目　次

中等数学

High-School Mathematics

2011 年第 5 期(总第 209 期)

(2011 年 5 月中旬出版)

期刊基本参数：CN 12－1121/O1＊1982＊m＊16＊48＊zh＊P＊￥4.50＊11500＊13＊2011－5

数学活动课程讲座

巧用三角形的外心解题

姜照华
（山东省枣庄市第二十九中学，277000）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)05－0002－04

（本讲适合初中）

三角形外接圆的圆心是三角形三边垂直平分线的交点，亦称为三角形的外心. 有些平面几何问题，若能将其与外心联系起来，运用外心的性质，往往可以简便求解.

1 知识简介

1.1 外心的性质

性质1　三角形的外心到三角形的三个顶点的距离相等.

性质2　设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

(1)若点 O、C 在直线 AB 的同侧，则

$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$；

(2)若点 O、C 分居直线 AB 的两侧，则

$\angle ACB=180°-\frac{1}{2}\angle AOB$.

性质3　(1)直角三角形的外心是斜边的中点；

(2)锐角三角形的外心在三角形的内部；

(3)钝角三角形的外心在三角形的外部.

1.2 外心的判定

判定1　若三角形所在平面内的一点到三顶点的距离相等，则该点是三角形的外心.

判定2　若点 O、C 在 AB 的同侧，且

$$OA=OB，\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB，$$

则 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

判定2的证明　如图1，延长 AO 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D，联结 BD. 则

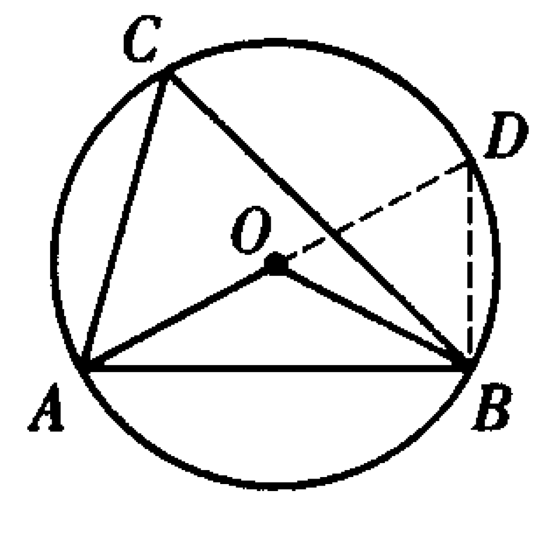

图1

$\angle ADB=\angle ACB$

$=\frac{1}{2}\angle AOB.$

故 $\angle ADB=\angle OBD$.

于是，$OD=OB=OA$.

根据判定1，知 O 为 $\triangle ABD$ 的外心.

又 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 有相同的外接圆，则 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

判定3　若点 O、C 分居 AB 的两侧，且

$$OA=OB，\angle ACB=180°-\frac{1}{2}\angle AOB，$$

则 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

仿照判定2的证明可证.

2 应用举例

2.1 直接利用已有外心

例1　已知 AB 是半径为1的 $\odot O$ 的一条弦，且 $AB=a<1$. 以 AB 为一边在 $\odot O$ 内作正 $\triangle ABC$，D 是 $\odot O$ 上不同于点 A 的一点，且 $DB=AB=a$，DC 的延长线与 $\odot O$ 交于点 E. 则 AE 的长为(　　).

(A)$\frac{\sqrt{5}}{2}a$　(B)1　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D)a

收稿日期：2010－10－25

（2008,《数学周报》杯全国初中数学竞赛）

解　如图 2,联结 AD、OE、OA.

注意到

$DB=AB=BC$.

由判定 1 知 B 是 $\triangle ACD$ 的外心.

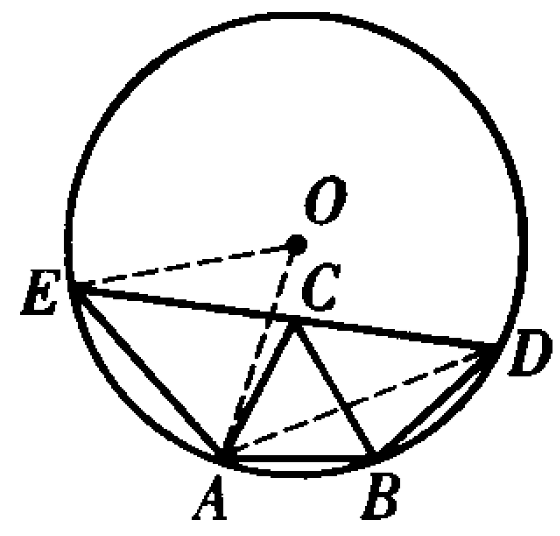

图 2

则由性质 2(1)知 $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle ABC$.

故 O 是 $\triangle ADE$ 的外心.

所以,$\angle ADE=\frac{1}{2}\angle AOE$.

因此,$\angle AOE=\angle ABC=60^\circ$.

又由 $OE=OA$,知 $\triangle OAE$ 是正三角形.

所以,$AE=OA=1$.

故选 B.

例 2　如图 3,已知 $EF=CE=CF$, $EA=BF=2AB$, $AB=BD=DA$,且 $AP=CP=BQ=CQ=PD=DQ=1$. 则线段 $BD=$______.

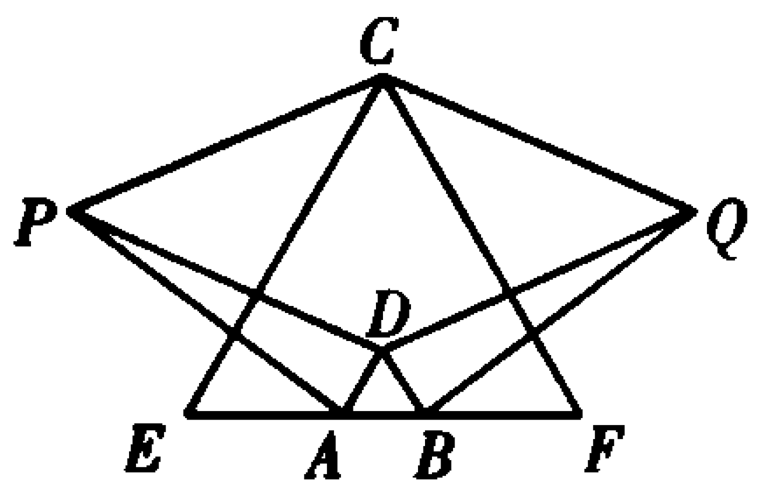

图 3

（2007,青少年数学国际城市邀请赛）

解　由题意知,题目的条件决定了整个图形的对称性.

如图 4,联结 CA、CB、CD. 易证

$\triangle AEC\cong\triangle BFC$

$\Rightarrow CA=CB$.

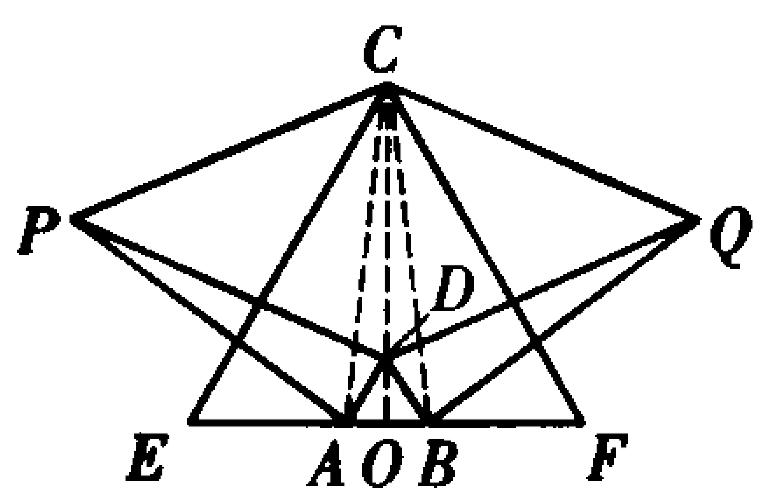

图 4

因为 $DA=DB$, $CD=CD$,所以,

$\triangle ADC\cong\triangle BDC$.

故 $\angle CDA=\angle CDB$

$=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle ADB)=150^\circ$.

由 $AP=CP=PD$,根据判定 1 知 P 是 $\triangle ACD$ 的外心.

则由性质 2(2)知

$\angle CDA=180^\circ-\frac{1}{2}\angle APC$.

于是,$\angle APC=60^\circ$.

又 $AP=CP$,则 $\triangle APC$ 是正三角形.

从而,$CA=AP=1$.

延长 CD 与 AB 交于点 O. 易知,

$CO\perp AB$, $AO=BO=\frac{1}{2}AB$,

$CO=\frac{\sqrt{3}}{2}EF=\frac{5\sqrt{3}}{2}AB$.

在 Rt $\triangle AOC$ 中,由勾股定理得

$AO^2+CO^2=CA^2$,

即 $\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}AB\right)^2=1$.

解得 $AB=\frac{\sqrt{19}}{19}$.

故 $BD=\frac{\sqrt{19}}{19}$.

【注】解此题的关键是看出 P 是 $\triangle ACD$ 的外心.

例 3　已知 AB 为半圆 $\odot O$ 的直径,两弦 AC、BD 交于点 E,过点 C、D 分别作半圆的切线交于点 P. 求证:$PE\perp AB$.

【分析】如图 5,延长 PE 与 AB 交于点 F,联结 OC、OD、CD、BC.

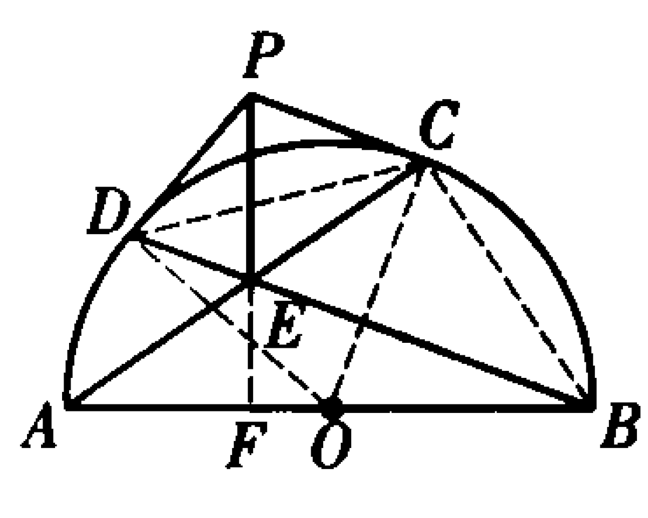

图 5

要证 $PE\perp AB$,只需证

$\angle A+\angle AEF=90^\circ$.

注意到

$\angle A=\angle ACO$, $\angle AEF=\angle PEC$,

$\angle ACO+\angle PCE=90^\circ$.

故只需证 $\angle PEC=\angle PCE$,即需证

$PE=PC$.

由切线长定理得 $PC=PD$，于是，想到证 P 是 $\triangle DCE$ 的外心.

又由判定3知，只需证

$\angle DEC=180°-\frac{1}{2}\angle DPC$.

事实上，

$\angle DEC=\angle ECB+\angle DBC$

$=90°+\angle PDC=180°-\frac{1}{2}\angle DPC$.

【注】证明此题的关键是由判定3发现 P 是 $\triangle DCE$ 的外心.

2.2　构造外心

某些平面几何题，虽然表面上与外心无关，但出现了与外心相关的条件，也可先通过构造外心，再利用外心的性质求解.

例4　如图6，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=\angle BCA=44°$，$M$ 为 $\triangle ABC$ 形内一点，使得 $\angle MCA=30°$，$\angle MAC=16°$. 求 $\angle BMC$ 的度数.

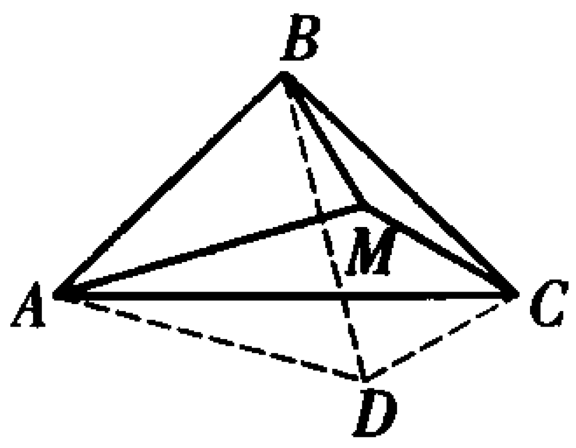

图6

(2005，北京市初二数学竞赛)

解　如图6，以 AB 为边作正 $\triangle ABD$，联结 CD.

由题意得 $BA=BC$，$\angle ABC=92°$.

于是，$BA=BC=BD$.

根据判定1知 B 为 $\angle ACD$ 的外心.

由性质2(1)知

$\angle DCA=\frac{1}{2}\angle DBA=30°$,

$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DBC$

$=\frac{1}{2}(92°-60°)=16°$.

所以，$\angle DCA=\angle MCA$,

$\angle DAC=\angle MAC$.

于是，$\triangle ADC\cong\triangle AMC$.

从而，$AM=AD=AB$.

则 $\angle ABM=\angle AMB$

$=\frac{1}{2}[180°-(44°-16°)]=76°$.

故 $\angle BMC=\angle BAC+\angle ABM+\angle MCA$

$=44°+76°+30°=150°$.

【注】1. 本题中，由 $BA=BC$ 想到构造外心，作正 $\triangle ABD$.

2. 当题目条件给出等腰三角形时，要尝试构造和使用外心.

例5　设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，使得 $\angle PBC=30°$，$\angle PBA=8°$，且 $\angle PAB=\angle PAC=22°$. 问：$\angle APC$ 为多少度？

(2009，青少年数学国际城市邀请赛)

解　如图7，取 $\triangle PBC$ 的外心 D，联结 DP、DC、DB.

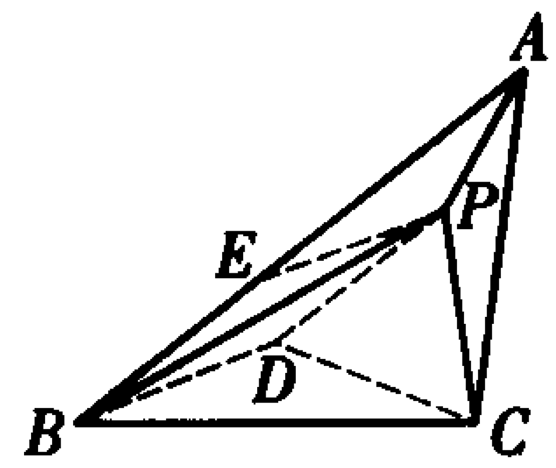

图7

则 $DP=DC=DB$,

$\angle PDC$

$=2\angle PBC=60°$.

所以，$\triangle DPC$ 是正三角形.

从而，$PC=DP=DB$，$\angle DPC=60°$.

易知，$AB>AC$.

故可在 AB 上取点 E，使得 $AE=AC$，联结 EP.

易证 $\triangle APE\cong\triangle APC$.

从而，$PE=PC$，$\angle APE=\angle APC$.

故 $PE=DP=DB$,

$\angle EPB=\angle APB-\angle APE$

$=150°-\angle APC$.

又 $\angle DBP=\angle DPB$

$=360°-\angle APB-\angle APC-\angle DPC$

$=150°-\angle APC$,

则 $\angle EPB=\angle DBP$.

因此，$PE/\!/DB$.

于是，四边形 $BDPE$ 是菱形，有

$EB=EP$.

从而，$\angle EPB=\angle EBP=8°$.

故 $\angle APC=\angle APE$

$=\angle APB-\angle EPB=142^{\circ}$.

【注】当题设中出现一个三角形有一个角是 30°时，可考虑取三角形的外心，它和 30°角的对边就构成正三角形.

例 6　在$\triangle ABC$中，已知$AC=BC$，$\angle C=20^{\circ}$，D、E分别为边BC、AC上的点. 若$\angle CAD=20^{\circ}$，$\angle CBE=30^{\circ}$，求$\angle ADE$的度数.

（2008，全国初中数学竞赛天津赛区初赛）

解　如图 8，在BC上取点F，使$AF=AB$.

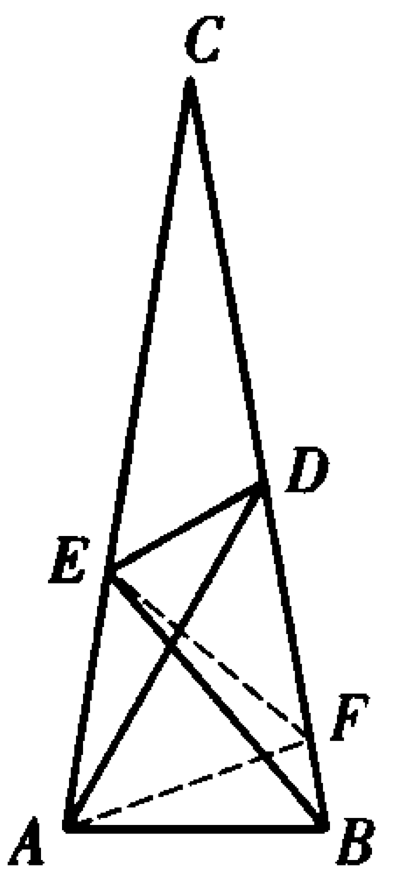

图 8

易知$\angle ABC=80^{\circ}$.

