1r_3}=\frac{r_2+r_4}{r_2r_4}.\qquad③$$

②÷③得

$$r_1r_3\cot\frac{\theta}{2}=r_2r_4\tan\frac{\theta}{2},$$

即式①成立.

(李延林　提供)

$MB_1^2+MB_2^2+MB_3^2=NB_1^2+NB_2^2+NB_3^2$.

三、(20 分)设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,约定 $x_{n+1}=x_1$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{2}}.$$

四、(20 分)一次足球邀请赛共安排了 n 支球队参加,每支球队预定的比赛场数分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$. 若任两支球队之间至多安排了一场比赛,则称 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是一个"有效安排". 证明:若 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是一个有效安排,且 $m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_n$,则可去掉一支球队,并重新调整各队之间的对局情况,使 $(m_2-1,m_3-1,\cdots,m_{m_1+1}-1,m_{m_1+2},\cdots,m_n)$ 也是一个有效安排.

参考答案

一、1. 15.

设最大公约数为 d,12 个数分别为 a_1d, $a_2d,\cdots,a_{12}d$,其中,$(a_1,a_2,\cdots,a_{12})=1$.

记 $S=\sum\limits_{i=1}^{12}a_i$. 则 $2\,010=Sd$.

欲使 d 最大,当使 S 取最小.

由于 $a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 互异,则

$S\geqslant 1+2+\cdots+12=78$.

又 $S\mid 2\,010$,而 $2\,010=2\times3\times5\times67$,故其大于 77 的最小正因数是 $2\times67=134$.

所以,$d\leqslant 15$,且 $d=15$ 可以取到,只需令

$(a_1,a_2,\cdots,a_{11},a_{12})=(1,2,\cdots,11,68)$ 即可.

2. 0 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $a[a(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}]^2-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$,得

$a(2a-\sqrt{2})^2=0$.

解得 $a=0$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $n+1$.

因为 $k<\sqrt{k(k+1)}<k+\frac{1}{2}$,所以,

$$\sum_{k=1}^{n}k<a_n<\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right),$$

即 $\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{n(n+2)}{2}$.

因此,$\left[\frac{2a_n}{n}\right]=n+1$.

4. $4\sqrt{2}$.

易知,$AC=BC=3$,$OC=1$,$OA=2$,即 $b=2$,点 $B(\pm3,-1)$,代入椭圆方程得 $a^2=12$.

则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$.

故焦距 $2c=4\sqrt{2}$.

5. $\left[-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

令 $t=\sin x+\cos x$. 则

$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

于是,$y=\frac{t-1}{2}$.

又 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,而 $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$,

则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,即

$t\in[-1,\sqrt{2}]$.

因此,$y\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$.

6. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

如图 2,设正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面中心为 H,$\angle PAH=\theta$. 则

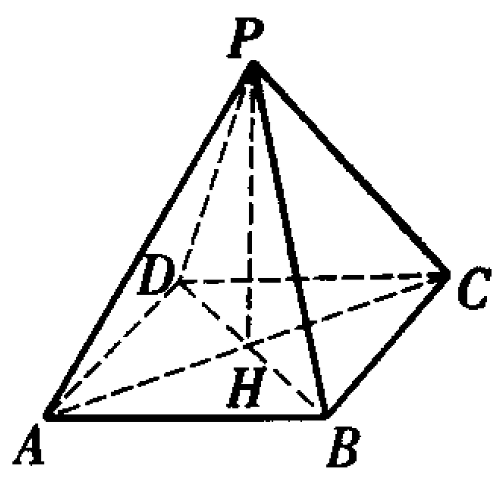

图 2

$AH=\cos\theta$,

$PH=\sin\theta$,

$V=\frac{2}{3}\cos^2\theta\cdot\sin\theta$.

记 $\sin\theta=x$. 则 $V=\frac{2}{3}(x-x^3)$.

令 $V'=0$,得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

于是,$V_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$.

7. -104.

将 $a_n+a_{n+1}=-n^2$ 改写为

$$\left(a_n+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}\right)+\left[a_{n+1}+\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n+1}{2}\right]=0.$$

令 $b_n=a_n+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$. 则

$b_1=1$, 且 $b_{n+1}=-b_n$.

所以, $b_{2k-1}=1, b_{2k}=-1(k=1,2,\cdots)$.

于是, $b_{15}=1$, 即

$$a_{15}=1+\frac{15}{2}-\frac{15^2}{2}=-104.$$

8. 576.

若四位数的四个数码都相同,则这种四位数有九个.

若四位数的四个数码有两个值,首位数 $a\in\{1,2,\cdots,9\}$ 有 9 种取法,当首位数 a 填好后,再任取 $b\in\{0,1,\cdots,9\}$,且 $b\neq a$,选取 b 的方法有 9 种;后三个数位中,每一位置都填 a 或 b,但不能后三位全填 a,有 $2^3-1=7$ 种填法. 故四个数码恰有两个值的四位数有

$$9\times9\times7=567(\text{个}).$$

因此,简单四位数共有 $9+567=576$ 个.

二、由 $M、B_1、B_2、N、B_3$ 五点共圆,有

$\angle B_1MB_3=120°$,

知 $\angle B_1B_2B_3=60°$,

$\angle B_1B_3B_2=\angle B_1MB_2=\angle A_1MB_2=60°$.

故 $\triangle B_1B_2B_3$ 为正三角形.

先证明一个引理.

引理 如图 3, P 是正 $\triangle ABC$ 外接圆上的任一点. 则 $PA^2+PB^2+PC^2$ 为定值.

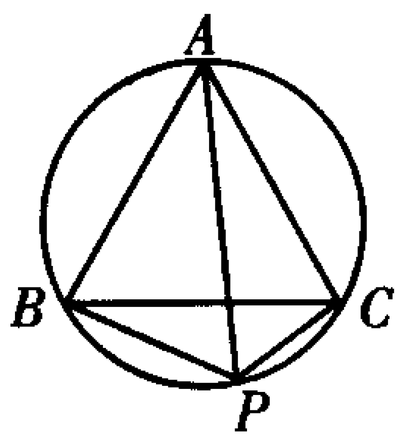

图3

证明 设 $\triangle ABC$ 的边长为 a, $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$.

于是, $x=y+z$.

则 $x^2+y^2+z^2=(y+z)^2+y^2+z^2$

$=2(y^2+z^2+yz)=2BC^2=2a^2$.

回到原题.

由引理可得

$MB_1^2+MB_2^2+MB_3^2=NB_1^2+NB_2^2+NB_3^2$.

三、令 $x_k=\tan^2\theta_k$, 其中, $\theta_k\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 约定 $\theta_{n+1}=\theta_1$. 则

$$\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}}$$
$$=\sqrt{\cos^4\theta_k+\sin^4\theta_{k+1}}$$
$$\geqslant\frac{\cos^2\theta_k+\sin^2\theta_{k+1}}{\sqrt{2}}.$$

故 $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{(x_k+1)^2}+\frac{x_{k+1}^2}{(x_{k+1}+1)^2}}$$
$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2\theta_k+\sin^2\theta_{k+1}}{\sqrt{2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}.$$

四、设预定比赛 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$ 场的队为 A_i.

(1)若 A_1 的 m_1 场比赛其对手恰好就是 $A_2,A_3,\cdots,A_{m_1+1}$,则直接去掉 A_1(当然, A_1 所参与的所有比赛也就被取消了). 于是,剩下的队 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 之间的比赛,以

$$(m_2-1,m_3-1,\cdots,m_{m_1+1}-1,m_{m_1+2},\cdots,m_n)$$

为有效安排.

(2)若球队 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 中有些队并未安排与 A_1 比赛,设在 $A_2,A_3,\cdots,A_{m_1+1}$ 中自左至右第一支未安排与 A_1 比赛的队是 A_j.

由于 A_1 要赛 m_1 场,于是,在 $A_2,A_3,\cdots,A_{m_1+1}$ 之外必有一支球队安排了与 A_1 比赛(设为 $A_k(m_1+1<k\leqslant n)$).

又由于 $m_j>m_k$,故必有一支球队 A_s,它被安排了与 A_j 比赛而未安排与 A_k 比赛,如图 4 所示.

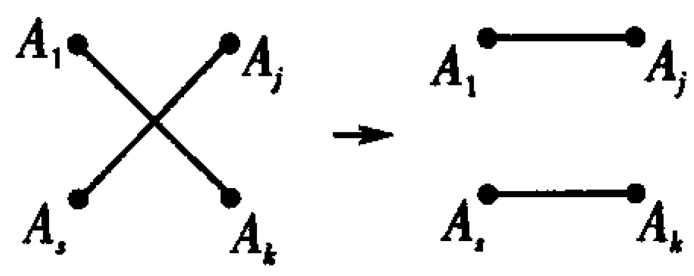

图4

下面对原安排作如下调整:

取消 A_1 与 A_k、A_j 与 A_s 的比赛,改为 A_1 与 A_j、A_s 与 A_k 进行比赛,其他比赛安排不变.

经过这次调整后,所有球队的比赛场数不变,且是一个有效安排. 而第一支不与 A_1 比赛的队的序号至少后移了一个位置,故经有限次这样的调整之后,就变成了情形(1).

因此,结论得证.