注意到

$\angle AEB$

$=\angle ACB+\angle EBC$

$=50^{\circ}$

$=\angle ABC-\angle EBC$

$=\angle ABE$.

从而，$AB=AE$.

因此，A是$\triangle BEF$的外心.

则$\angle EAF=2\angle EBC=60^{\circ}$.

所以，$\triangle AEF$为正三角形.

于是，$AF=EF$，$\angle AFE=60^{\circ}$.

在$\triangle ADF$中，有

$\angle DAF=\angle EAF-\angle CAD=40^{\circ}$，

$\angle ADF=\angle C+\angle CAD=40^{\circ}$.

故$\angle DAF=\angle ADF$.

从而，$AF=DF$.

因此，$AF=EF=DF$，即F为$\triangle AED$的外心.

由性质 2 知

$\angle ADE=\frac{1}{2}\angle AFE=30^{\circ}$.

练 习 题

1. 已知I是锐角$\triangle ABC$的内心，A_1、B_1、C_1分别是点I关于边BC、CA、AB的对称点. 若点B在$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆上，则$\angle ABC$等于(　　).

(A)30°　(B)45°　(C)60°　(D)90°

（2005，卡西欧杯全国初中数学竞赛）

提示：由判定 1 知I是$\triangle A_1B_1C_1$的外心.

答案：C.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle ABC=70^{\circ}$，$\angle BAC=80^{\circ}$，P为$\triangle ABC$内一点，且$\angle CBP=\angle BCP=10^{\circ}$. 求$\angle BAP$.

提示：易得$BP=CP$，

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BPC$.

由判定 2 知P为$\triangle ABC$的外心.

答案：60°.

3. 如图 9，在$\triangle ABC$中，已知$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle CAD=30^{\circ}$，$AC=BC=AD$. 求证：$BD=CD$.

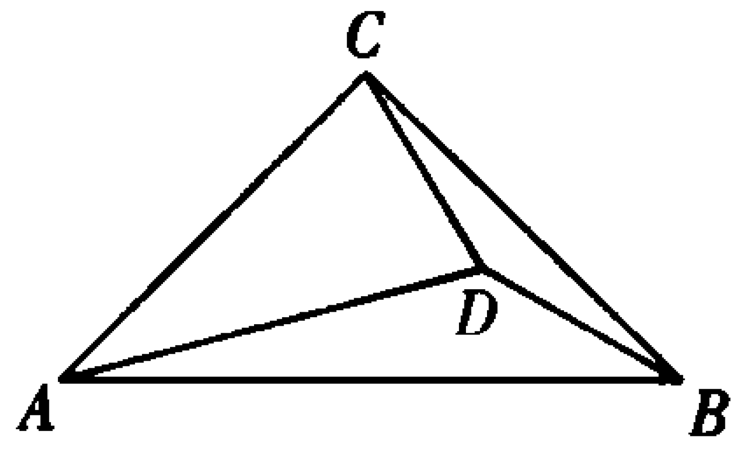

图 9

（2004，重庆市初二数学竞赛）

提示：仿例 5，取$\triangle ADC$的外心O，则$\triangle OCD$是正三角形. 可证明

$\triangle ACO\cong\triangle BCD$.

从而，$BD=AO=OC=CD$.

4. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=100^{\circ}$，$AB=AC$，P为$\triangle ABC$内一点，且$\angle PAC=\angle ACP=20^{\circ}$. 求$\angle PBA$.

提示：在$\triangle ABC$内作$\triangle AQB\cong\triangle APC$.

先证$\triangle QAP$为正三角形，再根据判定 1 知Q是$\triangle ABP$的外心.

答案：30°.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，点D在边AC上，$\angle ADB=60^{\circ}$，点E在边BD上，$\angle ECB=30^{\circ}$. 求$\angle AEC$的度数.

提示：作点E关于BC的对称点F.

则$\angle BFC=\angle BEC$

$=180^{\circ}-\frac{1}{2}\angle BAC$.

由判定 3 知A是$\triangle BCF$的外心.

又易证$\triangle CEF$是正三角形.

从而，$\triangle AEF\cong\triangle AEC$.

答案：150°.

构造辅助数列用递推法(式)解题

茹双林

(上海市格致中学,200001)

中图分类号:O142　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2011)05-0006-04

(本讲适合高中)

数学竞赛中的很多问题,可以通过引进辅助数列求解.

本文主要对以下两方面的问题作些探讨:

(1)以递推式给出通项间的关系,但可通过引进辅助数列(可能是多个辅助数列)解决问题;

(2)根据题设条件通过引进辅助数列巧妙得到数列递推式去解决问题.

1　数列中的非线性递推式问题

例1　已知在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,且

$$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}).$$

求a_n.[1]

解　令$b_n=\sqrt{1+24a_n}\geqslant 0$. 则

$$a_n=\frac{1}{24}(b_n^2-1).$$

从而,$4b_{n+1}^2=(b_n+3)^2$.

故$2b_{n+1}=b_n+3\Rightarrow\frac{b_{n+1}-3}{b_n-3}=\frac{1}{2}$.

易得$b_n=3+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

所以,$a_n=\frac{1}{24}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+3\right]^2-\frac{1}{24}$.

2　与数字相关的计数问题

例2　用1、2、3、4、5可以构成多少个各相邻数字恰好相差1的n位数?

(第28届IMO预选题)

收稿日期:2010-11-05

解　设满足条件的数共有a_n个.

设以1、2、3、4、5开头且满足条件的数各有y_n、z_n、u_n、v_n、w_n个. 则

$$a_n=y_n+z_n+u_n+v_n+w_n,$$

且　$y_n=w_n$,$z_n=v_n$.

当以1、2开头时,有$y_n=z_{n-1}$;

当以2、1开头和2、3开头时,有

$z_n=y_{n-1}+u_{n-1}$;

当以3、2开头或3、4开头时,有

$u_n=2z_{n-1}$.

从而,$z_n=3z_{n-2}$,且$z_1=1$,$z_2=2$.

故$z_{2n}=3z_{2n-2}=3^2z_{2n-4}=\cdots$

$=3^{n-1}z_2=2\times3^{n-1}$,

$z_{2n-1}=3z_{2n-3}=\cdots=3^{n-1}z_1=3^{n-1}$.

而$a_n=2z_n+4z_{n-1}$,故

$$a_{2n}=2(2\times3^{n-1})+4\times3^{n-1}=8\times3^{n-1},$$

及　$a_{2n+1}=2\times3^n+4(2\times3^{n-1})=14\times3^{n-1}$.

例3　设$a_i=0,1(i=1,2,\cdots,n)$. 试求满足

$$a_1\leqslant a_2,a_2\geqslant a_3,a_3\leqslant a_4,a_4\geqslant a_5,\cdots\cdots$$

的序列$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的个数.[2]

【注】此题由1992年上海市高中数学竞赛题改编.

解　设f_n是满足条件的序列的个数. 则

$f_1=2$,$f_2=3$,$f_3=5$.

设当$a_n=0$时满足条件的序列个数有b_n个;当$a_n=1$时满足条件的序列个数有c_n个.

则$f_n=b_n+c_n$.

易得,

当n为奇数时,有$c_n=c_{n-1}$,且$b_n=f_{n-1}$.

当 n 为偶数时，有 $b_n=b_{n-1}$，且 $c_n=f_{n-1}$.

于是，当 n 为奇数时，有

$f_n=b_n+c_n=f_{n-1}+c_{n-1}=f_{n-1}+f_{n-2}$.

同理，当 n 为偶数时，也有

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

从而，知 f_n 是斐波那契数列，且有

$f_n=F_{n+2}$.

故 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$.

3 棋盘染色与覆盖问题

例 4 在 $2\times n$ 的方格表中，用红、白两色给 $2n$ 个方格染色，每个方格只染一种颜色. 如果要求相邻两格不能都染红色，问：有几种不同的染色方法？

解 设满足条件的染色方法共有 a_n 种.

设在 $2\times n$ 个方格表中第一列染上红下白的染法有 b_n 种.

在 a_n 中，可以是第一列两格均染白色或第一列染一红一白，于是，有 $a_n=a_{n-1}+2b_n$.

在 b_n 中，对第二列可以是两格均染白色或染上白下红，于是，$b_n=a_{n-2}+b_{n-1}$.

从而，$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，且 $a_1=3$，$a_2=7$.

故 $a_n=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}]$.

例 5 $3\times 2n$ 的棋盘可用 $3n$ 张 1×2 的长方形纸片覆盖. 问：有多少种可以把棋盘完全覆盖住的方法？

解 设满足条件的覆盖方法共有 a_n 种（每两列一组，共 n 组）.

如图 1，设在 $3\times 2n$ 的方格表中，对前两列用三张 1×2 的长方形纸片横着覆盖时，满足条件的覆盖方法有 b_n 种；对第一列用一张 1×2 的长方形纸片竖着覆盖时，满足条件的覆盖方法有 c_n 种. 则

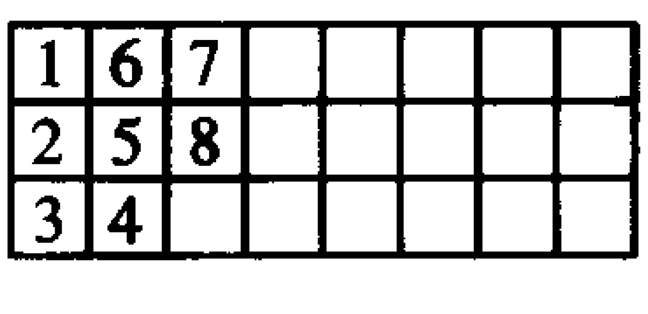

图 1

$a_n=b_n+2c_n$，且 $b_n=a_{n-1}$.

如图 1，在第一列用一张 1×2 的长方形纸片竖着覆盖在 1 与 2 号位置上，则在 3 与 4 号位置上一定是用一张 1×2 的长方形纸片横着覆盖，此时有两种可能：

(1) 用一张 1×2 的长方形纸片竖着覆盖在 5 与 6 号位置上；

(2) 用两张 1×2 的长方形纸片横着分别覆盖在 6 与 7、5 与 8 号位置上.

所以，$c_n=a_{n-1}+c_{n-1}$.

从而，$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$，且

$a_1=3$，$a_2=3+2\times 4=11$.

故 $a_n=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^n$.

4 路径问题

例 6 如图 2，设 A、E 为正八边形的相对顶点，一只青蛙从顶点 A 处开始跳跃，除顶点 E 外青蛙可以从八边形的任一顶点跳到两相邻顶点中的任一个，当它跳到顶点 E 时就停在那里. 设青蛙从顶点 A 恰好跳 n 次后到 E 的方法数为 a_n. 求 a_n. [1]

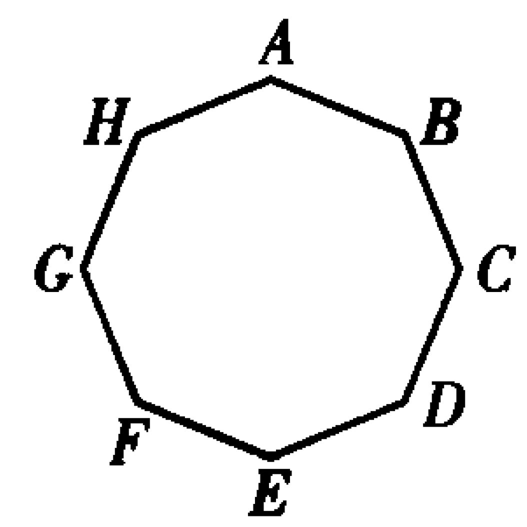

图 2

（第 21 届 IMO）

解 显然，

$a_1=a_2=a_3=a_{2m-1}=0(m\in\mathbf{N}_+)$，$a_4=2$.

设从顶点 C 处跳 n 步到 E 的跳法为 b_n. 则 $b_2=1$.

对 a_n，从顶点 A 先跳两步可分为：

(1) 到点 C 或 G；

(2) 从点 A 到 B 或 H 后再回到 A.

于是，$a_n=2b_{n-2}+2a_{n-2}$.

对 b_n，从顶点 C 先跳两步也可分为：

(1) 到达点 A；

(2) 从点 C 到 B 或 D 后再回到 C.

于是，$b_n=a_{n-2}+2b_{n-2}$.

从而，$a_n=4a_{n-2}-2a_{n-4}$（n 是偶数），且

$a_4=2$，$a_6=8$.

故 $a_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})^{m-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})^{m-1}$.

5 其他问题

例7 一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值0和1两个数中的一个，同时，在每个顶点处染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同. 问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

(2010，全国高中数学联赛)

解 设满足条件的所有设置共有 a_n 种.

设点 A_1 与 A_2 处的赋值与颜色完全相同时有 b_n 种；点 A_1 与 A_2 处的赋值与颜色仅有一个相同时有 c_n 种；点 A_1 与 A_2 处的赋值与颜色完全不同时有 d_n 种. 则

$a_n+d_n=4\times3^{n-1}$,

$a_n=b_n+c_n, b_n=a_{n-1}$.

考虑 A_1 与 A_3 处的赋值与颜色.

(1)当点 A_1 与 A_3 处的赋值与颜色完全相同时，A_2 有三种设置方法，则有 $3b_{n-1}$ 种；

(2)当点 A_1 与 A_3 处的赋值与颜色仅有一个相同时，A_2 有两种设置方法，则有 $2c_{n-1}$ 种；

(3)当点 A_1 与 A_3 处的赋值与颜色完全不同时，A_2 有两种设置方法，则有 $2d_{n-1}$ 种.

故 $a_n=3b_{n-1}+2c_{n-1}+2d_{n-1}$

$=a_{n-2}+8\times3^{n-2}$.

又易得 $a_3=28, a_4=84$.

所以，$a_n=\begin{cases}3^n+1, & n=2k+1;\\ 3^n+3, & n=2k.\end{cases}$

例8 一幢长方形的建筑物由两排正方形的房间构成，且每排有 n 个房间(像一个 $2\times n$ 的棋盘). 每个房间有三扇门通往相邻的1、2或3间房子(朝向该建筑物外面的门不算). 若从任何一个房间可以通过这些门走到另外的任意一间房间. 问：有多少种方式来设计这些房间的门，使得满足上述条件？[3]

解 设对于 $2\times n$ 长方形的建筑物，满足题设条件的方法有 a_n 种.

设当第 n 列的中间墙没有门时不能完全畅通，但在中间墙有门后就能完全畅通的方法有 b_n 种.

则对于 a_n，可分为：

(1)当前面 $2(n-1)$ 个房间完全畅通时，第 n 列的三个门有四种设置方式，都能保证所有的房间完全畅通，则有 $4a_{n-1}$ 种.

(2)当前面 $2(n-1)$ 个房间不完全畅通时，而在有第 n 列后能完全畅通，则说明：

(i)第 n 列有三个门；

(ii)前面第 $n-1$ 列中不能到达的房间中有第 $n-1$ 列的房间.

此时，必有第 $n-1$ 列的中间墙没有门，而当第 $n-1$ 列的中间墙设置门后就能使前 $n-1$ 列完全畅通，则有 b_{n-1} 种.

从而，$a_n=4a_{n-1}+b_{n-1}$.

对于 b_n，可分为：

(1)当前面 $2(n-1)$ 个房间完全畅通时，第 n 列的中间墙没有门就不完全畅通，则第 n 列的两个边墙有且只有一个门，所以，有 $2a_{n-1}$ 种.

(2)当前面 $2(n-1)$ 个房间不完全畅通时，同样有第 $n-1$ 列的中间墙没有门，所以，有 b_{n-1} 种.

从而，$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$.

则 $a_n=5a_{n-1}-2a_{n-2}$，且 $a_1=1, a_2=5$.

故 $a_n=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n-\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$.

练习题

1. 求满足以下条件的数列的个数：项数为 n，每一项为0或1或2，并且0不能为2的前一项也不能为2的后一项.

提示：设满足条件的数列个数为 f_n. 设以0为末项的数列有 a_n 个，以1为末项的数列有 b_n 个，以2为末项的数列有 c_n 个. 则

$f_n=a_n+b_n+c_n$.

易得 $a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$,

$b_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$,

$c_n=b_{n-1}+c_{n-1}$.

则 $f_n-2f_{n-1}-f_{n-2}=0$,且 $f_1=3$, $f_2=7$.

故 $f_n=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}]$.

2. 将一个 $2\times n$ 带形方格表中的某些格染上颜色,使得任何 2×2 的方格中都没有完全染上颜色(最多染 3 格). 记所有满足条件的不同染色的数目为 P_n. 证明:$P_{1\,989}$ 能被 3 整除,并求能整除 $P_{1\,989}$ 的 3 的最高次幂. [2]

(1989,捷克和斯洛伐克数学竞赛)

提示:设满足条件且最后一列两格都染上颜色的有 a_n 种;最后一列最多有一格染上颜色(有三种方式)的有 b_n 种. 则

$P_n=a_n+b_n$.

易得 $a_n=b_{n-1}$, $b_n=3(a_{n-1}+b_{n-1})$.

则 $a_n=3(a_{n-1}+a_{n-2})$, $b_n=3(b_{n-1}+b_{n-2})$.

故 $P_n=3(P_{n-1}+P_{n-2})$,且

$P_1=4$, $P_2=15$.

从而,可推知 $3^k \parallel P_{2k+1}$.

故 $P_{1\,989}$ 满足条件的 3 的最高次幂是 3^{994}.

3. 对于任意的正整数 n,考虑长度为 n 且只包含字母 A 和 B 的"词",p_n 表示不包含四个连续的字母 A,也不包含三个连续的字母 B 的长度为 n 的"词"的个数. 求表达式 $\frac{p_{2\,004}-p_{2\,002}-p_{1\,999}}{p_{2\,001}+p_{2\,000}}$ 的值. [4]

(第 53 届捷克和斯洛伐克数学竞赛)

提示:仿例 3,详解见本刊 2005 年增刊第 97 页.

4. 设六边形 $ABCDEF$ 是边长为 1 的正六边形,O 是六边形的中心,除了六边形和每一条边,还从点 O 到每个顶点连一条线段,共得到 12 条长度为 1 的线段. 一条路径是指从点 O 出发,沿着线段最后又回到点 O. 问:长度为 2 003 的路径共有多少条? [5]

(第 6 届中国香港数学奥林匹克)

提示:仿例 7,详解见本刊 2005 年增刊第 45 页.

参考文献:

[1] 李胜宏,[美]冯祖鸣. 高中数学竞赛培训教材(高三分册)[M]. 杭州:浙江大学出版社,2005.

[2] 李成章. 世界数学奥林匹克解题大辞典(组合卷)[M]. 石家庄:河北少年儿童出版社,2002.

[3] 熊 斌 等. 奥数教程(第三版,高一年级)[M]. 上海:华东师范大学出版社,2006.

[4] 第 53 届捷克和斯洛伐克数学竞赛[J]. 中等数学,2005(增刊).

[5] 第 6 届中国香港数学奥林匹克[J]. 中等数学,2005(增刊).

命题与解题

介绍一个组合问题

陶平生

（江西科技师范学院数学与计算机科学系，330013）

中图分类号：O157.2 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)05-0010-03

2010年8月16日至22日，由台湾九章数学教育基金会和彰化师范大学数学系承办的第七届东南地区数学奥林匹克在台湾举行. 笔者为此次竞赛提供了一道组合候选题.

题目 将正整数集合 $M=\{1,2,\cdots,99\}$ 中的元素分别染成红、蓝、绿三种颜色，使得每种颜色的数各有33个，称为集合 M 的一个"三色划分". 对以下三个命题，请给出证明或予以否定：

(1)存在 M 的一个三色划分，使得 M 中的任一组勾股数三种颜色都有；

(2)存在 M 的一个三色划分，使得 M 中的任一组勾股数都是单色的；

(3)对于 M 的任一个三色划分，必存在一组勾股数，其中的三数全为一色或者颜色互异.

【说明】在命题时，考虑到2010年适逢辛亥革命99周年，故将集合 M 设为99个元素. 其中，以勾股数体现中华传统文化，并与承办者九章数学教育基金会的"九章算数，勾股量天"的标志相合，而红、蓝、绿三色的意义众所周知.

解 注意到，若正整数 a、b、c 为一组勾股数，即 $a^2+b^2=c^2$，则

$c=k(m^2+n^2)$，

其中，a、b 可分别表为 $k(m^2-n^2)$、$k\cdot 2mn$（$k\in\mathbf{Z}_+$，m、n 互质，一奇一偶，$m>n>0$）形式.

收稿日期：2011-03-03

从大到小依次考虑 c 的结构，产生相应的 m、n、k.

于是，共得到以下50个勾股数组，它们构成集合 P：

(3,4,5)，(5,12,13)，(6,8,10)，(7,24,25)，(8,15,17)，(9,12,15)，(9,40,41)，(10,24,26)，(11,60,61)，(12,16,20)，(12,35,37)，(13,84,85)，(14,48,50)，(15,20,25)，(15,36,39)，(16,30,34)，(16,63,65)，(18,24,30)，(18,80,82)，(20,21,29)，(20,48,52)，(21,28,35)，(21,72,75)，(24,45,51)，(24,70,74)，(24,32,40)，(25,60,65)，(27,36,45)，(28,45,53)，(30,40,50)，(30,72,78)，(32,60,68)，(33,44,55)，(33,56,65)，(35,84,91)，(36,48,60)，(36,77,85)，(39,52,65)，(39,80,89)，(40,42,58)，(40,75,85)，(42,56,70)，(45,60,75)，(48,55,73)，(48,64,80)，(51,68,85)，(54,72,90)，(57,76,95)，(60,63,87)，(65,72,97).

以上勾股数组中，共包含71个数，它们构成集合 E：

3，4，…，18，20，21，24，25，…，30，32，33，…，37，39，40，41，42，44，45，48，50，51，…，58，60，61，63，64，65，68，70，72，73，…，78，80，82，84，85，87，89，90，91，95，97.

此外,M 中还有 28 个数未被勾股数组取到,它们构成集合 F_0:

1,2,19,22,23,31,38,43,46,47,49,59,62,66,67,69,71,79,81,83,86,88,92,93,94,96,98,99.

(1)结论是成立的.

构造法.

先将集合 E 中的数分成三个集:

$A=\{3,7,10,13,14,15,16,18,27,29,35,40,51,52,53,55,56,57,60,64,72,74,77,89\}$,

$B=\{4,6,12,17,21,25,26,30,32,33,39,41,45,48,58,61,63,70,82,85,90,91,95,97\}$,

$C=\{5,8,9,11,20,24,28,34,36,37,42,44,50,54,65,68,73,75,76,78,80,84,87\}$.

再将集合 F_0 中的元素分别插入集合 A、B、C 中,使得每个集合有 33 个数,得到集合 A_0、B_0、C_0.

此时,若将集合 A_0、B_0、C_0 的元素分别染红、蓝、绿三种颜色,则每组勾股数均为三种颜色都有.

(2)结论不成立.

若某数 a 属于 k 组勾股数(k 次出场),则称数 a 是"k 次"的,记为 $D(a)=k$. 于是,

$D(12)=D(15)=D(20)=D(30)$
$=D(36)=D(45)=D(72)=D(85)=4$,

$D(24)=D(60)=6$,

$D(40)=D(48)=D(65)=5$,

其中,含有 13 个数:

12,15,20,24,30,36,40,45,48,60,65,72,85.

反证法.

假设每组勾股数都只有一种颜色. 此时,若两组勾股数含有公共元素 a,则这两组数也必同色. 称这样的两组为同色关联组,用"$\sim$"表示同色关联组.

注意到

$(12,16,20)\sim(9,12,15)\sim(5,12,13)\sim(13,84,85)\sim(40,75,85)\sim(45,60,75)\sim(24,45,51)\sim(51,68,85)\sim(32,60,68)\sim(36,48,60)\sim(25,60,65)\sim(65,72,97)\sim(30,72,78)$,

即前述 13 个数同色.

而 50 组勾股数,除了(57,76,95)这一组外,其余的组至多两步便可与这 13 个数中的某个数关联,即为同色,也就是集合 E 的 71 个元素中至少有 68 个数同为一色,这与每色的数只有 33 个相矛盾.

(3)结论不成立.

需证明:存在 M 的一个三色划分,使得每一个勾股数组都恰有两个数颜色相同.

首先,若某个勾股数组中有一个"一次"数,则无论另外两个数如何染色(相同或者不相同),都可以在红、蓝、绿三种颜色中选择一种颜色染此一次数,使得这组勾股数中恰有两个数同色.

其次,将含有一次数的勾股数组从那 50 个勾股数组中删除,剩下的勾股数组归入集合 P_1,而将 P_1 中的数归入集合 E_1,这样算是一轮操作. 对于 P_1 和 E_1,同样可以从中寻找出新的一次数,并继续这一操作步骤,直到不再含有一次数为止.

具体操作过程如下:

E 中的 32 个一次数构成集合 F_1:

3,4,6,7,11,14,17,26,27,29,34,37,41,44,53,54,57,58,61,64,73,74,76,77,78,82,87,89,90,91,95,97.

删去这些一次数(同时删去所在的组)后,剩下的勾股数有 23 组,它们构成集合 P_1:

(5,12,13),(9,12,15),(12,16,20),(13,84,85),(15,20,25),(15,36,39),(16,63,65),(18,24,30),(20,48,52),

(21,28,35),(21,72,75),(24,45,51),
(24,32,40),(25,60,65),(30,40,50),
(32,60,68),(33,56,65),(36,48,60),
(39,52,65),(40,75,85),(42,56,70),
(45,60,75),(51,68,85).

以上勾股数组中,共包含35个数,它们构成集合 E_1:

5,9,12,13,15,16,18,20,21,24,25,28,30,32,33,35,36,39,40,42,45,48,50,51,52,56,60,63,65,68,70,72,75,84,85.

注意到在删去与一次数相关的勾股数组时,该组的每个数都减少了一次,于是,在删去多个勾股数组时,可能有些非一次的数也被删去,消失于 P_1 之中.

E_1 中的12个一次数构成集合 F_2:

5,9,18,28,33,35,42,50,63,70,72,84.

类似地得到

$P_2=\{(12,16,20),(15,20,25),(15,36,39),(20,48,52),(24,45,51),(24,32,40),(25,60,65),(30,60,68),(36,48,60),(39,52,65),(40,75,85),(45,60,75),(51,68,85)\}$,

$E_2=\{12,15,16,20,24,25,32,36,39,40,45,48,51,52,60,65,68,75,85\}$,

E_2 中的一次数为:12,16;

$P_3=\{(15,20,25),(15,36,39),(20,48,52),(24,32,40),(24,45,51),(25,60,65),(32,60,68),(36,48,60),(39,52,65),(40,75,85),(45,60,75),(51,68,85)\}$,

共计12组,

$E_3=\{15,20,24,25,32,36,39,40,45,48,51,52,60,65,68,75,85\}$,

共17个数.

在这17个数中,数60的"次数"为4,其余数的次数均为2;这12个勾股数组中的17个数可以排成两个 3×3 的数表,使得每行每列中的三数都是一个勾股数组.

再用记号 X、Y、Z 分别表示红、蓝、绿三种颜色.

下面给出一种染色的方法,使得这12组勾股数的每一组中都恰有两个数颜色相同.具体排法及染色方法如图1.

$15x$	$36x$	$39y$
$20x$	$48y$	$52y$
$25z$	$60y$	$65z$

$24x$	$32x$	$40y$
$45x$	$60y$	$75y$
$51z$	$68y$	$85z$

图1

在此基础上,可以用前述方法依次将 E_3、E_2、E_1、E 中的数染色,使之符合要求.在染色过程中,要注意分配每种颜色数的数目,使得都不超过33个.

其中的一个例子是:

红色数组(X 组)共24个数:

$A=\{3,5,6,10,13,15,20,24,29,30,32,34,36,42,45,53,58,63,70,78,80,90,91,97\}$;

蓝色数组(Y 组)共24个数:

$B=\{4,8,11,17,18,21,26,28,33,37,39,40,48,50,52,57,60,64,68,74,75,82,87,89\}$;

绿色数组(Z 组)共23个数:

$C=\{7,9,12,14,16,25,27,35,41,44,51,54,55,56,61,65,72,73,76,77,84,85,95\}$.

最后,用28个非勾股数(即集合 F_0 中的数)将这三种颜色集合中的元素个数分别填充至33个,得到三个33元集,即红、蓝、绿三个集合 A_0、B_0、C_0,使得 M 中的每一个勾股数组都恰有两个数颜色相同.

至此,(3)的结论已被否定.

利用转化思想解竞赛题

宋 强

中图分类号: O142 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2011)05-0013-06

对于某些竞赛题,用常规的思考方法去解答往往事倍功半,若通过一些转化思想(如映射、染色、图论、概念转换等),就可以简捷地解决问题.本文通过文献[1]中的几道赛题加以阐述.

1 映射法

例 1 设 n 为正整数.有一个矩形 $ABCD$ 的边长为 $AB=90n+1$, $BC=90n+5$. 用水平与竖直的线将矩形分成 $(90n+1)\times(90n+5)$ 个单位正方形, S 是由所有单位正方形的顶点构成的集合.证明:通过 S 中至少两个点的直线的条数可以被 4 整除.

(2008,巴尔干地区数学奥林匹克)

证明 首先证明一个引理.

引理 已知正奇数 m、m' $(m<m')$,且 $m\equiv m'\pmod 4$.

将 $m\times m'$ 矩形分成 mm' 个单位正方形.设 S 是所有单位正方形的顶点的集合, T 是所有至少通过 S 中两个点的直线的集合.则

$$|T|\equiv 0\pmod 4\Leftrightarrow |V|\equiv 1\pmod 2,$$

其中, $V=\{(p,q)\mid p、q$ 为奇数, $1\leqslant p\leqslant m<q\leqslant m',(p,q)=1\}$.

证明 将 $m\times m'$ 矩形放在平面直角坐标系中,矩形顶点为 $(0,0)$、$(0,m)$、$(m',0)$、(m',m).对 T 中直线分类讨论.

(1)水平与竖直的直线有 $(m+1)+(m'+1)$ 条.

由于 m、m' 为奇数,且

$m\equiv m'\equiv k\pmod 4$ $(k\in\{1,3\})$,

故 $(m+1)+(m'+1)\equiv 2(k+1)\equiv 0\pmod 4$.

(2)斜率为

$$\frac{p}{q}\left((p,q)=1,1\leqslant p\leqslant m,1\leqslant q\leqslant m'\right)$$

的直线,其每一条与 $U_{p,q}$ 中的单位正方形的顶点一一对应(如图 1,点 (x,y) 与 $(x+q,y+p)$ 在同一条斜率为 $\frac{p}{q}$ 的直线上),且

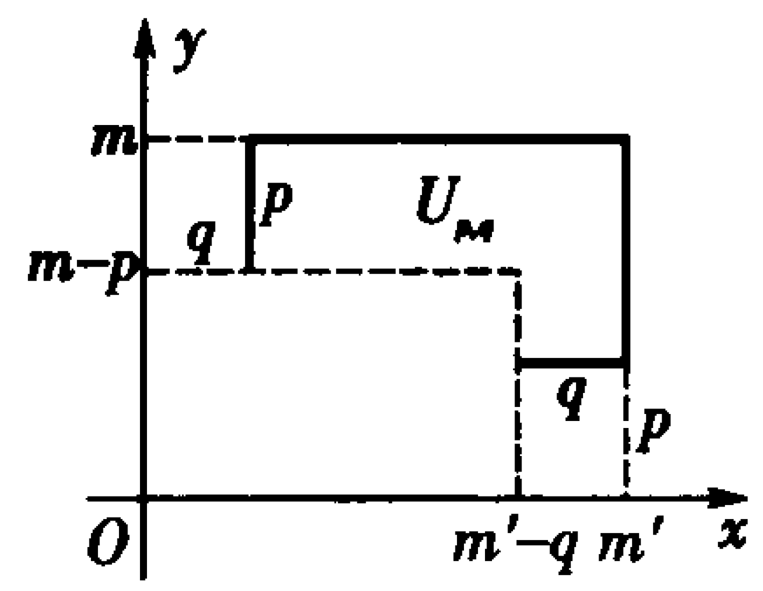

图 1

$$|U_{p,q}|=\begin{cases}p(m'+1)+q(m+1)-3pq, & p\leqslant\frac{m}{2},q\leqslant\frac{m'}{2};\\(m+1-p)(m'+1-q), & p>\frac{m}{2}\text{或}q>\frac{m'}{2}.\end{cases}$$

(3)斜率为

$$-\frac{p}{q}\left((p,q)=1,1\leqslant p\leqslant m,1\leqslant q\leqslant m'\right)$$

的直线,其关于直线 $x=\frac{m'}{2}$ 对称的直线斜率为 $\frac{p}{q}$,易知,该直线也在 T 中.故与(2)中直线一一对应.

综上,

$$|T|\equiv 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant m\\1\leqslant q\leqslant m'\\(p,q)=1}}|U_{p,q}|\equiv 2\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant m\\1\leqslant q\leqslant m'\\(p,q)=1}}pq\pmod 4.$$

故 $|T|\equiv 0\pmod 4\Leftrightarrow\sum\limits_{(p,q)\in V'}pq\equiv 0\pmod 2$.

$\Leftrightarrow |V'|\equiv 0\pmod 2$,

其中, $V'=\{(p,q)\mid p、q$ 为奇数, $1\leqslant p\leqslant m,1\leqslant q\leqslant m',(p,q)=1\}$.

显然, $(1,1)\in V'$,且当 $q\leqslant m$ 时,有

收稿日期:2010-10-14

$(p,q)\in V'\Leftrightarrow(q,p)\in V'$.

故 $|V'|\equiv 0\pmod 2\Leftrightarrow|V|\equiv 1\pmod 2$.