(王 光 提供)

2010年全国高中数学联赛四川省预赛

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)04-031-05

一、选择题(每小题5分,共40分)

1. 已知条件 p：$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\frac{4}{3}$和条件 q：$|\sin\alpha+\cos\alpha|=\frac{4}{3}$．则 p 是 q 的(　　)．

(A)充分但不必要条件

(B)必要但不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

2. 在5件产品中有4件正品、1件次品．从中任取两件,记其中含正品的个数为随机变量 ξ．则 ξ 的数学期望 $E\xi$ 是(　　)．

(A)$\frac{6}{5}$　(B)$\frac{7}{5}$　(C)$\frac{8}{5}$　(D)$\frac{9}{5}$

3. 设正三棱锥 $S-ABC$ 的底面边长为3,侧棱长为2．则侧棱 SA 与底面 ABC 所成的角的大小是(　　)．

(A)$30°$　(B)$45°$

(C)$60°$　(D)$\arctan\sqrt{2}$

4. 已知函数

$$f(x)=\frac{x^4+(k^2+2k-4)x^2+4}{x^4+2x^2+4}$$

的最小值是0．则非零实数 k 的值是(　　)．

(A)-4　(B)-2　(C)2　(D)4

5. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的八个顶点都在球 O 的球面上,其中,

$AA_1=1, AB=2\sqrt{2}, AD=3\sqrt{3}$．

则 B、C 两点的球面距离是(　　)．

(A)$\frac{2\pi}{3}$　(B)$\frac{4\pi}{3}$　(C)2π　(D)4π

6. 对任意实数 m,过函数

$f(x)=x^2+mx+1$

图像上的点$(2,f(2))$的切线恒过一定点 P．则 P 的坐标为(　　)．

(A)$(0,3)$　(B)$(0,-3)$

(C)$\left(\frac{3}{2},0\right)$　(D)$\left(-\frac{3}{2},0\right)$

7. 设 A_1、A_2为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点．若在椭圆上存在异于点 A_1、A_2 的点 P,使得$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA_2}=0$,其中,$O$ 为坐标原点,则椭圆的离心率 e 的取值范围是(　　)．

(A)$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　(B)$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(C)$\left(\frac{1}{2},1\right)$　(D)$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8. 记$F(x,y)=(x-y)^2+\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{y}\right)^2(y\neq0)$．则 $F(x,y)$的最小值是(　　)．

(A)$\frac{12}{5}$　(B)$\frac{16}{5}$　(C)$\frac{18}{5}$　(D)4

二、填空题(每小题5分,共20分)

9. 设$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且

$f(x)=f(1-x)$．

则$f(2\,010)=$______．

10. 已知实数 x、y 满足

$3|x+1|+2|y-1|\leqslant6$．

则 $2x-3y$ 的最大值是______．

11. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,当 $n\geqslant2$ 时,a_n、S_n、$S_n-\frac{1}{2}$成等比数列．则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=$______．

12. 集合的容量是指集合中元素的和．则满足条件"$A\subseteq\{1,2,\cdots,7\}$,且若 $a\in A$ 时,必有 $8-a\in A$"的所有非空集合 A 的容量的总和是________(用具体数字作答)．

三、解答题(每小题20分,共80分)

13. 已知函数

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4\cos 2x+3\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right).$$

(1)试判断函数$f(x)$的奇偶性,并给出证明;

(2)求$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的最小值与最大值.

14. 已知F为抛物线$y^2=4x$的焦点,点$M(4,0)$,过点F作斜率为k_1的直线与抛物线交于点A、B,延长AM、BM与抛物线分别交于点C、D,设直线CD的斜率为k_2.

(1)求$\frac{k_1}{k_2}$的值;

(2)求直线AB与CD夹角θ的取值范围.

15. 已知函数

$f(x)=x^3-mx^2-x+1(m\in\mathbf{R})$.

(1)求函数$f(x)$的单调区间;

(2)若对一切实数x,有

$$f'(x)\geqslant|x|-\frac{7}{4}$$

成立,求实数m的取值范围.

16. 已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项的和,对任意的正整数n,都有

$$(1-b)S_n=-ba_n+4^n(b>0)$$

成立.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n=\frac{a_n}{4^n}(n\in\mathbf{N}_+)$,若$|c_n|\leqslant2$对所有的正整数$n$成立,求实数$b$的取值范围.

参考答案

一、**1.** C.

因$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=|\sin\alpha+\cos\alpha|$,

所以,p是q的充要条件.

2. C.

数学期望是$1\times\frac{C_4^1}{C_5^2}+2\times\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{8}{5}$.

3. A.

设顶点S在底面$\triangle ABC$的射影是H.则H为$\triangle ABC$的外心.

从而,$AH=\frac{2}{3}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

故$\angle SAH=30^\circ$.

4. B.

注意到

$$f(x)=1+(k^2+2k-6)\frac{x^2}{x^4+2x^2+4}.$$

因为$x^4+4\geqslant4x^2$,所以,

$$0\leqslant\frac{x^2}{x^4+2x^2+4}\leqslant\frac{1}{6}.$$

当$k^2+2k-6\geqslant0$时,$f_{\min}=1>0$;

当$k^2+2k-6<0$时,

$$f_{\min}=1+\frac{1}{6}(k^2+2k-6)=0,$$

解得$k=-2$或0(舍去).

5. C.

球O的半径为

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{1+(2\sqrt{2})^2+(3\sqrt{3})^2}=3.$$

在$\triangle OBC$中,

$OB=OC=3$,$BC=AD=3\sqrt{3}$,

则$\cos\angle BOC=-\frac{1}{2}$.

从而,$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$.

所以,B、C两点的球面距离是

$$2\pi\times3\times\frac{1}{3}=2\pi.$$

6. B.

因为$f'(x)=2x+m$,所以,

$f'(2)=4+m$.

于是,过$(2,f(2))$的切线方程是

$y-(5+2m)=(4+m)(x-2)$,

即　$y=(m+4)x-3$.

因此，切线方程恒过$(0,-3)$.

7. D.

由题设知$\angle OPA_2=90°$.

设$P(x,y)(x>0)$.

以OA_2为直径的圆的方程为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4},$$

与椭圆方程联立得

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-ax+b^2=0.$$

由题设知，此方程在$(0,a)$上有实根.

由此得$0<\dfrac{a}{2\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)}<a$，化简得

$$e^2>\frac{1}{2}.$$

所以，e的取值范围为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

8. C.

设动点$P\left(x,-\dfrac{x}{3}\right)$、$Q\left(y,\dfrac{3}{y}\right)$. 则

$F(x,y)=|PQ|^2$.

于是，点P的轨迹为直线$y=-\dfrac{x}{3}$，点Q的轨迹为双曲线$y=\dfrac{3}{x}$，双曲线上的任一点$\left(x_0,\dfrac{3}{x_0}\right)$到直线$x+3y=0$的距离为

$$d=\frac{\left|x_0+3\times\dfrac{3}{x_0}\right|}{\sqrt{10}}\geqslant\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

当$x_0=\pm3$时，上式等号成立.

故$F(x,y)$的最小值为$\dfrac{18}{5}$.

二、**9.** 0.

由条件知

$f(0)=0$,

$f(x+1)=f(-x)=-f(x)$.

于是，$f(x+2)=f(x)$，即$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

所以，$f(2\,010)=f(0)=0$.

10. 4.

由$3|x+1|+2|y-1|\leqslant6$确定的图形是四边形$ABCD$及其内部，其中，

$A(-1,4)$、$B(1,1)$、$C(-1,-2)$、$D(-3,1)$.

由线性规划知识，知$2x-3y$的最大值是4.

当$x=-1$，$y=-2$时可取到最大值.

11. $-\dfrac{1}{2}$.

由条件知当$n\geqslant2$时，

$$S_n^2=a_n\left(S_n-\frac{1}{2}\right)=(S_n-S_{n-1})\left(S_n-\frac{1}{2}\right).$$

从而，$\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$.

则$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{S_1}+2(n-1)=2n-1$.

所以，$S_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

故$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}$$

$$=-\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{(2n-1)(2n-3)}$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{3}{n}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

12. 224.

先找出满足条件的单元素和二元素的集合有：

$A_1=\{4\}$，$A_2=\{1,7\}$，$A_3=\{2,6\}$，$A_4=\{3,5\}$.

再将这四个集合中的元素任意组合起来也满足要求.

因此，所有符合条件的集合A中元素的总和为

$(4+8+8+8)\times2^3=224$.

三、**13.** (1)注意到

$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-$

$$4\cos 2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

$=-2\sqrt{2}\cos x-4\cos 2x.$

因 $\cos x$、$\cos 2x$ 均为偶函数，所以，$f(x)$ 为偶函数.

(2)注意到

$f(x)=-2\sqrt{2}\cos x-4(2\cos^2 x-1)$

$=-8\cos^2 x-2\sqrt{2}\cos x+4$

$=-8\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2+\frac{17}{4}.$

由 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，知 $-1\leqslant\cos x\leqslant 0$.

故当 $\cos x=-1$ 时，$(f(x))_{\min}=2\sqrt{2}-4$；

当 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，$(f(x))_{\max}=\frac{17}{4}$.

14. (1)由条件知 $F(1,0)$. 设

$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$.

不妨设 $y_1>0$.

将 $l_{AB}:y=k_1(x-1)$ 与 $y^2=4x$ 联立得

$y^2-\frac{4}{k_1}y-4=0.$

所以，$y_1y_2=-4$，$x_1x_2=1$.

(i)若 $x_1=4$，则 $A(4,4)$.

故 $y_2=\frac{-4}{y_1}=-1$，$x_2=\frac{1}{4}$，即 $B\left(\frac{1}{4},-1\right)$.

由 $l_{AM}:x=4$，知 $C(4,-4)$.

将 $l_{BM}:y=\frac{4}{15}(x-4)$ 与 $y^2=4x$ 联立得

$y^2-15y-16=0.$

解得 $y_4=16$，$x_4=64$，即 $D(64,16)$.

于是，$k_1=\frac{4}{3}$，$k_2=\frac{1}{3}$.

所以，$\frac{k_1}{k_2}=4$.

(ii)若 $x_1\neq 4$，将 $l_{AM}:y=\frac{y_1}{x_1-4}(x-4)$ 与 $y^2=4x$ 联立得

$y_1^2(x-4)^2=4x(x_1-4)^2.$

又由 $y_1^2=4x_1$，化简得

$x_1x^2-(x_1^2+16)x+16x_1=0.$

此方程有一根为 x_1，所以，另一根

$x_3=\frac{16}{x_1}$，$y_3=\frac{-16}{y_1}$.

故 $C\left(\frac{16}{x_1},-\frac{16}{y_1}\right)$.

同理，$D\left(\frac{16}{x_2},-\frac{16}{y_2}\right)$.

则 $k_2=\frac{-\frac{16}{y_2}+\frac{16}{y_1}}{\frac{16}{x_2}-\frac{16}{x_1}}=-\frac{x_1x_2}{y_1y_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{4}k_1$

$\Rightarrow\frac{k_1}{k_2}=4.$

由(i)、(ii)知 $\frac{k_1}{k_2}=4$.

(2)注意到

$\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{3k_1}{4+k_1^2}\right|\leqslant\frac{3}{4}.$

故 $\theta\leqslant\arctan\frac{3}{4}$.

所以，夹角 θ 的取值范围是 $\left(0,\arctan\frac{3}{4}\right]$.

15. (1)因为 $f'(x)=3x^2-2mx-1$，且

$\Delta=4m^2+12>0$，

所以，$f'(x)=0$ 有两个不等实根

$x_1=\frac{m-\sqrt{m^2+3}}{3}$，$x_2=\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{3}$.

显然，$x_1<x_2$.

当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减；

当 $x>x_2$ 或 $x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增.