回到原题.

取 $m=90n+1$, $m'=90n+5$.

当 $q=90n+3$ 时,由

$(q-p,q)=(p,q)$,

知 $1,2,\cdots,q$ 中与 q 互质的数的一半为奇数.

故 p 有 $\frac{1}{2}\varphi(90n+3)$ 种取值.

当 $q=90n+5$ 时, p 有 $\frac{1}{2}\varphi(90n+5)-1$ 种取值(同上,且去掉 $p=90n+3$ 的取值).

$$\text{故}|V|=\frac{1}{2}(\varphi(90n+3)+\varphi(90n+5))-1$$

$$=\frac{1}{2}(\varphi(3)\varphi(30n+1)+\varphi(5)\varphi(18n+1))-1$$

$$\equiv 1\pmod 2.$$

所以, $|T|\equiv 0\pmod 4$.

例2 设 n、$k(n\geqslant k\geqslant 1)$ 为正整数. 有 n 盏灯放在圆周上,且都是关着的. 每一次,你可以改变任意相邻的 k 盏灯的开或关的状态,在下列三种情形下:

(1) k 是奇质数,

(2) k 是奇数,

(3) k 是偶数,

对于 2^n 种可能的状态中有多少种状态可以通过若干次操作得到?

(2009,意大利国家队选拔考试)

解 将圆周上的 n 盏灯依次编号为 $1,2,\cdots,n$.

在可以通过若干次操作得到的一种状态中,将第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 盏灯赋一个值 $a_i\in\{0,1\}$,其中,0 表示灯是关着的,1 表示灯是开着的.

将每次操作赋一个值 $b_i(i\in\{1,2,\cdots,n\})$:

$b_i=1$ 表示将第 i 到 $i+k-1$ 盏灯进行一次操作(即改变这 k 盏灯的开关状态); $b_i=0$ 表示未对第 i 到 $i+k-1$ 盏灯进行操作.

显然,操作 $b_i=1$ 两次等价于 $b_i=0$,即不操作.

故操作 $b_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ 至多一次.

下面的运算规则为: $1+1=0$, $0-1=1$,即在模 2 的意义下运算.

由题设知

$$a_i=\sum_{j=0}^{k-1}b_{i-j}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

其中,下标是在模 n 的意义下.

从而,每一组操作 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 对应一个满足条件的状态 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,记为

$f(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

对一组操作 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,下面计算有多少组与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 不同的 $(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)$ 满足

$$f(b_1,b_2,\cdots,b_n)=f(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n). \quad ①$$

易知,式①等价于

$$\sum_{j=0}^{k-1}b_{i-j}=\sum_{j=0}^{k-1}b'_{i-j}\ (i=1,2,\cdots,n). \quad ②$$

由式②又有

$$\sum_{j=1}^{k}b_{i-j}=\sum_{j=1}^{k}b'_{i-j}. \quad ③$$

② − ③得 $b_i-b_{i-k}=b'_i-b'_{i-k}$,即

$b'_i-b_i=b'_{i-k}-b_{i-k}$.

设 $c_i=b'_i-b_i$. 则

$$c_i=c_{i+k}=c_{i+kt}\ (i=1,2,\cdots,n;t=1,2,\cdots). \quad ④$$

设 $(n,k)=d$, $n=n_0d$, $k=k_0d$, $(n_0,k_0)=1$.

考虑 $\{n_0s+1\mid s=1,2,\cdots,k_0\}$,其模 k_0 两两不同余.

于是,存在 $s\in\{1,2,\cdots,k_0\}$,使得

$k_0\mid(n_0s+1)$,即 $k_0t=n_0s+1$,则

$kt=ns+d$.

将上式代入式④得

$c_i=c_{i+kt}=c_{i+ns+d}=c_{i+d}\ (i=1,2,\cdots,n)$.

故每一组 $(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)$ 与 $(c_1,c_2,\cdots,c_d)$ 一一对应,其中, $c_i\in\{0,1\}$, c_i 不全为 0,且

$$k_0\sum_{i=1}^{d}c_i=0.$$

显然,满足上述条件的$(c_1,c_2,\cdots,c_d)$的个数为

$$F(k_0)=\begin{cases}2^d-1, & k_0\text{ 为偶数;}\\ 2^{d-1}-1, & k_0\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

故每个满足条件的状态对应 $F(k_0)+1$ 组操作.

因为共有 2^n 组不同操作,所以,满足条件的状态共有

$$\frac{2^n}{F(k_0)+1}=\begin{cases}2^{n-d}, & k_0\text{ 为偶数;}\\ 2^{n-d+1}, & k_0\text{ 为奇数,}\end{cases}$$

其中,$d=(n,k)$,$k_0=\frac{k}{d}$.

2 染色法

例 3 设 $S=\{1,2,\cdots,2n\}(n\in\mathbf{Z}_+)$. 求 S 的子集 T 的数目,使得 T 中不存在两个元素 a、b,满足 $|a-b|=1$ 或 n.

(2009,越南数学奥林匹克)

解 将一个圆周等分成 n 段,依次编号为 $1,2,\cdots,n$,在第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 段圆弧外侧放 i,内侧放 $n+i$.

对应每个满足题设条件的子集 T,将上述 n 段圆弧进行染色,规则如下:对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n)$,若 $i\in T$,则将第 i 段圆弧染为红色;若 $n+i\in T$,则将第 i 段圆弧染为蓝色;若 i、$n+i\notin T$,则第 i 段圆弧不染色.

于是,满足题设条件的子集 T 转化为满足下列条件的染色方法:

若第 $i(i\in\{1,2,\cdots,n-1\})$ 段与第 $i+1$ 段圆弧都染色,则二者颜色不同;

若第 1 段与第 n 段圆弧都染色,则或者二者同色,或者前者为红色,后者为蓝色.

下面计算上述染色方法的个数.

规定:第 i 段圆弧标为 i,第 i 到 j 段圆弧标为 $<i,j>$.

(1)若所有圆弧都未染色,其染色方法有 1 种;若所有圆弧都染色,那么,当 n 为偶数时,染色方法有 1 种(颜色相同,且 1 为红色,n 为蓝色);当 n 为奇数时,染色方法有 2 种(1、n 同色,其余圆弧颜色相间). 此类染色方法共有

$$T_0=\frac{1}{2}[5-(-1)^n](\text{种}).$$

(2)既有染色圆弧,也有未染色圆弧.

将相邻的染色(未染色)圆弧连成一节,从而,圆周被分成 k 节. 显然,k 为偶数.

设每节圆弧的起始圆弧编号为 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$,且满足 $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant n$.

接下来对 1、n 的染色情形分类讨论.

(i)1、n 均染色.

则 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant n$. 此时,

$$k=2t\left(t=1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

其中,$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

显然,在含 1、n 的圆弧节中,$<n,1>$的染色方法有 3 种,该节中其余圆弧的颜色由 1、n 的颜色决定;其他 $t-1$ 条染色的圆弧节均有 2 种染色方法. 故染色方法有

$$\begin{aligned}T_1&=\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\mathrm{C}_{n-1}^{2t}\times2^{t-1}\times3\\&=\frac{3}{4}[(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}]-\frac{3}{2}(\text{种}).\end{aligned}$$

(ii)1、n 均未染色.

则 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant n$. 此时,

$$k=2t\left(t=1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

故染色方法有

$$\begin{aligned}T_2&=\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\mathrm{C}_{n-1}^{2t}\times2^{t}\\&=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}]-1(\text{种}).\end{aligned}$$

(iii)1 未染色,n 染色.

则 $1=x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant n$. 此时,

$$k=2t\left(t=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

故染色方法有

$$T_3=\sum_{t=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathrm{C}_{n-1}^{2t-1}\times 2^t$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}](\text{种}).$$

(iv)1 染色，n 未染色.

同(iii)，染色方法有

$$T_4=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}](\text{种}).$$

综上，所有染色方法共有

$$T_0+T_1+T_2+T_3+T_4$$

$$=\frac{1}{2}[5-(-1)^n]+\frac{5}{4}[(1+\sqrt{2})^{n-1}+(1-\sqrt{2})^{n-1}]-\frac{5}{2}+\sqrt{2}[(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{4}[(5+4\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n-1}+(5-4\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n-1}]+\frac{(-1)^{n+1}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}[(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n}+(3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{n}]+\frac{(-1)^{n+1}}{2}.$$

3 图论法

例 4 10 名翻译被邀请参加一个国际数学会议. 每名翻译恰精通希腊、斯洛文尼亚、越南、西班牙和德国五种语言中的两种，没有两名翻译精通的是相同的两种语言. 要将翻译分配到五个房间，每个房间两名翻译，且这两名翻译精通同一种语言. 试问：有多少种不同的分配方案(满足要求的 5 对翻译被安排在五个房间中的所有可能的分配方案认为是同一种方案)?

(2009，日本数学奥林匹克)

解 构造图 G，其中，点 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 分别表示五种语言，任意两点(如 x_1、x_2)间所连的边(x_1x_2)表示精通这两种语言的翻译.

由题设知，图 G 为简单完全图.

下面对图 G 的所有边按下列规则定向：

若翻译 x_1x_2 所在房间的公共语言为 x_1，则将边 x_1x_2 定向为 $x_2\to x_1$，也可记为 $\overrightarrow{x_2x_1}$.

由题设知，图 G 为简单有向图，且图 G 中各点的入度均为偶数(或 0 或 2 或 4).

(1)若有两点 x_1、x_2 入度为 4，则边 x_1x_2 既是 $x_1\to x_2$，也是 $x_2\to x_1$，矛盾.

(2)若各点入度均为 2，则出度也为 2.

取其中任一点 x_1，由其引出两条边 $\overrightarrow{x_1x_2}$、$\overrightarrow{x_1x_3}$(设 $x_2\to x_3$)，引入两条边 $\overrightarrow{x_4x_1}$、$\overrightarrow{x_5x_1}$(设 $x_4\to x_5$).

如图 2，将 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 依次摆放在一个圆周上.

由 $\overrightarrow{x_1x_3}$、$\overrightarrow{x_2x_3}$ 知

$x_3\to x_4$，$x_3\to x_5$；

由 $\overrightarrow{x_4x_5}$、$\overrightarrow{x_4x_1}$ 知

$x_2\to x_4$，$x_3\to x_4$；

由 $\overrightarrow{x_3x_5}$、$\overrightarrow{x_4x_5}$ 知

$x_5\to x_1$，$x_5\to x_2$.

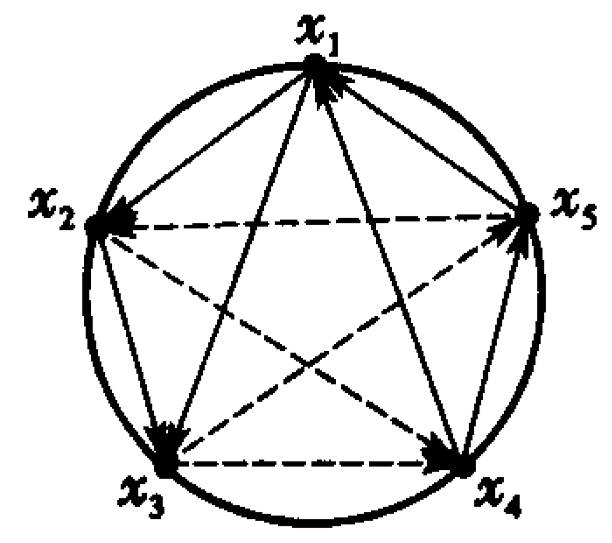

图 2

则得到图 G'，其与 5—圆排列一一对应.

故分配方案有 $4!=24$ 种.

(3)若存在一点 x_1 入度为 4，则必存在另一点 x_2 出度为 4，其余三点入度为 2.

显然，有边

$\overrightarrow{x_ix_1}(i=2,3,4,5)$，$\overrightarrow{x_2x_j}(j=3,4,5)$.

从而，x_3、x_4、x_5 之间为一同向圈，其与 3—圆排列一一对应，且 $\overrightarrow{x_ix_1}$ 分成两组，有三种方法.

故分配方案有 $5\times4\times2!\times3=120$ 种.

综上，分配方案共有 144 种.

4 构造概念

例 5 一个由 n 个方格构成的长条，这 n 个方格依次编号为 $1,2,\cdots,n$. 首先，一个方格是空的，而其他每个方格里都有一枚棋子. 当一个方格中有一枚棋子，而与它相邻的两个方格中一个有棋子、另一个没有棋子时，就

把第二枚棋子跳过中间的第一枚棋子放入空着的方格中，且同时从长条上移走第一枚棋子.

当 $n=2\ 008$ 和 $n=2\ 009$ 时，试找出所有可能的最初空格所在的位置，使得经过移动后达到长条上只有一枚棋子的状态.

（2009，爱沙尼亚国家队选拔考试）

解 为了叙述方便，将题设条件及操作重新定义如下，其本质不变.

设长度为 $n(n\geqslant3)$ 的长条中第 $t(1\leqslant t\leqslant n)$ 个方格为空格，其余各格均有一枚棋子的情形为 (n,t).

类似地，长度为 n 且第 $i_j(j=1,2,\cdots,t)$ 个方格为空格的长条记为 $(n;i_1,i_2,\cdots,i_t)$.

题设的操作可理解为：

一枚棋子 e 可以右（左）移一格的条件是其左（右）边与之相邻的格中有一枚棋子（称为 e 的撞子），其右（左）边与之相邻的格为空格（称为空位）；在棋子 e 被撞入空位时，e 的撞子被 e 吃掉（即被拿走）.

首先证明一个引理.

引理 任意一枚棋子不能右（左）移两格.

证明 若有棋子可以向右移动两格，取其中最靠左边的棋子为 e，设其可从第 i 格移到第 $i+2$ 格.

当 e 从 i 移到 $i+1$ 时，在 $i-1$ 中的 e 的撞子被 e 吃掉，则 $i-1$、i 变为空位. 若想将 e 从 $i+1$ 移到 $i+2$，必须在 i 有一撞子，从而，需要一枚棋子从 $i-2$ 移到 i，此与 e 的定义矛盾.

其次，设 (n,t) 经过有限次操作后，只剩一枚棋子.

于是，(n,t) 经过第一次操作，变为

$$(n;t-2,t-1)$$
$$=(t-2,t-2)+(n+2-t,1)\ (t\geqslant3)$$

或 $$(n;t+1,t+2)$$
$$=(t+1,t+1)+(n-1-t,1)\ (t\geqslant1).$$

将以上两种情形统一记为

$$(n;s,s+1)=(s,s)+(n-s,1).$$

不妨设 $1\leqslant s\leqslant\frac{n}{2}$.

设 (s,s) 中的棋子依次为 $e_i(i=1,2,\cdots,s-1)$，$(n-s,1)$ 中的棋子依次为 $f_j(j=n-s-1,n-s-2,\cdots,1)$，其中，$e_i$ 在第 i 格中，f_j 在第 $n+1-j$ 格中.

由引理知，两个长条中的棋子分别移动，彼此不会进入，且相互影响只有一次，即两个初始空位各有一枚棋子进入.

考虑长条 (s,s).

e_1 无法移动，只能作为 e_2 的撞子被 e_2 吃掉，从而，e_2 被撞入第 3 格；其前提条件为第 3 格是空格，即 e_3 作为 e_4 的撞子被 e_4 吃掉，从而，e_4 被撞入第 5 格；……递推知，e_{2i-1} 被 e_{2i} 吃掉，e_{2i} 第一次移动为右移到第 $2i+1$ 格. 故 s 为奇数.

类似有，f_{2j-1} 被 f_{2j} 吃掉，f_{2j} 第一次移动为左移到第 $n-2j$ 格，且 $n-s$ 为奇数. 故 n 为偶数.

设 $A=\{e_{2i}\mid 2i<s\}$，$B=\{f_{2j}\mid 2j<n-s\}$.

则 $|A|\leqslant|B|$.

由前面的推导，知 A 中下标较大的 e_{2i} 先右移，B 中下标较大的 f_{2j} 先左移.

若 $|A|>1$，则 A 中棋子互吃的前提条件是 e_{s-1} 左移回原位. 同理，B 中棋子互吃的前提条件是 f_{n-s-1} 右移回原位. 但 e_{s-1} 与 f_{n-s-1} 在 s、$s+1$ 格相会，只能使一枚棋子移回原位，另一枚棋子会被吃掉，矛盾.

故 $|A|=1$.

则 $s=3\Rightarrow t=2$ 或 5.

最后，验证 $(2m,2)$、$(2m,5)$ 满足条件.

$(2m,2)\to(2m;3,4)\to(2m;1,2,4)$
$\to(2m;1,2,5,6)=(2m-2;3,4)$
$\to\cdots\to(4;3,4)\to(4;1,2,4)$；
$(2m,5)\to(2m;3,4)\to(4;1,2,4)$.

综上，只有

$(2m,2)$、$(2m,5)$、$(2m,2m-4)$、$(2m,2m-1)$

这四种长条能经过有限步后，只剩一枚棋子.

回到原题.

当 $n=2\ 008$ 时，最初空格的位置为 2、5、2 004、2 007.

当 $n=2\ 009$ 时，没有满足条件的位置.

5 多重转化

例6 已知凸四边形 $ABCD$. 证明：在四边形 $ABCD$ 的内部存在一点 P，使得

$$\angle PAB+\angle PDC=\angle PBC+\angle PAD=\angle PCD+\angle PBA=\angle PDA+\angle PCB=90^\circ \quad ①$$

的充分必要条件是对角线 AC 与 BD 垂直.

（第 49 届 IMO 预选题）

证明 如图 3，首先证明：

$\angle PAB+\angle PDC=90^\circ$

$\Leftrightarrow \angle APD=\angle ABC+\angle BCD-90^\circ$.

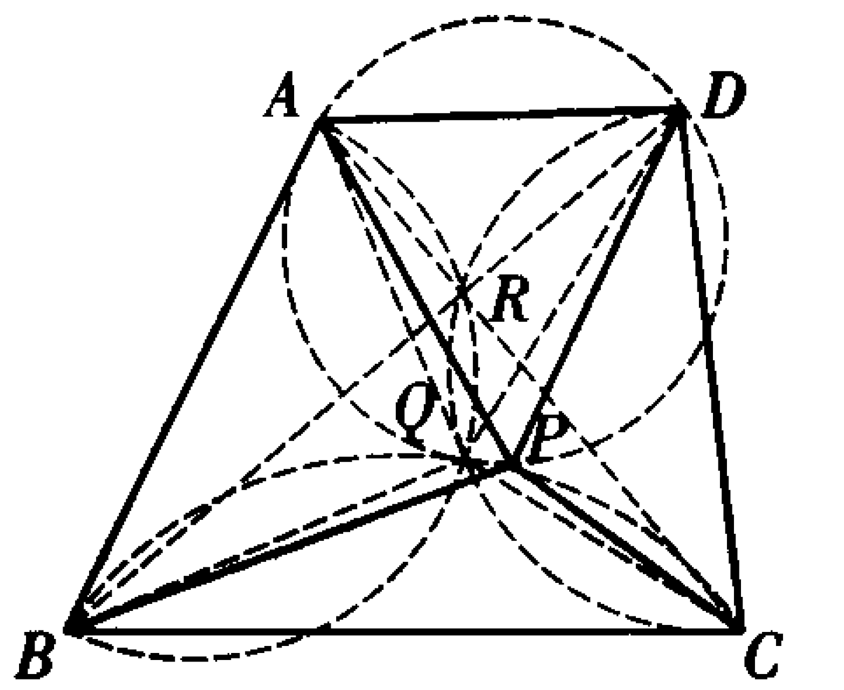

图 3

事实上，

$\angle APD=180^\circ-(\angle PAD+\angle PDA)$

$=360^\circ-(\angle PAD+\angle PDA)-180^\circ$

$=\angle ABC+\angle BCD+(\angle PAB+\angle PDC)-180^\circ$.

其次，设 $\triangle PAD$、$\triangle PBC$ 的外接圆交于另一点 Q（可能点 Q 与 P 重合，此时两圆相切）. 则

$\angle AQB=\angle PDA+\angle PCB$,

$\angle CQD=\angle PBC+\angle PAD$,

$\angle AQD=\angle APD$.

故式①

$\Leftrightarrow \angle AQB=\angle CQD=90^\circ$，且

$\angle AQD=\angle ABC+\angle BCD-90^\circ$. ②

最后，设 $\triangle AQB$、$\triangle CQD$ 的外接圆交于另一点 R（可能点 P 与 Q 重合，此时两圆相切）. 则

$\angle AQB=\angle ARB$，$\angle CQD=\angle CRD$,

$\angle AQD=\angle ABR+\angle RCD$.

故式②

$\Leftrightarrow \angle ARB=\angle CRD=90^\circ$，且

$\angle RBC+\angle RCB=90^\circ$.

从而，

式① $\Leftrightarrow \angle ARB=\angle BRC=\angle CRD=90^\circ$.

$\Leftrightarrow AC\perp BD$，且 R 为其交点.

【注】以上证法还说明了当 $AC\perp BD$ 时，点 P 的作图方法及唯一性.

例7 已知 BE、CF 是锐角 $\triangle ABC$ 的高，过点 A、F 的两个圆与直线 BC 分别切于点 P、Q，且点 B 在 C、Q 之间. 证明：PE、QF 的交点在 $\angle AEF$ 的外接圆上.

（第 49 届 IMO 预选题）

如图 4，设 $AD\perp BC$，联结 AQ.

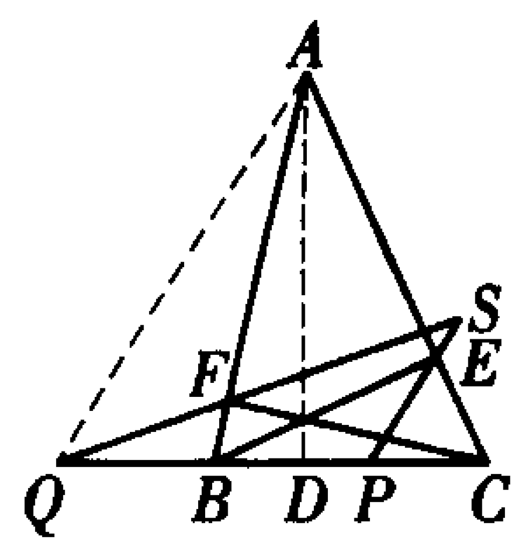

图 4

由题设知

$BQ^2=BF\cdot BA=BP^2$

$\Rightarrow \triangle AQB\backsim\triangle QFB$

$\Rightarrow \angle AQB=\angle QFB=\angle AFS$.

则 A、S、E、F 四点共圆

$\Leftrightarrow \angle CEP=\angle AFS=\angle AQB$

$\Leftrightarrow A$、E、P、Q 四点共圆

$\Leftrightarrow CP\cdot CQ=CE\cdot CA=CD\cdot CB$

$\Leftrightarrow CD\cdot CB=CB^2-BP^2=CB^2-BF\cdot BA=CB^2-BD\cdot BC$.

上式显然成立.

参考文献：

[1] 2008—2009 国内外数学竞赛题及精解[J]. 中等数学，2010(增刊2).

初等数学研究

一道竞赛题的推广

徐国红

（浙江省海盐县沈荡中学，314311）

中图分类号：O151　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)05－0019－01

第 12 届莫斯科数学奥林匹克有一道很有趣的题目：

给定 13 只砝码，它们的重量都是整数克重，任取其中 12 只，都可以将其分成重量相等的两组，且每组都有 6 只砝码. 求证：这 13 只砝码重量均相等. [1]

证明　设这 13 只砝码的重量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}(a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{13}>0)$.

用反证法.

假设存在 13 只砝码不全等，且满足题目条件.

由于任取 12 只砝码，其和为偶数，从而，这 13 个数同奇偶.

接下来进行如下操作之一：

(1)若 13 个数都是偶数，则将这 13 个数均除以 2；

(2)若 13 个数都是奇数，则将这 13 个数先加 1 再除以 2.

设进行操作后的数为 $b_1,b_2,\cdots,b_{13}$.

显然，$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_{13}$，且 $b_1<a_1$.

而 $b_1,b_2,\cdots,b_{13}$ 也满足条件，且 b_1 比 a_1 更小，矛盾.

所以，每只砝码重量均相等.

此证法虽与原证法不同，但原理是相同的.

此问题很容易推广到下面的命题.

命题　设有 $2n+1$ 个整数（有理数），任取其中 $2n$ 个都可以将其分成和相等的两组，且每组都有 n 个数. 则这 $2n+1$ 个数都相等.

但当每个数都是实数时，这个方法就失去作用了.

现在来解决这个命题.

证明　设这 $2n+1$ 个数为 $x_0,x_1,\cdots,x_{2n}$.

由题设有下面 $2n+1$ 个方程组成的线性方程组

$$\sum_{j=0}^{2n}a_{ij}x_j=0(i=0,1,\cdots,2n). \qquad (i)$$

其中，$a_{i0}=-1(i\neq0)$，$a_{ii}=0$，$|a_{ij}|=1$ $(i\neq j)$，即系数有 n 个 1，n 个 -1，1 个 0.

该方程组等价于

$$\sum_{j=1}^{2n}a_{ij}x_j=x_0(i=1,2,\cdots,2n).$$

对于给定的 x_0，下面通过一个引理证明该方程组有且仅有一组解.

引理　有 $2n$ 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ 的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{2n}a_{ij}x_j=b_i, \qquad (i)$$

其中，$i=1,2,\cdots,2n$，且 a_{ii} 为偶数，$a_{ij}(i\neq j)$ 为奇数.

则这个方程组有且仅有一组解.

证明　当 $n=1$ 时，易知

$$x_1=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}},x_2=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

是这组方程的唯一解.

假设当 $n=k$ 时，结论成立.

当 $n=k+1$ 时，

$$\sum_{j=1}^{2k+2}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,2k+2). \qquad ①$$

将第 $(2k+2)$、$(2k+1)$ 个方程分别乘 $a_{(2k+1)(2k+2)}$、$a_{(2k+2)(2k+2)}$，再相减得

$$\sum_{j=1}^{2k+1}c_{(2k+2)j}x_j=d_{2k+2}. \qquad ①'$$

收稿日期：2010－11－04

专题写作

一个不等式的推广

陈理安*
（广东省北江中学，512026）

中图分类号：O122.3　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)05－0020－02

题目　设 x_1、x_2、x_3 为正数，且 $x_1x_2x_3=1$. 证明：

$$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)\geqslant 8.$$

此不等式还可得到以下两个推广.

推广1　若 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0\ (n\geqslant 2)$，且 n 是正整数，则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)\geqslant\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+1\right)^n,$$

其中，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 时，上式等号成立.

证明　记 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=S$，且 $\sum\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n}^{k}x_i$ 表示从 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个元素中的所有 k 个不同元素的乘积的和. 易知，和式中共有 C_n^k 项.

如 $\sum\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n}^{2}x_i=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$.

由均值不等式得

$$\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant n}^{n-1}x_i\geqslant \mathrm{C}_n^{n-1}\cdot\sqrt[\mathrm{C}_n^{n-1}]{S^{\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}}}$$

$$=\mathrm{C}_n^1\cdot\sqrt[n]{S^{n-1}}=\mathrm{C}_n^1S^{\frac{n-1}{n}},$$

其中，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{S}$ 时，上式等号成立.

一般地有（对 $1\leqslant k\leqslant n$）

$$\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant n}^{n-1}x_i\geqslant \mathrm{C}_n^{n-k}\cdot\sqrt[\mathrm{C}_n^{n-k}]{S^{\mathrm{C}_{n-1}^{n-k-1}}}$$

$$=\mathrm{C}_n^{n-k}S^{\frac{n-k}{n}}=\mathrm{C}_n^kS^{\frac{n-k}{n}},$$

其中，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{S}$ 时，上式等号成立.

故 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i+1)$

收稿日期：2011－02－08

* 作者系《中等数学》2010年数学奥林匹克等级教练员培训班学员

将第 $(2k+1)$ 个方程和方程①′分别乘 $c_{(2k+2)(2k+1)}$、$a_{(2k+1)(2k+1)}$，再相减得

$$\sum_{j=1}^{2k}c_{(2k+1)j}x_j+c_{(2k+1)(2k+2)}x_{2k+2}=d_{2k+1}.\qquad ②'$$

显然，$c_{(2k+1)j}\equiv a_{(2k+1)j}\pmod 2$，

$c_{(2k+2)j}\equiv a_{(2k+2)j}\pmod 2$.

由 $c_{(2k+1)(2k+2)}c_{(2k+2)(2k+1)}\times$ⓘ－

$c_{(2k+1)(2k+2)}a_{i(2k+1)}\times$①′－

$c_{(2k+2)(2k+1)}a_{i(2k+2)}\times$②′，

得 $$\sum_{j=1}^{2k}c_{ij}x_j=d_i\ (i=1,2,\cdots,2k).$$

显然，$c_{ij}\equiv a_{ij}\pmod 2$.

对于新方程组，其系数 $c_{ij}\ (0<i、j\leqslant 2k)$ 满足 c_{ii} 为偶数，$c_{ij}\ (i\neq j)$ 为奇数这个条件.

因此，由归纳假设知新方程组有唯一解.

由方程①′、②′解出 x_{2k+1}、x_{2k+2}，也是唯一解.

回到原题.

由引理知对于给定的 x_0，方程组有且仅有一组解为 $x_1=x_2=\cdots=x_{2n}=x_0$.

因此，这 $2n+1$ 个数都相等.

命题成立.

参考文献：

[1]　李成章. 世界数学奥林匹克解题大辞典(组合卷)[M]. 石家庄：河北少年儿童出版社，2005.

$$=S+\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant n}^{n-1}x_i+\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant n}^{n-2}x_i+$$

$$\cdots+\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant n}^{2}x_i+\sum_{i=1}^{n}x_i+1$$

$$\geqslant\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cdot S^{\frac{n-k}{n}}$$

$$=(\sqrt[n]{S}+1)^n,$$

其中,当且仅当 $x_1+x_2=\cdots=x_n=\sqrt[n]{S}$ 时,上式等号成立.

此外在推广 1 中,令

$$x_1=\frac{a_1}{b_1},x_2=\frac{a_2}{b_2},\cdots\cdots x_n=\frac{a_n}{b_n}.$$

则 $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}+1\right)\geqslant\left[\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right]^n$,有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)$$

$$\geqslant\left[\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n.$$

故 $\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right]^{\frac{1}{n}}$

$$\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时,上式等号成立.

由此得到推广 2.

推广 2　设 $2n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$. 有

$$\left[\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}},$$

其中,当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时,上式等号成立.

通过以上两个推论可解决下面两个难度较大的题目,且思路非常清晰.

例 1　设 a、b 是正常数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,$n\geqslant2$ 是正整数. 求:

$$y=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}\quad①$$

的最大值.

(1999,波兰数学奥林匹克)

解　注意到

$$y=\frac{\frac{1}{b}}{\left(\frac{a}{x_1}+1\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\cdots\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+1\right)\left(\frac{x_n}{b}+1\right)}.$$

令 $a_1=\frac{a}{x_1}$, $a_2=\frac{x_1}{x_2}$, $\cdots\cdots$ $a_n=\frac{x_{n-1}}{x_n}$, $a_{n+1}=\frac{x_n}{b}$. 则 $a_1a_2\cdots a_{n+1}=\frac{a}{b}$.

由推广 1 知

$$\left(\frac{a}{x_1}+1\right)\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\cdots\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+1\right)\left(\frac{x_n}{b}+1\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n+1}(a_i+1)\geqslant\left(\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}+1\right)^{n+1},$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}=\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$,即

$$\frac{a}{x_1}=\frac{x_1}{x_2}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{b}=\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}},$$

亦即 $x_k=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}$ 时,上式等号成立.

$$\text{故 } y\leqslant\frac{\frac{1}{b}}{\left(\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}+1\right)^{n+1}}=\frac{1}{(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b})^{n+1}}.$$

当且仅当 $x_k=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n+1}}(k=1,2,\cdots,n)$ 时,y 取最大值 $\frac{1}{(\sqrt[n+1]{a}+\sqrt[n+1]{b})^{n+1}}$.

例 2　已知 $2n$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots b_n$,且

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)=10.$$

求 $y=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$ 的最大值.

解　由推论 2 即知

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}$$

$$=\sqrt[n]{10}.$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时,y 取最大值为 $\sqrt[n]{10}$.

一个不等式的简洁证明

陈　翔

（江苏省常州中学，213003）

中图分类号：O122.3　文献标识码：A　文章编号：1005－6416（2011）05－0022－01

近日，笔者拜读了《中等数学》2011年第3期单墫老师的《一个函数的最小值》一文，受益匪浅. 但发现文[1]中对当 $0\leqslant a、b、c\leqslant 1$ 时，

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant\frac{7}{8} \quad ①$$

的证明甚长. 本文给出一个简洁的证明.

事实上，

式①左边

$$=\sum\frac{a}{1+b+c}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\sum a+\frac{1}{2}\sum ab$$

$$=\sum\frac{a}{1+b+c}\left[1-\frac{3}{4}(1+b+c)+\frac{1}{4}(1+b+c)(b+c)\right]+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$=\sum\frac{a}{1+b+c}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{4}(b+c)^2\right]+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$=\sum\frac{a}{1+b+c}\left(\frac{1-b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$=\sum\frac{a}{1+b+c}\left(\frac{\frac{1}{2}-b+\frac{1}{2}-c}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}. \quad ②$$

当 $\frac{1}{2}\geqslant a\geqslant b\geqslant c$ 时，式②$\geqslant\frac{7}{8}$.

当 $a\geqslant\frac{1}{2}\geqslant b\geqslant c$ 时，

$$\text{式②}\geqslant\frac{a}{1+b+c}\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$\geqslant\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$=\frac{1}{2}(1-a)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$\geqslant\frac{7}{8}.$$

当 $a\geqslant b\geqslant\frac{1}{2}\geqslant c$ 时，

$$\text{式②}\geqslant\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}\geqslant\frac{7}{8}.$$

当 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant\frac{1}{2}$ 时，

$$\text{式②}\geqslant\frac{a}{2}\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(c-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$\geqslant\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\right)\left(c-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)+\frac{7}{8}$$

$$=\frac{7}{8}.$$

因此，式①成立.