综上，$f(x)$ 的单调递减区间为

$\left[\frac{m-\sqrt{m^2+3}}{3},\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{3}\right]$；

单调递增区间为

$$\left(-\infty,\frac{m-\sqrt{m^2+3}}{3}\right)、\left(\frac{m+\sqrt{m^2+3}}{3},+\infty\right).$$

(2)由题设有

$$3x^2-2mx-1\geqslant|x|-\frac{7}{4}.$$

(i)当 $x>0$ 时,有

$$3x^2-(2m+1)x+\frac{3}{4}\geqslant 0,$$

即 $3x+\frac{3}{4x}\geqslant 2m+1$

在 $x>0$ 时恒成立.

注意到

$$3x+\frac{3}{4x}\geqslant 2\sqrt{3x\cdot\frac{3}{4x}}=3.$$

当 $x=\frac{1}{2}$时,上式等号成立.

所以,$3\geqslant 2m+1\Rightarrow m\leqslant 1$.

(ii)当 $x<0$ 时,有

$$3|x|^2+(2m-1)|x|+\frac{3}{4}\geqslant 0,$$

即 $3|x|+\frac{3}{4|x|}\geqslant 1-2m$

在 $x<0$ 时恒成立.

注意到

$$3|x|+\frac{3}{4|x|}\geqslant 2\sqrt{3|x|\cdot\frac{3}{4|x|}}=3.$$

当 $x=-\frac{1}{2}$时,上式等号成立.

所以,$3\geqslant 1-2m\Rightarrow m\geqslant -1$.

(iii)当 $x=0$ 时,$m\in\mathbf{R}$.

综上,实数 m 的取值范围是$[-1,1]$.

16. (1)当 $n=1$ 时,有

$$(1-b)a_1=-ba_1+4.$$

故 $a_1=4$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$(1-b)S_n=-ba_n+4^n$$

及 $(1-b)S_{n-1}=-ba_{n-1}+4^{n-1}$.

则$(1-b)a_n=-b(a_n-a_{n-1})+3\times 4^{n-1}$,

即 $a_n=ba_{n-1}+3\times 4^{n-1}$.

(i)若 $b=4$,则$\frac{a_n}{4^n}=\frac{a_{n-1}}{4^{n-1}}+\frac{3}{4}$.

于是,$\frac{a_n}{4^n}=\frac{a_1}{4}+\frac{3}{4}(n-1)$.

故 $a_n=(3n+1)\times 4^{n-1}(n\geqslant 1)$.

(ii)若 $b\neq 4$,则

$$a_n+\frac{3}{b-4}\times 4^n=b\left(a_{n-1}+\frac{3}{b-4}\times 4^{n-1}\right).$$

于是,$a_n+\frac{3}{b-4}\times 4^n=\left(a_1+\frac{3}{b-4}\times 4^n\right)b^{n-1}$.

故 $a_n=\left(4+\frac{12}{b-4}\right)b^{n-1}-\frac{3}{b-4}\times 4^n(n\geqslant 1)$.

$$综上,a_n=\begin{cases}(3n+1)\times 4^{n-1}, & b=4;\\ \left(4+\frac{12}{b-4}\right)b^{n-1}-\frac{3}{b-4}\times 4^n, & b\neq 4.\end{cases}$$

(2)若 $b=4$,则 $c_n=\frac{3n+1}{4}$,显然不满足条件.

若 $b\neq 4$,则

$$c_n=\frac{4(b-1)}{b(b-4)}\left(\frac{b}{4}\right)^n-\frac{3}{b-4}.$$

当 $b>4$ 时,$\frac{4(b-1)}{b(b-4)}>0$,故当 $n\to+\infty$ 时,$c_n\to+\infty$,不符合条件.

(i)当 $0<b<1$ 时,

$$\frac{4(b-1)}{b(b-4)}>0,\ -\frac{3}{b-4}>0.$$

从而,c_n为单调递减数列,且 $c_n>0$.

所以,只须 $c_1\leqslant 2$,显然成立.

(ii)当 $b=1$ 时,$c_n=1$,显然满足条件.

(iii)当 $1<b<4$ 时,

$$\frac{4(b-1)}{b(b-4)}<0,\ -\frac{3}{b-4}>0.$$

从而,c_n为单调递增数列.

因为 $c_1=1>0$,所以,$c_n>0$.

要使$|c_n|\leqslant 2$ 成立,只须

$$\lim_{n\to\infty}c_n=-\frac{3}{b-4}\leqslant 2,$$

即 $1<b\leqslant\frac{5}{2}$.

综上,所求的实数 b 的范围是$\left(0,\frac{5}{2}\right]$.

(李昌勇　提供)

2010年全国高中数学联赛广东省预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)04-0036-02

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 方程

$$\log_{\frac{\pi}{2}} x+\sin x=2$$

在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上的实根个数为______.

2. 设数列$\left\{8\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$的前$n$项和为$S_n$. 则满足不等式

$$|S_n-6|<\frac{1}{125}$$

的最小整数n是______.

3. 已知$n(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$是常数,且$x_1,x_2,\cdots,x_n$为区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内任意实数. 则函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sin x_1\cdot\cos x_2+\sin x_2\cdot\cos x_3+\cdots+\sin x_n\cdot\cos x_1$$

的最大值等于______.

4. 圆周上给定十个点,每两点连一条弦. 如果没有三条弦交于圆内一点,则这些弦在圆内一共有______个交点.

5. 一只虫子沿三角形铁圈爬行,在每个顶点它都等机会地爬向另外两个顶点之一. 则它在n次爬行后恰好回到起始点的概率为______.

6. 设O是平面上一个定点,A、B、C是平面上不共线的三个点,动点P满足

$$\overrightarrow{OP}-\lambda\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{OA}+\lambda\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}(\lambda\in[0,+\infty)).$$

则点P的轨迹为______.

7. 设对给定的整数m,符号$\varphi(m)$表示$\{1,2,3\}$中使$m+\varphi(m)$能被3整除的唯一值. 则

$$\varphi(2^{2010}-1)+\varphi(2^{2010}-2)+\varphi(2^{2010}-3)=\underline{\qquad}.$$

8. 分别以直角三角形的两条直角边a、b和斜边c为轴将直角三角形旋转一周,所得旋转体体积依次为V_a、V_b、V_c. 则$V_a^2+V_b^2$与$(2V_c)^2$的大小关系是______.

二、解答题(共56分)

1. (16分)是否存在实数a,使直线$y=ax+1$与双曲线$3x^2-y^2=1$交于两点A、B,且以AB为直径的圆恰过坐标系的原点?

2. (20分)求证:不存在这样的函数$f:\mathbf{Z}\to\{1,2,3\}$,满足对任意的整数x、y,若$|x-y|\in\{2,3,5\}$,则$f(x)\neq f(y)$.

3. (20分)已知非负实数a、b、c满足$a+b+c=1$. 求证:

$$9abc\leqslant ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{4}(1+9abc).$$

参考答案

一、**1.** 1 **2.** 7 **3.** $\frac{n}{2}$ **4.** 210 **5.** $\frac{2^n+2\times(-1)^n}{3\times2^n}$ **6.** $\angle BAC$的角平分线 **7.** 6 **8.** $V_a^2+V_b^2\geqslant(2V_c)^2$

二、**1.** 设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

将$y=ax+1$代入$3x^2-y^2=1$,消去y得

$$(3-a^2)x^2-2ax-2=0.$$

则x_1、x_2为方程

$$(3-a^2)x^2-2ax-2=0$$

的两根.

由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{2a}{3-a^2},x_1x_2=-\frac{2}{3-a^2}. \qquad ①$$

则以AB为直径的圆恰过原点O

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+(ax_1+1)(ax_2+1)=0.$

将式①代入并化简得

$$\frac{1-a^2}{3-a^2}=0\Rightarrow a=\pm 1.$$

经检验，$a=\pm 1$ 满足题目条件.

2. 假设存在这样的函数 f. 则对于任意整数 n，设

$$f(n)=a,\ f(n+5)=b,$$

其中，a、$b\in\{1,2,3\}$.

由条件知 $a\neq b$.

由于 $|(n+5)-(n+2)|=3$,

$|n-(n+2)|=2$,

故 $f(n+2)\neq a$ 或 b，即 $f(n+2)$ 是 $\{1,2,3\}$ 中去掉 a、b 后剩下的那个数，设 $f(n+2)=c$.

又 $|(n+5)-(n+3)|=2$,

$|n-(n+3)=3$,

故 $f(n+3)=c$.

因此，$f(n+3)=f(n+2)$.

以 $n+1$ 代替 n 得

$$f(n+4)=f(n+3)=f(n+2),$$

但这与 $|(n+4)-(n+2)|=2$ 矛盾.

故假设不成立，即不存在这样的函数 f.

3. **证法 1** 首先证左端的不等式.

利用均值不等式可得

$$\begin{aligned}&ab+bc+ca\\&=(ab+bc+ca)(a+b+c)\\&\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=9abc.\end{aligned}$$

其次证右端的不等式.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$.

由 $a+b+c=1$，得

$$\begin{aligned}&1-4(ab+bc+ca)+9abc\\&=(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)+9abc\\&=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+\\&\quad c(c-a)(c-b)\\&=(a-b)[a(a-c)-b(b-c)]+\\&\quad c(c-a)(c-b)\\&=(a-b)^2(a+b-c)+c(c-a)(c-b)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以，$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{4}(1+9abc)$.

证法 2 左端的不等式证明同证法 1.

下面证明右端的不等式.

考虑根为 a、b、c 的三次多项式

$$\begin{aligned}&P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\\&=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc.\end{aligned}$$

由 $a+b+c=1$，知 a、b、c 中至多有一个数大于或等于 $\frac{1}{2}$.

若存在一个数大于 $\frac{1}{2}$，则

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)<0,$$

即 $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-abc<0$.

故 $4(ab+bc+ca)-8abc<1$.

若 $\frac{1}{2}-a\geqslant 0,\frac{1}{2}-b\geqslant 0,\frac{1}{2}-c\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}&2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)}\\&\leqslant\left(\frac{1}{2}-a\right)+\left(\frac{1}{2}-b\right)\\&=1-a-b=c.\end{aligned}$$

同理，$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)}\leqslant a$,

$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}-c\right)\left(\frac{1}{2}-a\right)}\leqslant b$.

故 $8\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)\leqslant abc$，即

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{4}(1+9abc).$$

（吕伟泉 提供）

●课外训练●

数学奥林匹克初中训练题(140)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)04-0038-03

第一试

一、选择题(每小题7分,共42分)

1. 已知实数 a、b 满足 $a^2+b^2=a+b$. 则 $a+b$ 的取值范围是(　　).