参考文献：

[1]　单　墫. 一个函数的最小值[J]. 中等数学，2011(3).

收稿日期：2011－03－30

竞赛之窗

2011 年《数学周报》杯全国初中数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)05－0023－06

一、选择题(每小题 7 分，共 35 分)

1. A. 设 $a=\sqrt{7}-1$. 则代数式 $3a^3+12a^2-6a-12$ 的值为(　　).

(A)24　　(B)25

(C)$4\sqrt{7}+10$　　(D)$4\sqrt{7}+12$

1. B. 设 $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$. 则代数式

$x(x+1)(x+2)(x+3)$

的值为(　　).

(A)0　(B)1　(C)-1　(D)2

2. A. 对于任意实数 a、b、c、d，定义有序实数对 (a,b) 与 (c,d) 之间的运算“$\otimes$”为：

$(a,b)\otimes(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$.

若对于任意实数 u、v，都有

$(u,v)\otimes(x,y)=(u,v)$,

则 (x,y) 为(　　).

(A)(0,1)　　(B)(1,0)

(C)(-1,0)　　(D)(0,-1)

2. B. 已知 x、y、z 为实数，且满足

$x+2y-5z=3$，$x-2y-z=-5$.

则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为(　　).

(A)$\frac{1}{11}$　(B)0　(C)5　(D)$\frac{54}{11}$

3. A. 若 $x>1$，$y>0$，且满足

$xy=x^y$，$\frac{x}{y}=x^{3y}$，

则 $x+y$ 的值为(　　).

(A)1　(B)2　(C)$\frac{9}{2}$　(D)$\frac{11}{2}$

3. B. 已知 $\angle A$、$\angle B$ 是两个锐角，且满足

$\sin^2 A+\cos^2 B=\frac{5}{4}t$，

$\cos^2 A+\sin^2 B=\frac{3}{4}t^2$.

则实数 t 所有可能值的和为(　　).

(A)$-\frac{8}{3}$　(B)$-\frac{5}{3}$　(C)1　(D)$\frac{11}{3}$

4. A. 已知点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，BE 与 CD 交于点 F，设

$S_{四边形EADF}=S_1$，$S_{\triangle BDF}=S_2$，

$S_{\triangle BCF}=S_3$，$S_{\triangle CEF}=S_4$.

则 S_1S_3 与 S_2S_4 的大小关系为(　　).

(A)$S_1S_3<S_2S_4$　　(B)$S_1S_3=S_2S_4$

(C)$S_1S_3>S_2S_4$　　(D)不能确定

4. B. 已知正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 满足

$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{10}$，

且其中任意三个数都不能成为三角形的三边长. 则 $\frac{a_{10}}{a_1}$ 的最小值是(　　).

(A)34　(B)55　(C)89　(D)144

5. A. 设 $S=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{99^3}$. 则 $4S$ 的整数部分等于(　　).

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

5. B. 设 $S=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2\,011^3}$. 则 $4S$ 的整数部分等于(　　).

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7

二、填空题(每小题 7 分，共 35 分)

6. A. 若关于 x 的方程

$(x-2)(x^2-4x+m)=0$

有三个根，且这三个根恰好可以作为一个三角形的三边长，则 m 的取值范围是______.

6. B. 已知两条直角边长分别是整数 a、b ($b<2\,011$). 则斜边长是 $b+1$ 的直角三角形的个数为______.

7. A. 一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上的数字分别是 1、2、2、3、3、4；另一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上的数字分别是 1、3、4、5、6、8. 同时掷这两枚骰子，则其

朝上的面两数字之和为5的概率是______.

7. B. 一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上的数字分别是1、2、2、3、3、4;另一枚质地均匀的正方体骰子的六个面上的数字分别是1、3、4、5、6、8. 同时掷这两枚骰子,则其朝上的面两数字之和为7的概率是______.

8. A. 如图1,已知点 A、B 在直线 $y=x$ 上,过 A、B 分别作 y 轴的平行线交双曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 于点 C、D. 若 $BD=2AC$,则 $4OC^2-OD^2$ 的值为______.

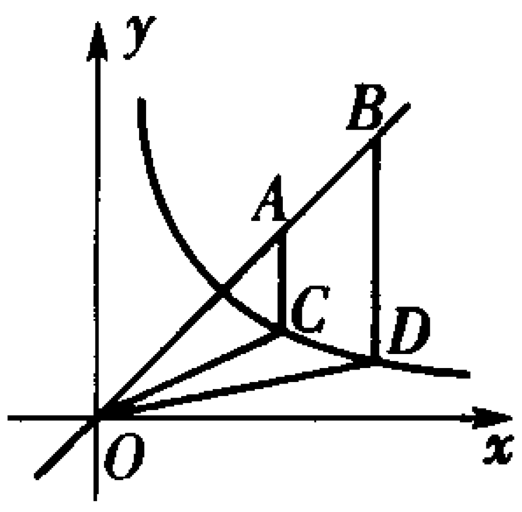

图1

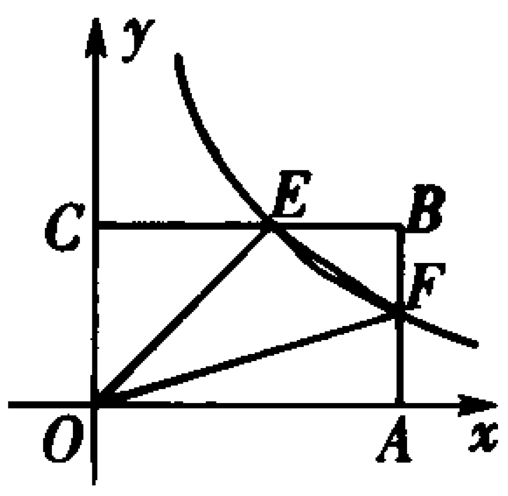

图2

8. B. 如图2,已知双曲线 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 与矩形 $OABC$ 的边 CB、BA 分别交于点 E、F,且 $AF=BF$,联结 EF. 则△OEF 的面积为______.

9. A. 若 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ 的最大值为 a,最小值为 b. 则 a^2+b^2 的值为______.

9. B. 已知⊙O 的三个不同的内接正三角形将⊙O 分成区域的个数为______.

10. A. 如图3,已知在 Rt△ABC 中,斜边 AB 的长为35,正方形 $CDEF$ 内接于△ABC,且其边长为12. 则△ABC 的周长为________.

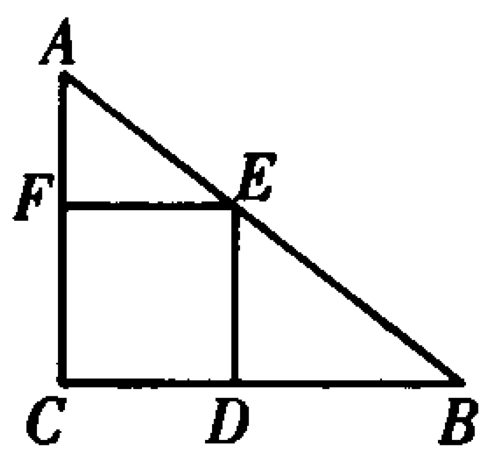

图3

10. B. 设四位数 $\overline{abcd}$ 满足

$$a^3+b^3+c^3+d^3+1=10c+d.$$

则这样的四位数的个数为______.

三、解答题(每小题20分,共80分)

11. A. 已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+cx+a=0$$

的两个整数根恰好比方程

$$x^2+ax+b=0$$

的两个根都大1. 求 $a+b+c$ 的值.

11. B. 已知对任意的实数 x,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 满足

$$x^2+2x+2\leqslant y\leqslant 2x^2+4x+3,$$

且当 $x=9$ 时,$y=121$. 求 $a+b+c$ 的值.

12. A. 如图4,已知点 H 为△ABC 的垂心,以 AB 为直径的⊙O_1 与△BCH 的外接圆⊙O_2 交于点 D,延长 AD 与 CH 交于点 P. 求证:P 为 CH 的中点.

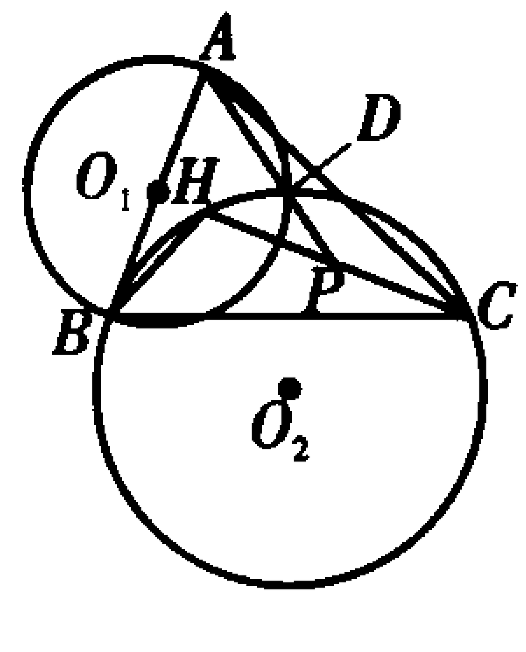

图4

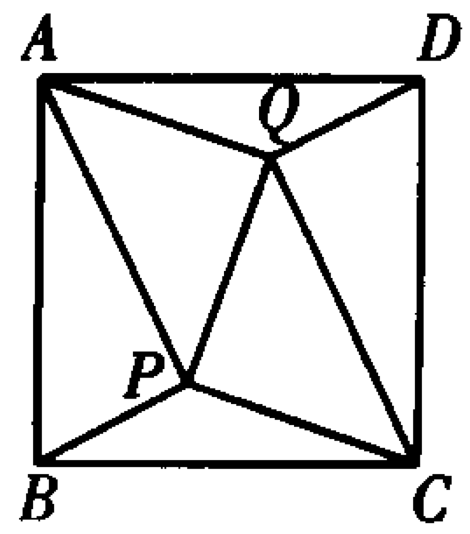

图5

12. B. 如图5,已知正方形 $ABCD$ 的边长为1,P、Q 是其内两点,且

$$\angle PAQ=\angle PCQ=45^\circ.$$

求 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle QAD}$ 的值.

13. A. 如图6,已知 A 为 y 轴正半轴上一点,点 A、B 关于 x 轴对称,过 A 任作直线与抛物线 $y=\frac{2}{3}x^2$ 交于 P、Q 两点.

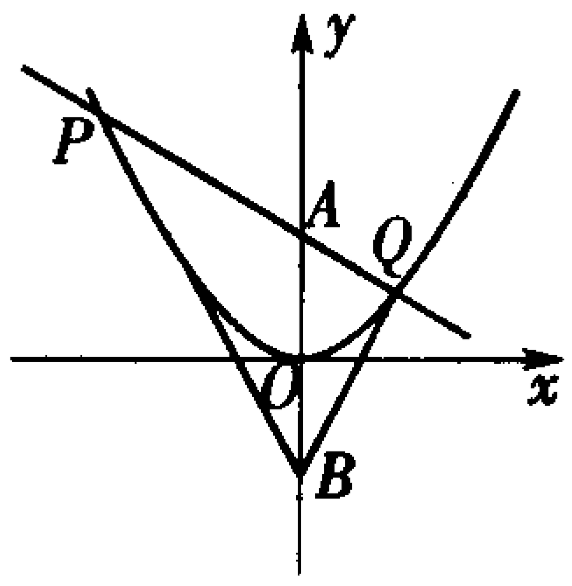

图6

(1)求证:

$\angle ABP=\angle ABQ$;

(2)若点 $A(0,1)$,且 $\angle PBQ=60^\circ$,试求所有满足条件的直线 PQ 的解析式.

13. B. 若从 $1,2,\cdots,n$ 中任取五个两两互质的不同的整数 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5,且其中总有一个整数是质数,求 n 的最大值.

14. A. 如图7,在△ABC 中,已知 $\angle BAC=60^\circ$,$AB=2AC$,点 P 在△ABC 内,且 $PA=\sqrt{3}$,$PB=5$,$PC=2$. 求△ABC 的

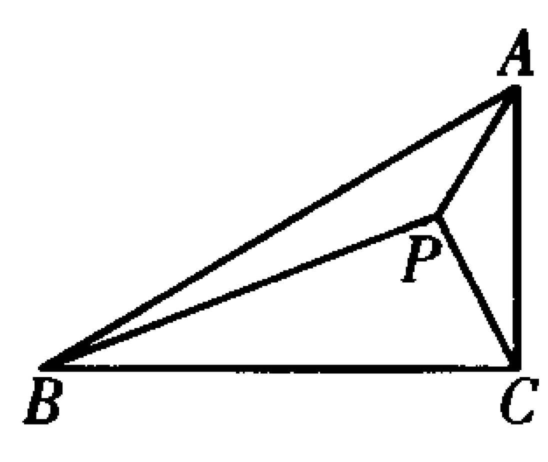

图7

面积.

14. B. 已知 $a_i>0(i=1,2,\cdots,2\,011)$,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{2\,011}$.

证明:$a_1,a_2,\cdots,a_{2\,011}$ 中一定存在两个数 a_i、$a_j(i<j)$,使得

$$a_j-a_i<\frac{(1+a_i)(1+a_j)}{2\,010}.$$

参考答案

一、**1. A.** A.

注意到

$a=\sqrt{7}-1\Rightarrow a^2+2a-6=0$.

则 $3a^3+12a^2-6a-12$

$=(a^2+2a-6)(3a+6)+24=24$.

1. B. C.

由已知得 $x^2+3x+1=0$. 于是,

$x(x+1)(x+2)(x+3)$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$=(x^2+3x+1)^2-1=-1$.

2. A. B.

依定义的运算法则有

$$\begin{cases}ux+vy=u,\\vx+uy=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(x-1)+vy=0,\\v(x-1)+uy=0\end{cases}$$

对任何实数 u、v 都成立.

由实数 u、v 的任意性得 $(x,y)=(1,0)$.

2. B. D.

由已知可得 $\begin{cases}x=3z-1,\\y=z+2.\end{cases}$

于是,$x^2+y^2+z^2=11z^2-2z+5$.

故当 $z=\frac{1}{11}$ 时,$x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 $\frac{54}{11}$.

3. A. C.

题设两式相乘得

$x^2=x^{4y}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$.

进而,$x=4$.

因此,$x+y=\frac{9}{2}$.

3. B. C.

题设两式相加得 $3t^2+5t=8$.

解得 $t=1,t=-\frac{8}{3}$(舍去).

当 $t=1$ 时,$\angle A=45°$,$\angle B=30°$ 满足题设等式.

因此,实数 t 的所有可能值的和为 1.

4. A. C.

如图 8,联结 DE.

设 $S_{\triangle DEF}=S_1'$. 则

$$\frac{S_1'}{S_2}=\frac{EF}{BF}=\frac{S_4}{S_3}.$$

故 $S_1'S_3=S_2S_4$.

因为 $S_1>S_1'$,所以,

$S_1S_3>S_2S_4$.

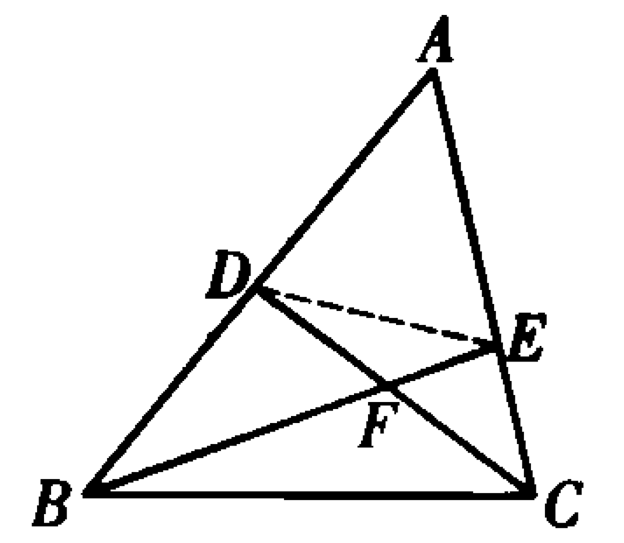

图 8

4. B. B.

注意到

$a_{10}\geqslant a_9+a_8\geqslant 2a_8+a_7\geqslant 3a_7+2a_6$

$\geqslant 5a_6+3a_5\geqslant 8a_5+5a_4\geqslant\cdots$

$\geqslant 34a_2+21a_1\geqslant 55a_1$.

故 $\frac{a_{10}}{a_1}\geqslant 55$.

当 $a_1=a_2,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(1\leqslant n\leqslant 8)$ 时,等号成立.

所以,$\frac{a_{10}}{a_1}$ 的最小值是 55.

5. A. A.

当 $k=2,3,\cdots,99$ 时,由

$$\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k(k^2-1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right],$$

则 $1<S=1+\sum_{k=2}^{99}\frac{1}{k^3}$

$<1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{99\times 100}\right)<\frac{5}{4}$.

于是,$4<4S<5$.