(A) $a+b\geqslant 0$

(B) $0\leqslant a+b\leqslant 2$

(C) $0\leqslant a+b\leqslant 2\sqrt{2}$

(D) $0\leqslant a+b\leqslant 3$

2. 如图1,在 3×4 表格中,左上角的一个 1×1 小方格被染成红色. 则在这个表格中包含红色小方格的矩形共有(　　)个.

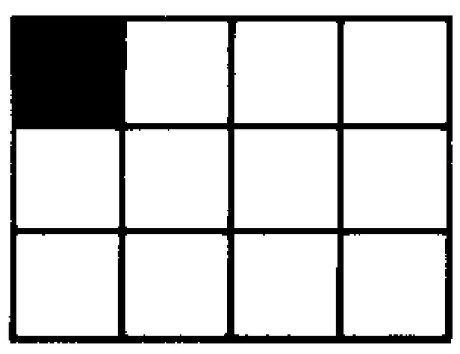

图1

(A)11　(B)12　(C)13　(D)14

3. 已知锐角△ABC 的三边长恰为三个连续正整数,$AB>BC>CA$. 若边 BC 上的高为 AD,则 $BD-DC=$(　　).

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

4. 已知有理数 a、b、c 满足

$$a^2+b^2+1=2(c^2+ab+b-a).$$

则 $a-b-c$ 的值为(　　).

(A)0　(B) -1　(C) ± 1　(D)不确定

5. 在梯形 $ABCD$ 中,$AD/\!/BC$,$BC=BD$,$AD=CD$,且 $\angle C=80^\circ$. 则 $\angle A$ 的度数为(　　).

(A)120°　(B)130°　(C)140°　(D)150°

6. 已知点 P、Q、R 分别在△ABC 的边 AB、BC、CA 上,且

$$BP=PQ=QR=RC=1.$$

则△ABC 面积的最大值为(　　).

(A)$\sqrt{3}$　(B)2　(C)$\sqrt{5}$　(D)3

二、填空题(每小题7分,共28分)

1. 在 $1,2,\cdots,2\,011$ 这 $2\,011$ 个整数中,能表示为 $[x[x]]$ 形式的整数有______个,其中,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

2. 某王国有32名骑士,其中某些骑士是另外骑士的仆人,每名仆人最多只能有一名主人,每名主人必须比他的任意一名仆人富有. 如果一名骑士拥有不少于四名仆人,那么,他就被封为贵族. 若规定 A 的仆人的仆人不是 A 的仆人,则贵族数目的最大可能值为______.

3. 已知 $x_1=x_{2\,011}=1$,

$$|x_{n+1}|=|x_n+1|\ (n=1,2,\cdots,2\,010).$$

则 $x_1+x_2+\cdots+x_{2\,010}=$______.

4. 在不大于100的正整数中,满足

$$\frac{m}{n+1}<\sqrt{2}<\frac{m+1}{n}$$

的有序整数对 (m,n) 有______对.

第二试

一、(20分)当 $1<x<5$ 时,求代数式

$$\frac{\sqrt{(7x+1)(5-x)(x-1)(7x+5)}}{x^2}$$

的最小值.

二、(25分)已知15个一元二次方程 $x^2-p_ix+q_i=0\ (i=1,2,\cdots,15)$ 的系数 p_i、q_i 取值于 $1,2,\cdots,30$,且这些系数两两不等. 若一个方程有大于20的根,则称该方程为“好方程”. 求好方程个数的最大值.

三、(25 分) 如图 2,已知点 A、B 是⊙O 外两个相异的点,点 P 在⊙O 上,PA、PB 分别与⊙O 交于异于点 P 的点 D、C,且 $AD\cdot AP=BC\cdot BP$.

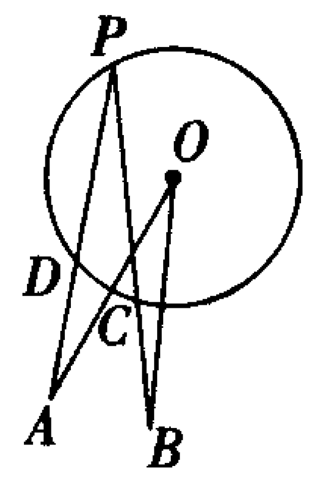

图 2

(1) 证明:△OAB 为等腰三角形;

(2) 设 p 为质数,m 为正整数,若 $AD\cdot AP=p(2p+1)$,$OA=m-1$,⊙O 的半径为 3,求 OA 的长度.

参 考 答 案

第 一 试

一、**1.** B.

设 $a+b=t$. 则 $ab=\frac{t^2-t}{2}$. 从而,

$0\leqslant(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2t-t^2$.

解得 $0\leqslant t\leqslant 2$.

2. B.

在这个表格中的矩形可由对角线两端点确定,由于要包含红色的小方格,于是,一个端点被确定,对角线另一个端点有 $3\times4=12$ 种选择.

3. B.

由勾股定理得

$AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$.

则 $(BD+CD)(BD-CD)$

$=(AB+AC)(AB-AC)$.

设 $AB=n+2$,$BC=n+1$,$AC=n$. 则

$BD+DC=n+1$,

代入上式即可得解.

4. B.

原方程可化为 $(a-b+1)^2=2c^2$.

又 a、b、c 为有理数,从而,

$c=0$,$a-b+1=0$.

所以,$a-b-c=-1$.

5. D.

易知 $\angle BDA=20^\circ$.

以 CD 为边向内作正△CDO,联结 OB.

则 $\triangle ABD\cong\triangle OBD\cong\triangle OBC$.

从而,$\angle A=\angle DOB=150^\circ$.

6. B.

注意到

$S_{\triangle BPQ}\leqslant\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\angle BPQ\leqslant\frac{1}{2}$.

同理,$S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{1}{2}$,$S_{\triangle QRC}\leqslant\frac{1}{2}$.

设△DPR 与△QPR 关于 PR 对称.

若点 D 与 A 重合,则

$S_{\triangle PAR}=S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{1}{2}$.

若点 D 与 A 不重合,则

$\angle D=\angle PQR$

$=180^\circ-(\angle B+\angle C)=\angle A$.

所以,A、P、R、D 四点共圆.

易知,点 A 到直线 PR 的距离小于点 D 到直线 PR 的距离,故 $S_{\triangle PAR}<S_{\triangle PQR}\leqslant\frac{1}{2}$.

因此,$S_{\triangle ABC}\leqslant2$.

当 $\angle A=90^\circ$,$AB=AC=2$ 时,等号成立.

二、**1.** 990.

设 $x=k+a$,$k=[x]$,$0\leqslant a<1$. 则

$[x[x]]=[k(k+a)]=k^2+[ka]$.

所以,$k^2,k^2+1,\cdots,k^2+k-1(k=1,2,\cdots,44)$ 都能表示为 $[x[x]]$ 形式.

故满足要求的整数有

$1+2+\cdots+44=990$(个).

2. 7.

依题意,最富的骑士不是其他骑士的仆人,故至多有 31 名骑士成为其他骑士的仆人.

又每位贵族至少拥有四名仆人,故至多有 7 名贵族.

将 32 名骑士编号为 $1,2,\cdots,32$,财富随序号增大而递减,则

1(2,3,4,5);　5(6,7,8,9);

9(10,11,12,13);13(14,15,16,17);

17(18,19,20,21);21(22,23,24,25);

25(26,27,28,29),

每个括号外的骑士是贵族,括号内的骑士为仆人.

这表明 7 名贵族是可能的.

3. $-1\ 005$.

由已知易得

$x_{n+1}^2=x_n^2+2x_n+1(n=1,2,\cdots,2\ 010)$.

将这 2 010 个等式累加并整理得

$x_{2\ 011}^2=2(x_1+x_2+\cdots+x_{2\ 010})+2\ 011$.

故 $x_1+x_2+\cdots+x_{2\ 010}=-1\ 005$.

4. 170.

注意到 $\sqrt{2}n-1<m<\sqrt{2}(n+1)$.

对每一个 n,m 的个数由

$[\sqrt{2}(n+1)]-[\sqrt{2}n-1]$

$=[\sqrt{2}(n+1)]-[\sqrt{2}n]+1$

给出.

又因为 $100<71\sqrt{2}<101<72\sqrt{2}$,所以,

$n\leqslant 71$.

但当 $n=71$ 时,$m=100$.

从而,m 的个数为

$\sum\limits_{n=1}^{70}([\sqrt{2}(n+1)]-[\sqrt{2}n]+1)+1$

$=[71\sqrt{2}]-[\sqrt{2}]+71$

$=100-1+71=170$.

第二试

一、注意到

$$\frac{\sqrt{(7x+1)(5-x)(x-1)(7x+5)}}{x^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(7x^2-2x-5)(-7x^2+34x+5)}{x^4}}$$

$$=\sqrt{\left(7x-\frac{5}{x}-2\right)\left(-7x+\frac{5}{x}+34\right)}.\quad ①$$

令 $t=7x-\frac{5}{x}$. 则

式① $=\sqrt{(t-2)(34-t)}$

$=\sqrt{-t^2+36t-68}$

$=\sqrt{-(t-18)^2+256}\leqslant 16$.

当 $t=7x-\frac{5}{x}=18$,即 $x=\frac{9+2\sqrt{29}}{7}$时,代数式取最大值为 16.

二、首先,若存在方程 $x^2-p_ix+q_i=0$ 的两根 x_1、x_2,则由 $x_1+x_2=p_i>0$,$x_1x_2=q_i>0$,知两根均为正.

其次,若某方程有大于 20 的根,则 $p_i=x_1+x_2>20$. 但 $1,2,\cdots,30$ 中大于 20 的数仅有 10 个,所以,好方程至多 10 个.

最后,考虑

$x^2-(20+k)x+k=0(k=1,2,\cdots,10)$,

这十个方程. 其较大根

$$x=\frac{20+k+\sqrt{(20+k)^2-4k}}{2}$$

$$=\frac{20+k+\sqrt{k^2+36k+400}}{2}$$

$$>\frac{20+k+k+18}{2}=k+19\geqslant 20.$$

故好方程个数的最大值为 10.

三、(1)作 AT 切⊙O 于点 T,联结 OT.

设⊙O 的半径为 R. 则

$AD\cdot AP=AT^2=OA^2-R^2$.

同理,$BC\cdot BP=OB^2-R^2$.

由已知易得 $OA=OB$.

(2)由(1)的证明可知

$p(2p+1)=(m-1)^2-9$,

即 $p(2p+1)=(m-4)(m+2)>0$.

由 p 为质数且 $(p,2p+1)=1$,知

$p\mid(m-4)$ 与 $p\mid(m+2)$

恰有一个成立.

若 $p\mid(m-4)$,则 $m-4=kp(k\in\mathbf{N}_+)$.

如果 $k=1$,则

$2p+1=p+6\Rightarrow p=5,m=9,OA=8$.

如果 $k\geqslant 2$,则 $m+2=kp+6>2p+1$,矛盾.

若 $p\mid(m+2)$,则 $m+2=kp(k\in\mathbf{N}_+)$.

如果 $k\leqslant 2$,则 $m-4=kp-6<2p+1$,矛盾.

故 $k\geqslant 3$. 此时,

$2p+1=k(kp-6)\geqslant 3(3p-6)$

$\Rightarrow 7p\leqslant 19\Rightarrow p=2$.

但 $p=2$ 时,$(m-4)(m+2)=10$ 无正整数解,矛盾.

综上,$OA=8$.

(柯新立 上海市延安初级中学,200050)

数学奥林匹克高中训练题(140)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)04-0041-06

第一试

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 已知不等式

$$3x+4\sqrt{xy}\leqslant a(x+y)$$

对于一切正数 x、y 恒成立. 则实数 a 的最小值为______.

2. 在正四面体 $ABCD$ 中,设

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD},$$

记$\overrightarrow{DE}$和$\overrightarrow{BF}$所成的角为 θ. 则 $\cos\theta=$______.

3. 已知关于 x 的方程

$$x^2+(a-2\,010)x+a=0(a\neq0)$$

的两根均为整数. 则实数 a 的值为______.

4. $[x]$为不超过实数 x 的最大整数. 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_1=\frac{3}{2},a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in\mathbf{N}_+).$$

则 $m=\left[\sum\limits_{k=1}^{2\,011}\frac{1}{a_k}\right]$的值为______.

5. 如图1,在某城市中,M、N 两地之间有整齐的方格形道路网,A_1、A_2、A_3、A_4是道路网中位于一条对角线上的四个交汇处. 今在道路网 M、N 处的甲、乙两人分别随机地选择一条沿街的最短路径,以相同的速度同时分别向 N、M 处行走,直到到达 N、M 为止. 则甲、乙两人相遇的概率为______.

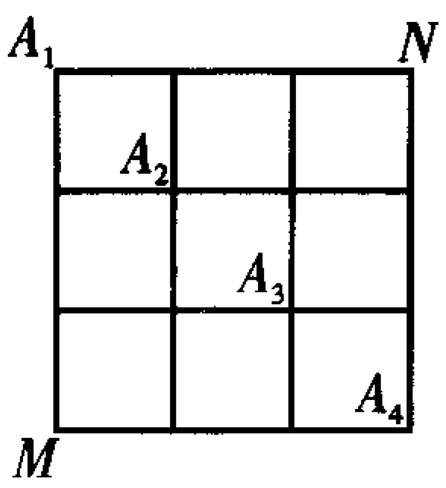

图1

6. 已知以 $T=4$ 为周期的函数

$$f(x)=\begin{cases}m\sqrt{1-x^2}, & x\in(-1,1];\\ 1-|x-2|, & x\in(1,3]\end{cases}(m>0).$$

若方程 $3f(x)=x$ 恰有五个实数解,则 m 的取值范围为______.

7. 设$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的单调增函数,且对任意的正数 x,都有

$$f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}. \qquad ①$$

则$f(1)=$______.

8. 设函数

$$f(x)=\sqrt{10-6\cos x}+\sqrt{\frac{17}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos x-8\sin x}.$$

则$f(x)$的最小值为______.

二、解答题(共56分)

9. (16分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$,右准线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\odot O:x^2+y^2=2$ 上的动点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq0)$处的切线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A、B. 证明:$\angle AOB=90°$.

10. (20分)已知函数

$$f(x)=a(|\sin x|+|\cos x|)-3\sin 2x-7,$$

其中,a 为实参数. 求所有的数对(a,n) $(n\in\mathbf{N}_+)$,使得函数 $y=f(x)$在区间$(0,n\pi)$内恰好有2 011个零点.

11. (20分)设$f(x)$是$[0,1]$上的不减函数,且满足:

(1)$f(0)=0$;

(2)$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{f(x)}{2}$;

(3)$f(1-x)=1-f(x)$.

求$f\left(\frac{17}{2\ 010}\right)$的值.

加 试

一、(40 分)如图2,已知过⊙O 外一点 P 作⊙O 的两条切线 PE、PF 及两条割线 PDA、PCB,联结弦 EF,分别与割线 PDA、PCB 交于点 M、N. 求证:

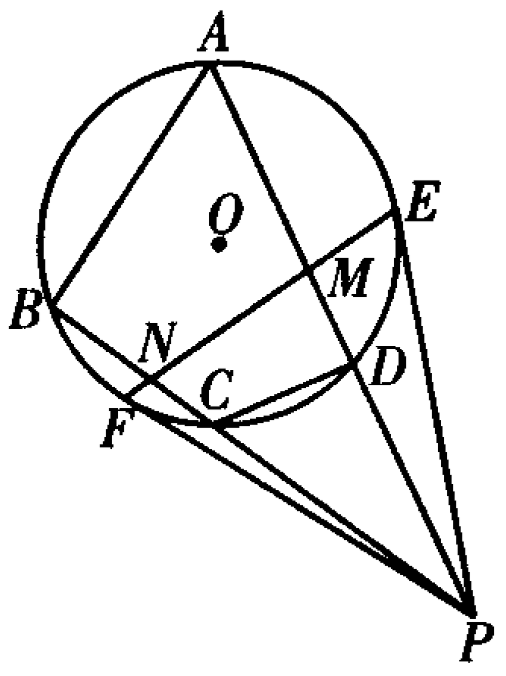

图2

(1)$PA\cdot DM=PD\cdot MA$;

(2)AB、EF、DC 三线共点.

二、(40 分)是否存在实数 k,使得

$$f(x,y,z)=\frac{x^5+y^5+z^5+k(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)}{x+y+z}$$

是一个三元多项式.

三、(50 分)在某次会操活动中,领操员让编号为 $1\sim n(n>3)$ 的 n 名学生排成一个圆形阵,做 1-2-3 循环报数,领操员一一记录报数者的编号,并要求报 1、2 的学生出列,报 3 的学生留在队列中,并将编号改为此次循环报数中三名学生的编号之和. 一直循环报数下去. 当操场上剩余的学生人数不超过两名时,报数活动结束. 领操员记录最后留在操场的学生编号(例如,编号为 1~9 的九名学生排成一个圆形阵,报数结束后,只有原始编号为 9 的学生留在操场,此时,他的编号为 45,领操员记录下来的数据分别为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,6,15,24,45). 已知共有 2 011 名学生参加会操.

(1)最后留在场内的学生最初的编号是几号?

(2)求领操员记录下的编号之和.

四、(50 分)试求所有的正整数 n,满足存在一个整数 m,使得 2^n-1 是 m^2+289 的一个因数.

参 考 答 案

第 一 试

一、1. 4.

由题设知 $a\geqslant\left(\frac{3x+4\sqrt{xy}}{x+y}\right)_{\max}$.

又$\frac{3x+4\sqrt{xy}}{x+y}\leqslant\frac{3x+(x+4y)}{x+y}=4$,

当且仅当 $x=4y>0$ 时,上式等号成立.

所以,a 的最小值为 4.

2. $-\frac{4}{13}$.

设正四面体棱长为 4. 则

$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})$

$=\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}=2\times4\cos\frac{2\pi}{3}=-4$.

而$|\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DE}|$

$=\sqrt{\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CF}^2-2|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CF}|\cos\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{13}$,

则 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=-\frac{4}{13}$.

3. 4 024.

设方程的根为 x_1、$x_2(x_1\leqslant x_2)$.

由韦达定理得

$x_1+x_2=-(a-2\ 010)$,$x_1x_2=a$.

则 $x_1x_2+x_1+x_2=2\ 010$,即

$(x_1+1)(x_2+1)=2\ 011$.

又因为 2 011 为质数,所以,

$\begin{cases}x_1=0,\\x_2=2\ 010\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-2\ 012,\\x_2=-2.\end{cases}$

故 $a=0$(舍)或 $a=4\ 024$.

4. 1.

由 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$

$\Rightarrow a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$

$\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$.

则$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}$.

故 $m=\left[\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2012}-1}\right]=\left[2-\frac{1}{a_{2012}-1}\right]=1.$

5. $\frac{41}{100}$.

甲、乙两人沿最短路径行走,若相遇,则只可能在 A_1、A_2、A_3、A_4处相遇. 若甲、乙两人在 A_2处相遇,甲从 M 处到 A_2处有 C_3^1种走法,从 A_2处到 N 处也有 C_3^1种走法,共 $C_3^1C_3^1$种走法;而乙从 N 处经 A_2处到 M 处也有 $C_3^1C_3^1$种走法;他们在 A_2处相遇的走法共有 $(C_3^1)^4$种不同走法.

同理,他们在 $A_i(i=1,2,3,4)$处相遇的走法有 $(C_3^{i-1})^4$种不同走法. 而

$(C_3^0)^4+(C_3^1)^4+(C_3^2)^4+(C_3^3)^4=164.$

故甲、乙两人相遇的概率 $P=\frac{164}{400}=\frac{41}{100}$.

6. $\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{7}\right)$.

要使方程 $3f(x)=x$ 恰有五个实数解,则 $y=\frac{x}{3}$与 $y=m\sqrt{1-(x-4)^2}$有两个交点,且与 $y=m\sqrt{1-(x-8)^2}$没有交点(如图 3).