故 $4S$ 的整数部分等于 4.

5. B. A.

同上知 $4S$ 的整数部分等于 4.

二、**6. A.** $3<m\leqslant 4$.

易知,$x=2$ 是方程的一个根.

设方程另两个根为 x_1、$x_2(x_1\geqslant x_2>0)$. 则 $x_1+x_2=4,x_1x_2=m$.

由题设知

$0\leqslant x_1-x_2<2\Rightarrow 0\leqslant 16-4m<4$

$\Rightarrow 3<m\leqslant 4$.

6. B. 31.

由勾股定理得

$a^2=(b+1)^2-b^2=2b+1.$

由 $b<2\ 011$,知 a 是 $(1,\sqrt{4\ 023})$ 内的奇数,故 a 一定是 $3,5,\cdots,63$.

因此,满足条件的直角三角形有 31 个.

7. A. $\frac{1}{9}$.

在 36 对可能出现的结果中有 4 对

$(1,4)$、$(2,3)$、$(2,3)$、$(4,1)$

的和为 5. 于是,朝上的面两数字之和为 5 的概率是 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

7. B. $\frac{1}{6}$.

同上知,朝上的面两数字之和为 7 的概率是 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

8. A. 6.

设点 $C(a,b)$、$D(c,d)$.

则点 $A(a,a)$、$B(c,c)$.

因为点 C、D 在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,所以,

$ab=1,cd=1.$

由 $BD=2AC$

$\Rightarrow |c-d|=2|a-b|$

$\Rightarrow c^2-2cd+d^2=4(a^2-2ab+b^2)$

$\Rightarrow 4(a^2+b^2)-(c^2+d^2)=8ab-2cd=6$

$\Rightarrow 4OC^2-OD^2=6.$

8. B. $\frac{3}{2}$.

设点 $B(a,b)$. 则点 $F\left(a,\frac{b}{2}\right)$、$E\left(\frac{2}{b},b\right)$.

因点 F 在双曲线 $y=\frac{2}{x}$ 上,所以,$ab=4$.

故 $S_{\triangle OEF}=S_{梯形OFBC}-S_{\triangle OEC}-S_{\triangle FBE}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}+b\right)a-\frac{1}{2}b\times\frac{2}{b}-\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\left(a-\frac{2}{b}\right)$

$=\frac{1}{2}(ab+1-2)=\frac{3}{2}$.

9. A. $\frac{3}{2}$.

由 $1-x\geqslant0$,且 $x-\frac{1}{2}\geqslant0$,得

$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$.

则 $y^2=\frac{1}{2}+2\sqrt{-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}+2\sqrt{-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{16}}$.

因为 $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<1$,所以,

当 $x=\frac{3}{4}$ 时,y^2 取最大值 1,故 $a=1$;

当 $x=\frac{1}{2}$ 或 1 时,y^2 取最小值 $\frac{1}{2}$,故 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此,$a^2+b^2=\frac{3}{2}$.

9. B. 28.

不妨设⊙O 的半径为 1. 则以点 O 为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的圆是⊙O 的内接正三角形的内切圆.

因为过内切圆外一点只能作这个内切圆的两条切线,所以,⊙O 的三个不同的内接正三角形中没有三条边交于一点.

于是,区域的个数为 28.

10. A. 84.

设 $BC=a,AC=b$. 则

$a^2+b^2=35^2=1\ 225.$　①

因为 $\mathrm{Rt}\triangle AFE\backsim\mathrm{Rt}\triangle ACB$,所以,

$\frac{FE}{CB}=\frac{AF}{AC}\Rightarrow\frac{12}{a}=\frac{b-12}{b}$.

则 $12(a+b)=ab.$　②

由式①、②得

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$=1\ 225+24(a+b).$

解得 $a+b=-25$(舍去),49.

故 $a+b+c=49+35=84.$

10. B. 5.

由 $d^3\geqslant d$ 知

$c^3+1\leqslant10c\Rightarrow1\leqslant c\leqslant3.$

若 $c=3$,则 $a^3+b^3+d^3=2+d$.

故 $d=1$ 或 0. 于是,$a=b=1$,即 1 131、1 130

满足条件.

若 $c=2$,则 $a^3+b^3+d^3=11+d$. 故 $d\leqslant 2$.

当 $d=2$ 时,$a^3+b^3=5$,无解;

当 $d=1$ 或 0 时,$a^3+b^3=11$,无解.

若 $c=1$,则 $a^3+b^3+d^3=8+d$. 故 $d\leqslant 2$.

当 $d=2$ 时,$a=b=1$,即 1 112 满足条件;

当 $d=1$ 或 0 时,$a=2,b=0$,即 2 011、2 010 满足条件.

综上,满足条件的四位数有 5 个.

三、11. A. 设方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根为 α、β(α、β 为整数,且 $\alpha\leqslant\beta$). 则方程 $x^2+cx+a=0$ 的两根为 $\alpha+1$、$\beta+1$. 由题意得

$\alpha+\beta=-a,(\alpha+1)(\beta+1)=a.$

两式相加得 $\alpha\beta+2\alpha+2\beta+1=0$,即

$(\alpha+2)(\beta+2)=3.$

所以,$(\alpha+2,\beta+2)=(1,3)$或$(-3,-1)$.

解得$(\alpha,\beta)=(-1,1)$或$(-5,-3)$.

故 $a+b+c$

$=-(\alpha+\beta)+\alpha\beta-[(\alpha+1)+(\beta+1)]$

$=-3$ 或 29.

11. B. 由题设知

$(x+1)^2+1\leqslant y\leqslant 2(x+1)^2+1.$

则 $y=a(x+1)^2+1(1\leqslant a\leqslant 2)$.

由 $x=9$ 时,$y=121$,得

$100a+1=121\Rightarrow a=\frac{6}{5}.$

则 $y=\frac{6}{5}(x+1)^2+1=\frac{6}{5}x^2+\frac{12}{5}x+\frac{11}{5}.$

故 $a+b+c=\frac{29}{5}.$

12. A. 如图 9,延长 AP 与$\odot O_2$交于点 Q,联结 AH、BD、QB、QC、QH.

由 AB 是$\odot O_1$的直径知

$\angle ADB=\angle BDQ=90°$.

故 BQ 是$\odot O_2$的直径.

于是,$CQ\perp BC,BH\perp HQ$.

由 H 为$\triangle ABC$ 的垂心知

$AH\perp BC,BH\perp AC$.

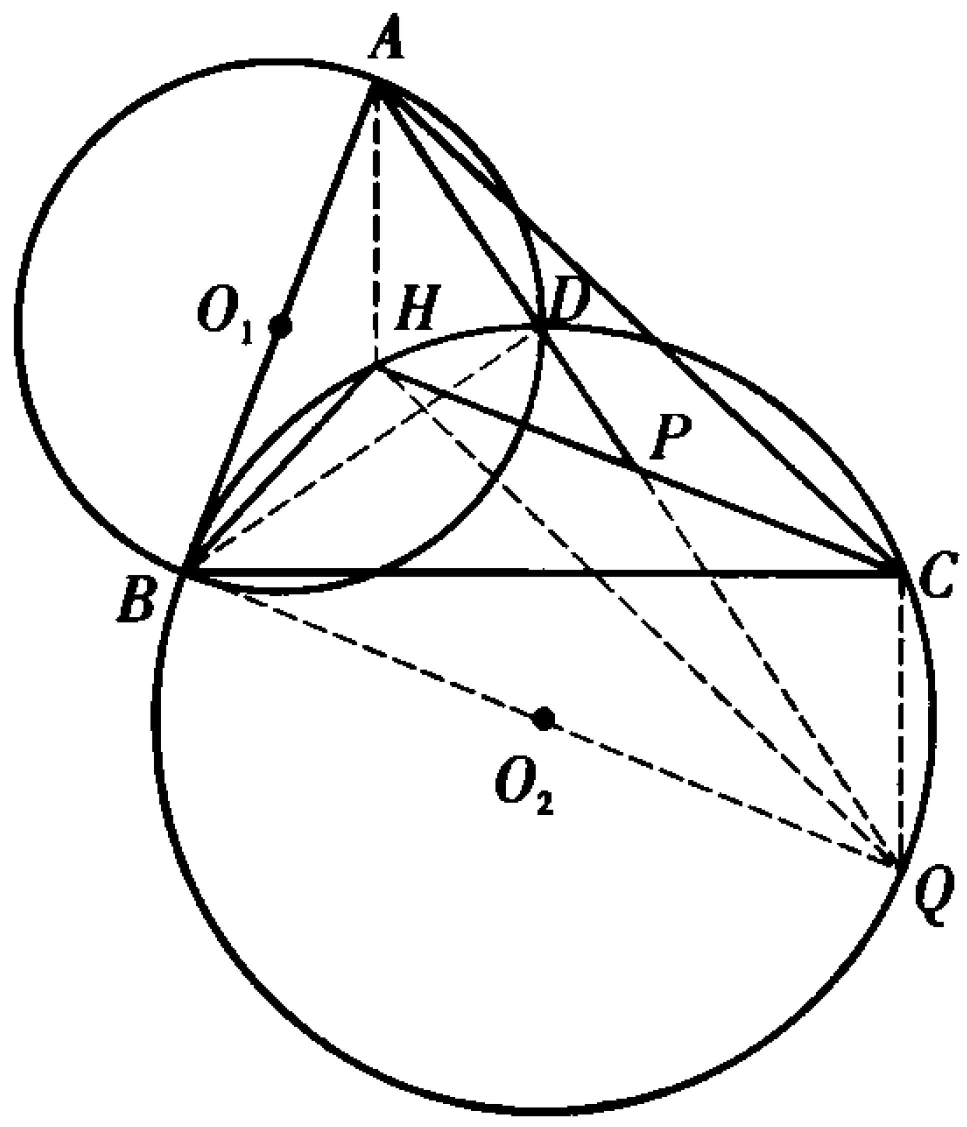

图 9

所以,$AH/\!/CQ,AC/\!/HQ$.

故四边形 $ACQH$ 为平行四边形.

因此,P 为 CH 的中点.

12. B. 如图 10,将$\triangle AQD$ 绕点 A 顺时针旋转 90°至$\triangle AQ'B$,$\triangle CQD$ 绕点 C 逆时针旋转 90°至$\triangle CQ''B$,联结 PQ'、PQ''. 则

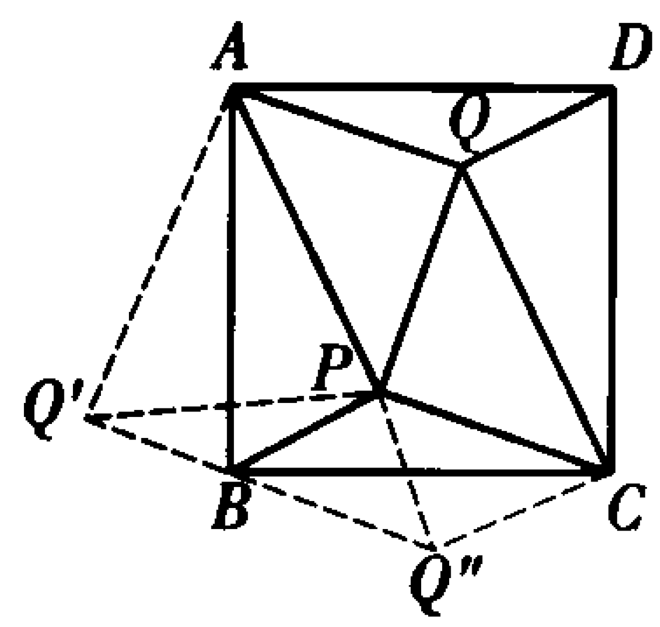

图 10

$\triangle APQ'\cong\triangle APQ$,

$\triangle CPQ''\cong\triangle CPQ$.

由$\angle ABQ'+\angle CBQ''$

$=\angle ADQ+\angle CDQ=90°$,

知 Q'、B、Q'' 三点共线,且 $BQ'=DQ=BQ''$.

则 $S_{\triangle PBQ'}=S_{\triangle PBQ''}$.

故 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCQ}+S_{\triangle QAD}$

$=S_{\triangle PAQ}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle QCD}$

$=\frac{1}{2}S_{\text{正方形}ABCD}=\frac{1}{2}.$

13. A. (1) 分别过点 P、Q 作 y 轴的垂线,垂足分别为 C、D.

设点 $A(0,t)$. 则点 $B(0,-t)$.

设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+t$,并设 $P(x_P,y_P)$、$Q(x_Q,y_Q)(x_p<0<x_Q)$.

由$\begin{cases}y=kx+t,\\ y=\frac{2}{3}x^2,\end{cases}$ 得$\frac{2}{3}x^2-kx-t=0.$

于是，$x_P x_Q = -\frac{3}{2}t \Rightarrow t = -\frac{2}{3}x_P x_Q$.

则$\frac{BC}{BD} = \frac{y_P + t}{y_Q + t} = \frac{\frac{2}{3}x_P^2 + t}{\frac{2}{3}x_Q^2 + t}$

$= \frac{\frac{2}{3}x_P^2 - \frac{2}{3}x_P x_Q}{\frac{2}{3}x_Q^2 - \frac{2}{3}x_P x_Q} = -\frac{x_P}{x_Q}$.

因为$\frac{PC}{QD} = -\frac{x_P}{x_Q}$，所以，$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{QD}$.

故 $\mathrm{Rt}\triangle BCP \backsim \mathrm{Rt}\triangle BDQ$.

因此，$\angle ABP = \angle ABQ$.

(2)设直线 PQ 的解析式为 $y = kx + 1$.

由(1)知$\angle ABP = \angle ABQ = 30°$.

所以，$BQ = 2DQ$.

故 $2x_Q = \sqrt{x_Q^2 + (y_Q + 1)^2}$.

将 $y_Q = \frac{2}{3}x_Q^2$ 代入上式，平方并整理得

$4x_Q^4 - 15x_Q^2 + 9 = 0$.

解得 $x_Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$或 $\sqrt{3}$.

又由(1)得

$x_P x_Q = -\frac{3}{2}t = -\frac{3}{2}, x_P + x_Q = \frac{3}{2}k$.

若 $x_Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $x_P = -\sqrt{3}$. 从而，

$k = \frac{2}{3}(x_P + x_Q) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同理，若 $x_Q = \sqrt{3}$，则 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 PQ 的解析式为

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 或 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

13. B. 当 $n \geqslant 49$ 时，取整数 $1、2^2、3^2、5^2、7^2$，这五个整数是五个两两互质不同的整数，但没有一个是质数.

当 $n = 48$ 时，在 $1,2,\cdots,48$ 中任取五个两两互质不同的整数 $a_1、a_2、a_3、a_4、a_5$. 若 $a_1、a_2、a_3、a_4、a_5$ 都不是质数，则 $a_1、a_2、a_3、a_4、a_5$ 中至少有四个数是合数(设为 $a_1、a_2、a_3、a_4$).

设 $a_1、a_2、a_3、a_4$ 的最小的质因数分别为 $p_1、p_2、p_3、p_4$.

因为 $a_1、a_2、a_3、a_4$ 两两互质，所以，$p_1、p_2、p_3、p_4$ 两两不同.

设 p 是 $p_1、p_2、p_3、p_4$ 中的最大数. 则 $p \geqslant 7$.

因 $a_1、a_2、a_3、a_4$ 为合数，所以，$a_1、a_2、a_3、a_4$ 中一定存在一个 $a_i \geqslant p^2 \geqslant 7^2 = 49$，矛盾.

于是，$a_1、a_2、a_3、a_4、a_5$ 中一定有一个是质数.

综上，正整数 n 的最大值为 48.

14. A. 如图 11，作 $\triangle ABQ$ 使得

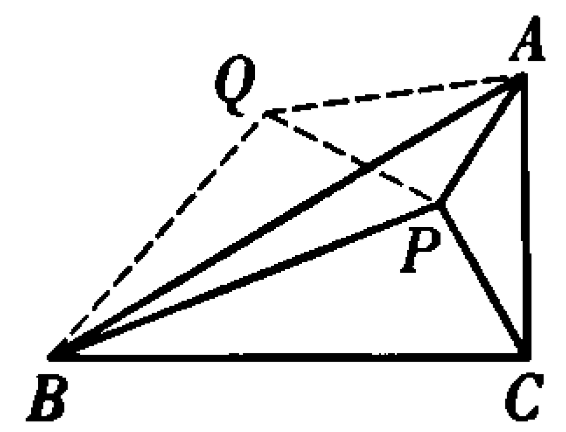

图 11

$\angle QAB = \angle PAC$，

$\angle ABP = \angle ACP$.

则$\triangle ABQ \backsim \triangle ACP$.

由于 $AB = 2AC$，故相似比为 2.

于是，$AQ = 2AP = 2\sqrt{3}$，$BQ = 2CP = 4$.

则$\angle QAP = \angle QAB + \angle BAP$

$= \angle PAC + \angle BAP = \angle BAC = 60°$.

由 $AQ : AP = 2 : 1$，知$\angle APQ = 90°$.

于是，$PQ = \sqrt{3}AP = 3$.

所以，$BP^2 = 25 = BQ^2 + PQ^2$.