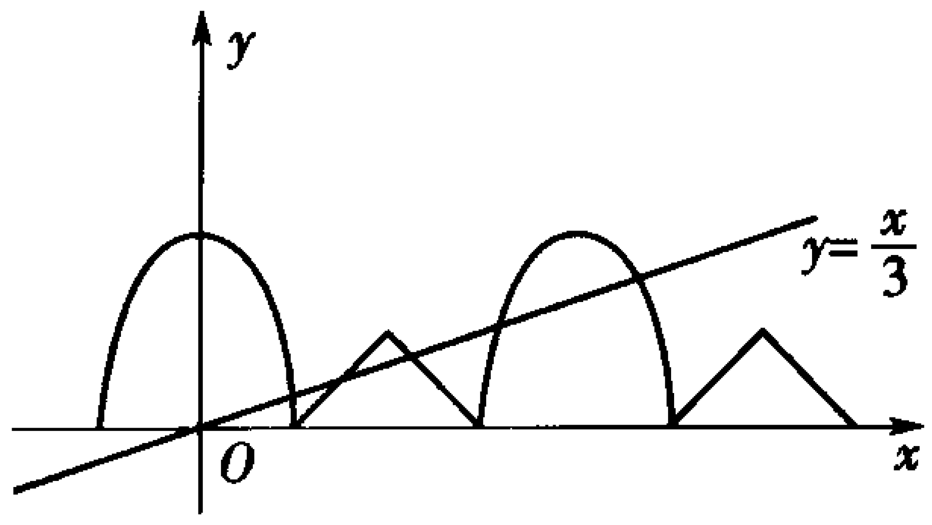

图 3

联立方程组,前者

$\Delta_1=4-\frac{20}{3m^2}>0\Rightarrow m^2>\frac{5}{3}$,

后者

$\Delta_2=64-63\left(\frac{1}{9m^2}+1\right)<0\Rightarrow m^2<7.$

7. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

在式①中取 $x=1$,得

$f(f(1)+1)=\frac{1}{f(1)}$.

令 $f(1)=a$. 则 $f(a+1)=\frac{1}{a}$.

再令 $x=a+1$,代入得

$f\left(f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right)=\frac{1}{f(a+1)}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a=f(1).$

因为 $f(x)$在 $(0,+\infty)$上单增,所以,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1.$

解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

当 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时,$1+a>1$.

而 $f(a+1)=\frac{1}{a}<f(1)=a$,与题设矛盾;

当 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$时,$1+a<1$.

此时,$\frac{1}{a}<a$,满足 $f(a+1)<f(1)$.

故 $f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

8. $\frac{21\sqrt{2}}{4}-1$.

注意到

$$f(x)=\sqrt{(\cos x-3)^2+\sin^2x}+\sqrt{\cos^2x+\left(\sin x-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}+\sqrt{(\cos x-\sqrt{2})^2+(\sin x-4)^2}.$$

设 $A(3,0)$、$B\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$、$C(\sqrt{2},4)$、$P(\cos x,\sin x)$. 于是,

$f(x)=|PA|+|PB|+|PC|$,

其中,点 P 在$\odot O:x^2+y^2=1$ 上.

因为$\odot O:x^2+y^2=1$ 与 AB 切于点 $D\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,且 O、D、C 三点共线,所以,

$PC\geqslant DC.$

又 $PB+PA\geqslant DB+DA=AB$,则

$PA+PB+PC\geqslant AB+CD$

$=\frac{9\sqrt{2}}{4}+(3\sqrt{2}-1)=\frac{21\sqrt{2}}{4}-1.$

二、9. 依题意易得

$a=1, c=\sqrt{3}, b^2=c^2-a^2=2.$

故所求双曲线 C 的方程为

$$x^2-\frac{y^2}{2}=1. \quad ①$$

又$\odot O: x^2+y^2=2$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$x_0x+y_0y=2, \quad ②$$

则由式①、②及 $x_0^2+y_0^2=2$,得

$(3x_0^2-4)x^2-4x_0x+8-2x_0^2=0.$

由题设及 $0<x_0^2<2$,得 $3x_0^2-4\neq0$,且

$\Delta=16x_0^2-4(3x_0^2-4)(8-2x_0^2)>0.$

设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 则

$x_1+x_2=\frac{4x_0}{3x_0^2-4}, x_1x_2=\frac{8-2x_0^2}{3x_0^2-4}.$

又 $\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$,且

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$

$=x_1x_2+\frac{1}{y_0^2}(2-x_0x_1)(2-x_0x_2)$

$=x_1x_2+\frac{1}{2-x_0^2}[4-2x_0(x_1+x_2)+x_0^2x_1x_2]$

$=\frac{2[x_1x_2+2-x_0(x_1+x_2)]}{2-x_0^2}=0.$

故$\angle AOB=90^\circ$.

10. 首先,函数 $f(x)$ 以π为周期,且以 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 为对称轴,即

$f(x+\pi)=f(x)$,

$f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)(k\in\mathbf{Z}).$

其次,$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=a-7$,

$f\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a-10$,

$f\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}a-4.$

因为$f(x)$关于 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$对称,所以,$f(x)$ 在 $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 及 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ 上的零点个数为偶数.

要使$f(x)$在区间$(0,n\pi)$内恰有2 011 个零点,则上述区间端点必有零点.

(1)若 $a=7$,则

$f\left(\frac{k\pi}{2}\right)=0, f\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\neq0.$

考虑区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上的零点个数.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,

$f(x)=7(\sin x+\cos x)-3\sin 2x-7.$

令 $t=\sin x+\cos x(t\in(1,\sqrt{2}])$. 则

$y=g(t)=-3t^2+7t-4=0.$

解得 $t_1=1$(舍),$t_2=\frac{4}{3}=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$

故在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有两解.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,

$f(x)=7(\sin x-\cos x)-3\sin 2x-7.$

令 $t=\sin x-\cos x(t\in(1,\sqrt{2}])$. 则

$y=g(t)=3t^2+7t-10=0.$

解得 $t_1=1$(舍),$t_2=-\frac{10}{3}$(舍).

故在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内无解.

因此,$f(x)$在区间$(0,\pi)$内有三个零点.

故在$(0,n\pi)$内有

$3n+(n-1)=4n-1=2\ 011$

个零点. 解得 $n=503$.

(2)若 $a=5\sqrt{2}$,则

$f\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0, f\left(\frac{k\pi}{2}\right)\neq0, f\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\neq0.$

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,

$f(x)=5\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-3\sin 2x-7.$

令 $t=\sin x+\cos x(t\in(1,\sqrt{2}])$. 则

$y=g(t)=-3t^2+5\sqrt{2}t-4=0$.

解得 $t_1=\sqrt{2}, t_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}<1$(舍).

故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有一解 $x=\frac{\pi}{4}$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,

$f(x)=5\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-3\sin 2x-7$.

令 $t=\sin x-\cos x(t\in(1,\sqrt{2}])$. 则

$y=g(t)=3t^2+5\sqrt{2}t-10=0$,

在 $(1,\sqrt{2}]$ 内无解.

故 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内只有一个零点.

于是,在 $(0,n\pi)$ 内有 $n=2\ 011$ 个零点.

(3)若 $a=2\sqrt{2}$,则

$f\left(k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=0, f\left(\frac{k\pi}{2}\right)\neq 0, f\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$.

同(2)讨论,知 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内只有一个零点.

故在 $(0,n\pi)$ 内有 $n=2\ 011$ 个零点.

综上,满足条件的

$(a,n)=(7,503),(5\sqrt{2},2\ 011),(2\sqrt{2},2\ 011)$.

11. 由(3)有

$f(1)=1-f(0)=1$,

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{f(1)}{2}=\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{2}{3}\right)=1-f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

故 $f(x)=\frac{1}{2}\left(x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{670}{2\ 010},\frac{1\ 340}{2\ 010}\right]\right)$.

注意到

$17\xrightarrow{\times 3}51\xrightarrow{\times 3}153\xrightarrow{\times 3}459\xrightarrow{\times 3}$

$1\ 377\xrightarrow{2\ 010-}633\xrightarrow{\times 3}1\ 899\xrightarrow{2\ 010-}$

$111\xrightarrow{\times 3}333\xrightarrow{\times 3}999$.

则 $f\left(\frac{17}{2\ 010}\right)=\frac{f\left(\frac{1\ 377}{2\ 010}\right)}{16}=\frac{1-f\left(\frac{633}{2\ 010}\right)}{16}$

$=\frac{1-\frac{1}{2}f\left(\frac{1\ 899}{2\ 010}\right)}{16}=\frac{1-\frac{1}{2}\left(1-f\left(\frac{111}{2\ 010}\right)\right)}{16}$

$=\frac{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}f\left(\frac{999}{2\ 010}\right)\right)}{16}$

$=\frac{1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)}{16}=\frac{9}{256}$.

加　试

一、(1)辅助线如图 4 所示.

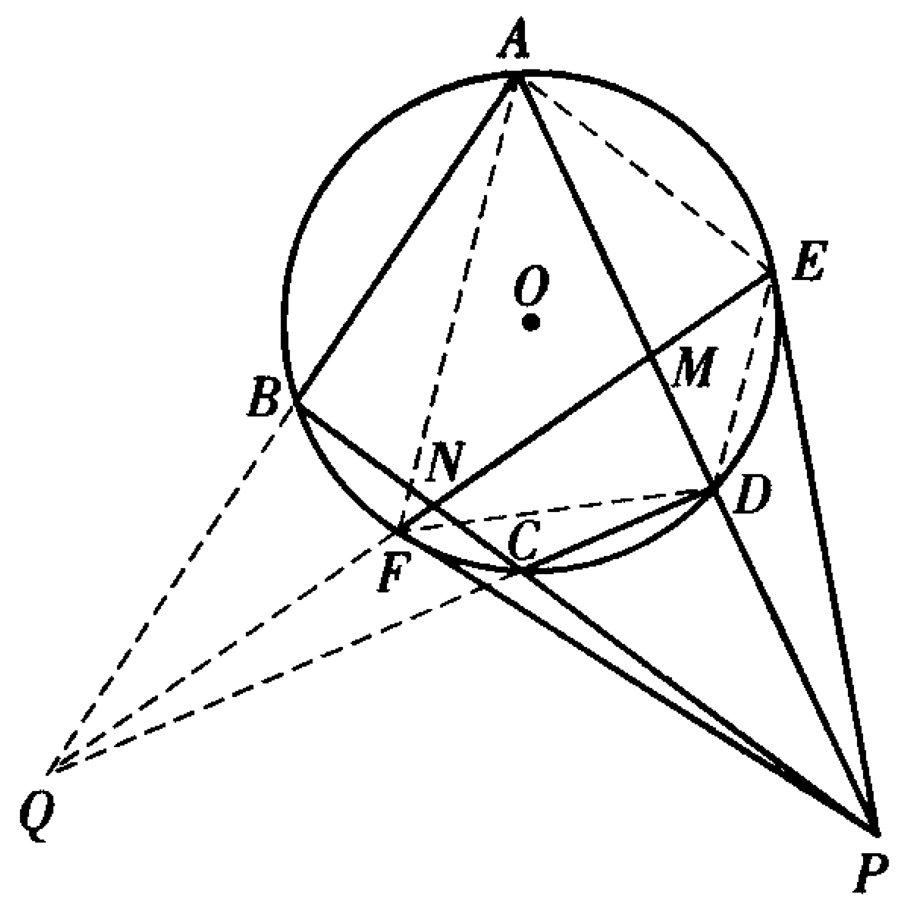

图 4

由共边定理知 $\frac{PD}{PA}=\frac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PEA}}=\frac{S_{\triangle PFD}}{S_{\triangle PFA}}$.

由 $\triangle PED\backsim\triangle PAE$ 及 $\triangle PFD\backsim\triangle PAF$,分别得

$\frac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PAE}}=\frac{ED^2}{EA^2}, \frac{S_{\triangle PFD}}{S_{\triangle PAF}}=\frac{FD^2}{FA^2}$.

则 $\frac{ED}{EA}=\frac{FD}{FA}$.

故 $\frac{PD}{PA}=\frac{ED^2}{EA^2}=\frac{ED}{EA}\cdot\frac{FD}{FA}$.　①

由 $\triangle MED\backsim\triangle MAF$ 及 $\triangle MFD\backsim\triangle MAE$,分别得

$\frac{ED}{AF}=\frac{ME}{MA}$,　②

$\frac{FD}{AE}=\frac{MD}{ME}$.　③

由式①、②、③得 $\frac{PD}{PA}=\frac{MD}{AM}$.

(2)记 AB 与 DC 交于点为 Q.

要证 AB、EF、DC 三线共点,只需证明 E、F、Q 三点共线.

由(1)知$\frac{DM}{AM}=\frac{DP}{AP},\frac{CN}{BN}=\frac{CP}{BP}$.

则$\frac{DM}{DP}=\frac{AM}{AP}=\frac{AD}{DP+AP}$,

$\frac{CN}{CP}=\frac{BN}{BP}=\frac{BC}{BP+CP}$.

故$\frac{MP}{DM}=1+\frac{DP}{DM}=1+\frac{DP+PA}{AD}=\frac{2AP}{AD}$.

同理,$\frac{PN}{CN}=\frac{2PB}{BC}$.

因为直线 QBA 与$\triangle PCD$ 三边的延长线都相交,所以,由梅涅劳斯定理有

$$1=\frac{CQ}{QD}\cdot\frac{DA}{AP}\cdot\frac{PB}{BC}=\frac{CQ}{QD}\cdot\frac{DA}{2AP}\cdot\frac{2PB}{BC}$$
$$=\frac{CQ}{QD}\cdot\frac{DM}{MP}\cdot\frac{PN}{CN}.$$

又由梅涅劳斯定理的逆定理知,Q、N、M 三点共线.

故 Q、F、E 三点共线.

二、假设存在这样的实数 k. 则

$$x^5+y^5+z^5+k(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$$

有因式 $x+y+z$.

令 $y=z=1$. 则 $x+2$ 是

$$x^5+2+k(x^3+2)(x^2+2)$$

的因式.

作多项式除法.

用$(1+k)x^5+2kx^3+2kx^2+4k+2$ 除以 $x+2$ 的余式为 $-36k-30$. 要使 $x+2$ 整除 $x^5+2+k(x^3+2)(x^2+2)$,则

$$-36k-30=0\Rightarrow k=-\frac{5}{6}.$$

故$f(x,y,z)$

$$=\frac{x^5+y^5+z^5-\frac{5}{6}(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)}{x+y+z}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}x^5-\frac{5}{6}(y^2+z^2)x^3-\frac{5}{6}(y^3+z^3)x^2+\frac{1}{6}(y^5+z^5-5y^3z^2-5y^2z^3)}{x+y+z}$$

$$=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}(y+z)x^3-\frac{1}{3}(2y^2+2z^2-yz)x^2-$$
$$\frac{1}{6}(y+z)(y^2-3yz+z^2)x+$$
$$\frac{1}{6}(y+z)^2(y^2-3yz+z^2).$$

综上,这样的实数 k 存在,且 $k=-\frac{5}{6}$.

三、记领操员记录下的编号依次为 a_1, $a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_m$,其和为 S_n. 于是,

(1)在每次 $1-2-3$ 循环报数后,学生总人数减少2,但编号之和不变.

(2)若 $n=3^k$,经过 3^{k-1} 次 $1-2-3$ 循环报数后产生 3^{k-1} 个新编号,这些编号之和为 $\frac{(1+n)n}{2}$;再经过 3^{k-2} 次循环报数产生 3^{k-2} 个新编号,这些编号之和也为$\frac{(1+n)n}{2}$;……经过共

$$3^{k-1}+3^{k-2}+\cdots+3^1+1=\frac{3^k-1}{2}$$

次循环报数,最后剩下1名学生,他的编号为 $\frac{(1+n)n}{2}$,且他的原始编号为 n(即当 $n=3^k$ 时,最后一名学生留在场上).

由(1)知 $S_n=(k+1)\frac{(1+n)n}{2}$.

(3)若一圈学生人数为 $3k$,且最后一名学生的编号为 a_p,则经过 k 次循环报数后,产生 k 个新编号,此时,学生人数变为 k,第1名学生编号为 a_{p+1}.

对于一般的奇数 $n(n>3)$,令 k、r 满足 $n=3^k+2r(0\leqslant r<3^k)$.

则 $3^k<n<3^{k+1}$, $3r<n$.

首先,前 $3r$ 名学生 $a_1,a_2,\cdots,a_{3r}$ 称为第一组,其编号和为

$$M=1+2+\cdots+3r=\frac{3r(3r+1)}{2}.$$

记学生初始编号和 $N=\frac{n(n+1)}{2}$.

由(1)、(3)知,经过 r 次 $1-2-3$ 循环报数,学生人数变为 3^k,其中,第一名学生编号为 a_{3r+1},称为第二组;再经过 3^{k-1} 次循环报数后,学生人数变为 3^{k-1},称为第三组;重复循环报数直到学生人数为1,此时,是第 $k+2$ 组.

数学奥林匹克问题

本期问题

初 295 如图 1，三个半径为 r 的圆两两外切，与$\odot O$内切于点 A、B、C，过 A、B 作$\odot O$的切线交于点 P. 求由两条切线及切点间的圆弧所形成的阴影区域的面积.

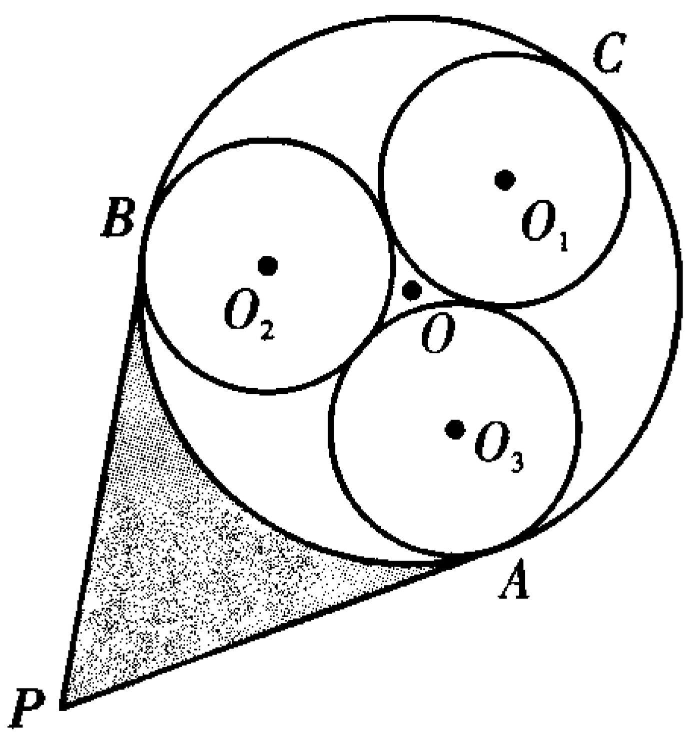

图 1

初 296 如图 2，已$\odot O_1$与$\odot O_2$交于点

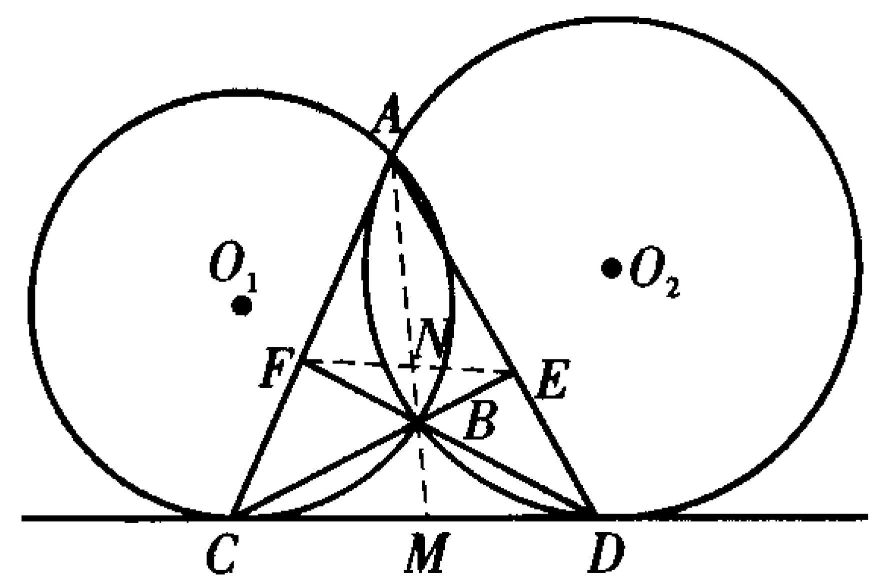

图 2

最后留在场上的学生原始编号为 $3r$，且

$$S_n=M+(k+1)N$$

$$=\frac{3r(3r+1)}{2}+(k+1)\frac{(1+n)n}{2}.$$

当 $n=2\,011$ 时，因 $n=2\,011=3^6+2\times641$，

所以，$k=6$，$r=641$.

最后留在场上的学生原始编号为 1 923.

故 $S_{2\,011}=16\,011\,388$.

四、$n=2^k$（k 为非负整数）.

一方面，若 n 有奇因数 $s>1$，则 2^s-1 是 $2^n-1=(2^s)^{\frac{n}{s}}-1$ 的因数，即

$$2^n-1=(2^s)^{\frac{n}{s}}-1$$

$$=(2^s-1)[(2^s)^{\frac{n}{s}-1}+(2^s)^{\frac{n}{s}-2}+\cdots+(2^s)+1].$$

若 2^n-1 是 m^2+289 的因数，则 2^s-1 是 m^2+289 的因数.

因为 $3\nmid(2^s-1)$，$17\nmid(2^s-1)$，且

$$2^s-1\equiv-1\pmod 4,$$

所以，2^s-1 必有一个质因数 $p>3$，且

$$p\equiv-1\pmod 4.$$

从而，$m^2\equiv-289\pmod p$.

两边$\frac{p-1}{2}$次方得

$$m^{p-1}\equiv-17^{p-1}\pmod p.$$

由费马小定理得 $1\equiv-1\pmod p$，即 $0\equiv2\pmod p$，矛盾.

另一方面，

$$2^{2^k}-1=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-1}}-1)=\cdots$$

$$=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)\cdots(2^{2^1}+1)(2^{2^0}+1).$$

同余方程 $x^2\equiv-1(\bmod(2^{2^j}+1))$ 有解

$$x\equiv2^{2^{j-1}}(\bmod(2^{2^j}+1)).$$

而 $j>i$ 时，

$$(2^{2^i}+1,2^{2^j}+1)=(2^{2^{i+1}}-1,2^{2^j}+1)=\cdots$$

$$=(2^{2^j}-1,2^{2^j}+1)=1.$$

所以，根据中国剩余定理知同余方程组

$$x\equiv2^{2^{j-1}}(\bmod(2^{2^j}+1))\ (j=1,2,\cdots,k-1)$$

有解 x_0.

令 $m=17x_0$. 则 $m^2+289=289(x_0^2+1)$ 被 $2^{2^k}-1$ 整除.

（贺航飞　海南省海南中学，571158）

A、B，CD 是两圆的外公切线，切点为 C、D，直线 BC 与 AD、BD 与 AC 分别交于点 E、F. 求证：$\frac{EA}{AF}=\frac{FB}{BE}$.

高 295 考虑矩阵

$(a_{ij})_{n\times n}(a_{ij}\in\{1,2,3\})$.

若 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列均至少有 3 个元素（包括 a_{ij}）与 a_{ij} 相同，则称元素 a_{ij}是"好的". 如果矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$中至少有一个元素是好的，求 n 的最小值.

高 296 已知 P 是一个给定的圆内接凸 n 边形，用 $n-3$ 条对角线将 P 任意划分为 $n-2$ 个三角形，且这些对角线在 P 内部不相交. 证明：这 $n-2$ 个三角形的内切圆半径之和不依赖于划分方式（即对任意的划分方式，这 $n-2$ 个三角形的内切圆半径之和是一个定值）.

上期问题解答

初 293 已知方程

$$x^3-(2a+11)x^2+(a^2+11a+28)x-28a=0$$

的所有根都是正整数. 求 a 的值及方程的根.

解 易知，$x=a$ 是原方程的根.

于是，a 为正整数.

将方程左边分解因式得

$$(x-a)[x^2-(a+11)x+28]=0.$$

因原方程所有的根都是正整数，所以，

$$x^2-(a+11)x+28=0 \qquad ①$$

的判别式

$$\Delta=(a+11)^2-112$$

应该是个完全平方数.

设 $(a+11)^2-112=k^2(k\in\mathbf{Z}_+)$. 则

$$(a+11)^2-k^2=112,$$

即 $(a+11+k)(a+11-k)=112.$

显然，$a+11+k$ 和 $a+11-k$ 的奇偶性相同，且

$$a+11+k\geqslant 11.$$

而 $112=56\times2=28\times4=14\times8$，则

$$\begin{cases}a+11+k=56,28,14,\\ a+11-k=2,\ 4,\ 8.\end{cases}$$

解得 $(a,k)=(18,27),(5,12),(0,3)$.

因为 a 为正整数，所以，$a=18,5$.

当 $a=18$ 时，原方程的根为 18，1，28.

当 $a=5$ 时，原方程的根为 5，2，14.

（王　宇　天津师范大学数学科学学院 09 级研究生，300387）

初 294 问：是否存在满足条件的正整数 b，使得 2 011 可以在 b 进制下写成 $\overline{xyz}$，且

$$x+y+z=2+0+1+1.$$

解 因为 $\overline{xyz}_{(b)}=xb^2+yb+z=2\ 011$,

$$x+y+z=4,$$

所以，$x(b^2-1)+y(b-1)=2\ 007$，即

$$(b-1)[(b+1)x+y]=2\ 007.$$

于是，$(b-1)\mid 2\ 007$.

又 $b^2\leqslant 2\ 011<b^3$，则

$$10<\sqrt[3]{2\ 011}<b\leqslant\sqrt{2\ 011}<45.$$

故 $9<b-1<44$.

由 $2\ 007=3^2\times223$，知 2 007 的正约数为

$$1,3,9,223,669,2\ 007,$$

与 $b-1$ 的取值范围矛盾.

故不存在满足题意的 b 值.

（宋宝莹　天津师范大学数学科学学院 09 级研究生，300387）

高 293 求

$$c_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n](n\in\mathbf{N})$$

中质因子 7 的幂次.

解 取模 7，$\{c_n\}$ 为模周期数列，周期为 8，$c_0\sim c_7$ 模 7 的余数依次为

$$1,2,0,5,6,5,0,2.$$

故 $7\mid c_n \Leftrightarrow n\equiv 2 \pmod 4$.

设 $b_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n]$

为 c_n 的对偶数列. 则

$$c_n+\sqrt{3}b_n=(2+\sqrt{3})^n. \qquad ①$$

故 $(c_n+\sqrt{3}b_n)(c_m+\sqrt{3}b_m)$

$=(2+\sqrt{3})^{m+n}=c_{m+n}+\sqrt{3}b_{m+n}$,

即 $$\begin{cases}c_{m+n}=c_mc_n+3b_mb_n, & ②\\ b_{m+n}=b_nc_m+b_mc_n. & ③\end{cases}$$

同理,对 $\{b_n\}$ 取模 7,它也是模周期数列,周期为 8.

故 $7\mid b_n \Leftrightarrow 4\mid n$.

由式③得 $b_{2n}=2b_nc_n$. 于是,

$b_{2^{\alpha+2}t}=2^{\alpha+2}c_{2^{\alpha+1}t}c_{2^{\alpha}t}\cdots c_{4t}c_{2t}c_tb_t$

其中,t 为奇数,$\alpha\in\mathbf{N}$.

又 $4t,8t,\cdots,2^{\alpha+1}t\not\equiv 2 \pmod 4$,于是,

$7\nmid c_{2^{\alpha+1}t},c_{2^{\alpha}t},\cdots,c_{4t},7\nmid c_t,7\nmid b_t$.

故 $b_{2^{\alpha+2}t}$ 中 7 的幂次等于 c_{2t} 中 7 的幂次.

再考虑 $\{c_{4k+2}\}$ 模 49 的余数.

由式①计算知

$c_2\equiv 7 \pmod{49}$, $c_6\equiv 28 \pmod{49}$,

$c_{10}\equiv 35 \pmod{49}$, $c_{14}\equiv 0 \pmod{49}$,

$c_{18}\equiv 14 \pmod{49}$, $c_{22}=21 \pmod{49}$,

$c_{26}\equiv 42 \pmod{49}$.

而 $c_{28}=1 \pmod{49}$, $b_{28}\equiv 0 \pmod{49}$,

$c_{n+28}=c_nc_{28}+3b_nb_{28}\equiv c_n \pmod{49}$,

故 $\{c_n\}$ 是模 49、周期为 28 的模周期数列.

于是,$49\mid c_n \Leftrightarrow n\equiv 14 \pmod{28}$.

对 $n=7n_1$, $n_1\equiv 2 \pmod 4$,有

$c_n+\sqrt{3}b_n=(c_{n_1}+\sqrt{3}b_{n_1})^7$.

则 $$c_n=(c_{n_1})^7+21\times 3(c_{n_1})^5(b_{n_1})^2+35\times 9(c_{n_1})^3(b_{n_1})^4+7\times 27c_{n_1}(b_{n_1})^6. \qquad ④$$

设 $7^{S_n}\parallel c_n(n\in\mathbf{N})$. 则式④右边前三项中 7 的幂次皆不小于 $3S_{n_1}+1>S_{n_1}+1$,而 $7\times 27c_{n_1}(b_{n_1})^6$ 中 $7\nmid b_{n_1}$,7 的幂次为 $S_{n_1}+1$,即 $S_{7n_1}=S_{n_1}+1$.

于是,$S_{7^{\alpha}n_1}=S_{n_1}+\alpha(n_1\equiv 2 \pmod 4)$.

取 $7\nmid n_1$, $S_{n_1}=1$,于是,$S_{7^{\alpha}n_1}=\alpha+1$,即 c_n 中 7 的幂次为

$$\begin{cases}0, & n\not\equiv 2 \pmod 4;\\ \alpha+1, & n\equiv 2 \pmod 4, 7^{\alpha}\parallel n.\end{cases}$$

(李建国　华中师大第一附属中学,430000)

高 294　设 $a、b、c、m\in\mathbf{R}_+$. 试证:

$$\frac{a^{m+2}}{a+b}+\frac{b^{m+2}}{b+c}+\frac{c^{m+2}}{c+a}\geqslant\frac{1}{2}(a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1}).$$

证明　注意到

$$\frac{a^{m+2}}{a+b}=\frac{a^{m+1}(a+b)-a^{m+1}b}{a+b}$$

$$=a^{m+1}-\frac{a^{m+1}b}{a+b}\geqslant a^{m+1}-\frac{a^m(a+b)^2}{4(a+b)}$$

$$=a^{m+1}-\frac{1}{4}a^m(a+b)=\frac{3}{4}a^{m+1}-\frac{1}{4}a^mb.$$

同理,$\frac{b^{m+2}}{b+c}\geqslant\frac{3}{4}b^{m+1}-\frac{1}{4}b^mc$,

$\frac{c^{m+2}}{c+a}\geqslant\frac{3}{4}c^{m+1}-\frac{1}{4}c^ma$.

以上三式相加得

$$\frac{a^{m+2}}{a+b}+\frac{b^{m+2}}{b+c}+\frac{c^{m+2}}{c+a}\geqslant\frac{3}{4}(a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1})-\frac{1}{4}(a^mb+b^mc+c^ma).$$

由排序不等式得

$$a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1}\geqslant a^mb+b^mc+c^ma.$$

故 $$\frac{a^{m+2}}{a+b}+\frac{b^{m+2}}{b+c}+\frac{c^{m+2}}{c+a}\geqslant\frac{1}{2}(a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1}).$$

(宿晓阳　四川省成都实验外国语学校,610031)