从而，$\angle BQP = 90°$.

则 $AB^2 = PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$.

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}AB^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}$.

14. B. 令 $x_i = \frac{2\,010}{1 + a_i}(i = 1,2,\cdots,2\,011)$.

则 $0 < x_{2\,011} < x_{2\,010} < \cdots < x_1 < 2\,010$.

故一定存在 $1 \leqslant k \leqslant 2\,010$，使得

$x_k - x_{k+1} < 1$，

即 $\frac{2\,010}{1 + a_k} - \frac{2\,010}{1 + a_{k+1}} < 1$.

从而，$a_{k+1} - a_k < \frac{(1 + a_k)(1 + a_{k+1})}{2\,010}$.

(刘金英　提供)

2010 年新知杯上海市高中数学竞赛

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)05－0029－03

【说明】解答本试题不得使用计算器.

一、填空题(前 4 小题每题 7 分,后 4 小题每题 8 分,共 60 分)

1. 函数 $y=\arccos\left(\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\right)$ 的定义域是______,值域是______.

2. 若 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使等式

$$\sum_{k=1}^{n}|\lg x_k|+\sum_{k=1}^{n}\left|\lg\frac{1}{x_k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\lg x_k\right|$$

成立,则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值分别是______.

3. 平面直角坐标系内有 $\triangle ABC$,顶点为 $A(3,0)$、$B(0,2)$、$C(0,-1)$,两平行直线 $x=t$,$x=\frac{t}{2}(0<t\leqslant3)$ 之间与 $\triangle ABC$ 公共部分的面积记为 $S(t)$. 则当 t 变化时,$S(t)$ 的最大值是______.

4. 设甲袋中有 4 只白球、5 只红球、6 只黑球;乙袋中有 7 只白球、6 只红球、2 只黑球. 若从两袋中各取一球,则两球颜色不同的概率是______(用最简分数作答).

5. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两个焦点,M 是该双曲线右支上的点,O 为坐标原点. 若 $\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}=\sqrt{6}$,则点 M 的坐标为______.

6. 满足

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N})$$

的 $2n-1$ 位十进制正整数

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$$

共有______个(用数值作答).

7. 设 $f(x)$ 是整系数多项式,$f(0)=11$,又存在 n 个不同整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=2\,010.$$

则 n 的最大值是______.

8. 如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=5$,$BC=8$,$AC=7$,动点 P、Q 分别在边 AB、AC 上,使 $\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切. 则线段 PQ 长的最小值为______.

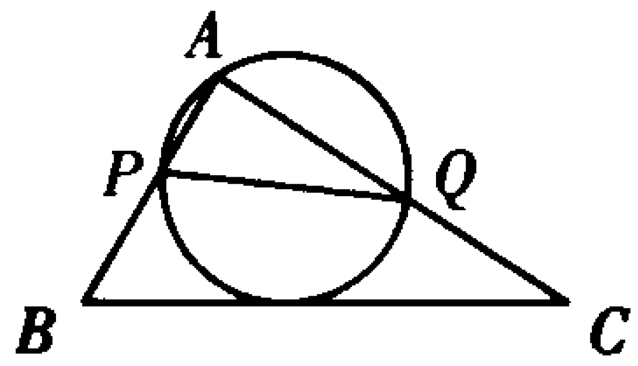

图 1

二、解答题(共 60 分)

9. (14 分)如图 2,走廊宽为 3 m,夹角为 $120°$,地面是水平的,走廊两端足够长. 问:保持水平位置通过走廊的木棒(不计粗细)的最大长度是多少?

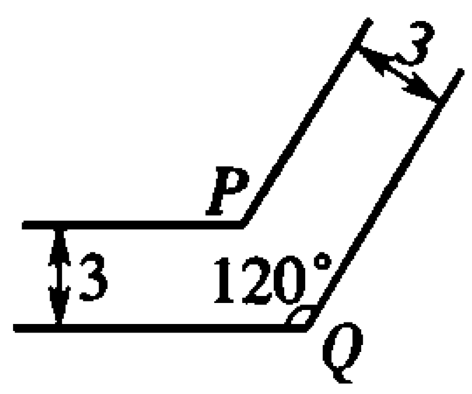

图 2

10. (14 分)已知由 $1,2,\cdots,1\,000$ 这 $1\,000$ 个正整数构成的集合 A,先从集合 A 中随机取一个数 a,取出后把 a 放回集合 A;然后再从集合 A 中随机取一个数 b. 求 $\frac{a}{b}>\frac{1}{3}$ 的概率.

11. (16 分)(1)设 x_1、x_2、$x_3\in\mathbf{R}$. 求证:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geqslant\sqrt{2}(x_1x_2+x_2x_3),$$

并说明等号成立的条件;

(2)若实数 a 使得对于任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4,不等式

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$$

都成立,求 a 的最大值.

12. (16 分)已知正整数 n 满足如下条件:对开区间 $(0,2\,009)$ 内的每个正整数 m,总存在正整数 k,使得

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}.$$

求这种 n 的最小值.

参考答案

一、1. $[-2,6]$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

由 $12+4x-x^2\geqslant0$，得 $-2\leqslant x\leqslant6$. 此时，

$0\leqslant\sqrt{12+4x-x^2}=\sqrt{-(x-2)^2+16}\leqslant4$

$\Rightarrow-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{12+4x-x^2}-2}{4}\leqslant\frac{1}{2}$.

故所求的定义域为 $[-2,6]$，值域为 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$.

2. $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

原等式即

$2\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|=|\sum\limits_{k=1}^{n}\lg x_k|$

$\Rightarrow2\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|$

$\Rightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}|\lg x_k|\leqslant0$.

故 $|\lg x_k|=0(1\leqslant k\leqslant n)$，$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

反之，当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，已知等式显然成立.

3. $\frac{3}{2}$.

注意到

$l_{AB}:\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1(0\leqslant x\leqslant3)$，

$l_{AC}:\frac{x}{3}-y=1(0\leqslant x\leqslant3)$.

如图 3，设直线 $x=t$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 F、E；直线 $x=\frac{t}{2}$ 与线段 AB、AC 的交点分别为 G、H. 则

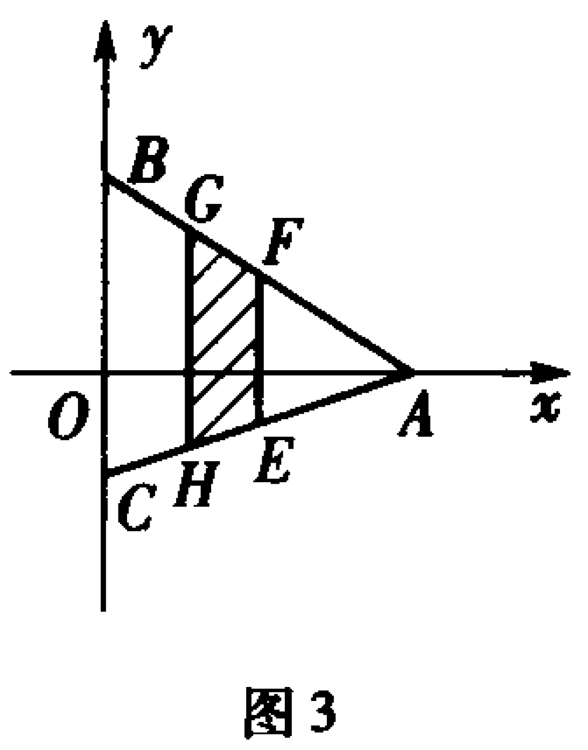

图3

$y_F=2-\frac{2t}{3}$，

$y_E=\frac{t}{3}-1$，$y_G=2-\frac{t}{3}$，$y_H=\frac{t}{6}-1$.

注意到

$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\left\{\left[\left(2-\frac{2t}{3}\right)-\left(\frac{t}{3}-1\right)\right]+\right.$

$\left.\left[\left(2-\frac{t}{3}\right)-\left(\frac{t}{6}-1\right)\right]\right\}$

$=-\frac{3}{8}(t^2-4t)=-\frac{3}{8}(t-2)^2+\frac{3}{2}$.

故当 $t=2$ 时，$S(t)_{\max}=\frac{3}{2}$.

4. $\frac{31}{45}$.

两球颜色相同的概率为

$P=\frac{4\times7+5\times6+6\times2}{15\times15}=\frac{14}{45}$，

故两球颜色不同的概率为 $1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$.

5. 设 $M(x,y)(x\geqslant1)$. 易知，双曲线的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$、$F_2(\sqrt{2},0)$. 则

$|MF_1|=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+y^2}$，

$|MF_2|=\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+y^2}$，

$|MO|=\sqrt{x^2+y^2}$.

故 $\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{|MO|}\right)^2$

$=\frac{(x+\sqrt{2})^2+y^2+(x-\sqrt{2})^2+y^2+2\sqrt{(x^2+y^2+2)^2-8x^2}}{x^2+y^2}$

$=\frac{4x^2+2+2\sqrt{4x^4-4x^2+1}}{2x^2-1}=\frac{8x^2}{2x^2-1}$.

解方程 $\frac{8x^2}{2x^2-1}=6(x\geqslant1)$，得 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

进而，$y^2=x^2-1=\frac{1}{2}$.

故 $M\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6. 502.

显然，$n\leqslant9$，且满足条件的数是 $2n-1$ 位正整数，有 C_9^n 种取法.

故这类整数的个数是

$\sum\limits_{n=2}^{9}C_9^n=\sum\limits_{n=0}^{9}C_9^n-(C_9^0+C_9^1)$

$=512-(1+9)=502$.

7. 3.

记 $g(x)=f(x)-2\,010$. 则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是 $g(x)=0$ 的根.

故 $g(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot q(x)$，

其中，$q(x)$为整系数多项式. 于是，

$$g(0)=11-2\,010=-1\,999$$
$$=\prod_{i=1}^{n}(-x_i)q(0).$$

因 1 999 是质数，$-1\,999$ 至多是三个不同整数之积，即 $-1\times1\times1\,999$，故 $n\leqslant3$.

当 $n=3$ 时，

$$g(x)=(x+1)(x-1)(x+1\,999),$$
$$f(x)=(x+1)(x-1)(x+1\,999)+2\,010.$$

8. $\frac{30}{7}$.

因为$\triangle ABC$ 三边长已知，所以，$\triangle ABC$ 的三内角为定值.

由$\frac{PQ}{\sin A}=2R$(R 为$\triangle APQ$ 外接圆半径)，

得 $PQ=2R\sin A$.

欲使 PQ 最小，当且仅当 R 最小.

又因$\triangle APQ$ 的外接圆与 BC 相切，所以，当边 BC 上的高 AH 为$\triangle APQ$ 外接圆直径时 R 最小.

注意到

$$\cos A=\frac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\frac{1}{7},$$
$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

而 $AH\times8=5\times7\sin A\Rightarrow AH=\frac{35}{8}\sin A$.

故 $PQ_{\min}=AH\sin A=\frac{35}{8}\sin^2A=\frac{30}{7}$.

二、**9.** 如图 4，过走廊转角内顶点 P 任作水平直线与走廊外侧交于点 A、B. 则在水平位置通过走廊的木棒长度小于或等于 AB.

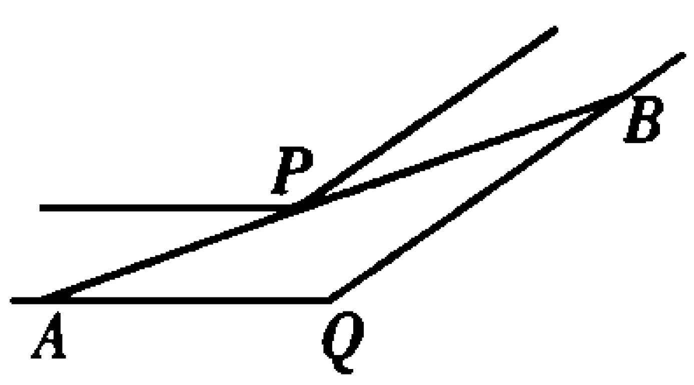

图 4

设$\angle BAQ=\alpha$. 则

$$\angle ABQ=60^\circ-\alpha,$$
$$AB=AP+PB=\frac{3}{\sin\alpha}+\frac{3}{\sin(60^\circ-\alpha)}.$$

当 α 变化时，上式的最小值即是在水平位置通过走廊的木棒的最大长度.

由平均不等式及积化和差得

$$AB\geqslant6\sqrt{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}}$$
$$=6\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}[\cos(2\alpha-60^\circ)-\cos60^\circ]}}$$
$$\geqslant6\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{2}}}=12,$$

且当 $\alpha=30^\circ$时，$AB=12$.

故在水平位置能通过走廊的木棒的最大长度是 12 m.

10. 解法 1 注意到

$$P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right).$$

由$\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow a\leqslant\frac{1}{3}b\Leftrightarrow a\leqslant\left[\frac{1}{3}b\right]$.

则 $P\left(\frac{a}{b}\leqslant\frac{1}{3}\right)=\frac{\sum\limits_{b=1}^{1\,000}\left[\frac{1}{3}b\right]}{1\,000^2}$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{332}3k+333+333}{1\,000^2}=\frac{333}{2\,000}.$$

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)=1-\frac{333}{2\,000}=\frac{1\,667}{2\,000}$.

解法 2 当 $a=1$ 时，$b=1$ 或 2，有 2 种取法；

当 $a=2$ 时，b 的取值增加 3、4、5，有 $2+3$ 种取法；

当 $a=3$ 时，b 的取值增加 6、7、8，有 $2+2\times3$ 种取法；

……

当 $a=333$ 时，b 有 $2+332\times3$ 种取法；

当 $334\leqslant a\leqslant1\,000$ 时，b 都有 1 000 种取法.

故 $P\left(\frac{a}{b}>\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{2+(2+3)+(2+2\times3)+\cdots+(2+332\times3)+667\times1\,000}{1\,000^2}$$
$$=\frac{333(2+166\times3)+667\times1\,000}{1\,000^2}$$
$$=\frac{1\,667}{2\,000}.$$

11. (1) 注意到

2010年全国高中数学联赛甘肃省预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)05-0032-03

一、填空题(每小题7分,共56分)

1. 设 $k_1<k_2<\cdots<k_n$ 是非负整数,满足

$2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}=227$.

则 $k_1+k_2+\cdots+k_n=$______.

2. 已知 $a>0$,函数 $f(x)=|x+2a|$ 和 $g(x)=|x-a|$ 的图像交于点 C,且它们分别与 y 轴交于点 A、B. 若△ABC 的面积是1,则 $a=$______.

3. 已知 S_n 是公差为正数 q 的等差数列的前 n 项之和. 若 $\frac{S_n+210}{n}$ 在 $n=6$ 时取到最小值,则 q 的取值范围是______.

4. 已知函数 $y=x^3$ 在 $x=a_k$ 的切线与 x 轴交于点 a_{k+1}. 若 $a_1=1$,$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{2}\right)+\left(\frac{x_2^2}{2}+x_3^2\right)$$

$$\geqslant\frac{2}{\sqrt{2}}x_1x_2+\frac{2}{\sqrt{2}}x_2x_3=\sqrt{2}(x_1x_2+x_2x_3).$$

当且仅当 $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_2=x_3$ 时,等号成立.

(2)设 $k(0<k<1)$ 为待定常数. 则

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

$$=(x_1^2+kx_2^2)+(1-k)(x_2^2+x_3^2)+(kx_3^2+x_4)$$

$$\geqslant 2\sqrt{k}x_1x_2+2(1-k)x_2x_3+2\sqrt{k}x_3x_4.$$

令 $\sqrt{k}=1-k$. 解得 $k=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

从而, $\sqrt{k}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geqslant(\sqrt{5}-1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$ 对任意实数 x_1、x_2、x_3、x_4 都成立.

另一方面,取

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=x_4,x_2=x_3=1.$$

由已知不等式得

$$5-\sqrt{5}\geqslant\sqrt{5}a\Rightarrow a\leqslant\sqrt{5}-1.$$

综上,$a_{\max}=\sqrt{5}-1$.

12. 注意到

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{k}{n}<\frac{m+1}{2\,010}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn<2\,009k,\\mn+n>2\,010k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mn+1\leqslant 2\,009k,\\mn+n-1\geqslant 2\,010k\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\,009(mn+n-1)\geqslant 2\,009\times 2\,010k$$
$$\geqslant 2\,010(mn+1)$$

$$\Rightarrow 2\,009mn+2\,009n-2\,009$$
$$\geqslant 2\,010mn+2\,010$$

$$\Rightarrow n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-m}.$$

因为上式对区间(0,2 009)中的每个正整数 m 都成立,所以,

$$n\geqslant\frac{4\,019}{2\,009-2\,008}=4\,019.$$

另一方面,根据不等式"a、b、c、$d\in\mathbf{R}_+$,$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$",知

$$\frac{m}{2\,009}<\frac{m+(m+1)}{2\,009+2\,010}<\frac{m+1}{2\,010},$$

即 $$\frac{m}{2\,009}<\frac{2m+1}{4\,019}<\frac{m+1}{2\,010}$$

对区间(0,2 009)中的每个正整数 m 都成立.

故 n 的最小值为4 019.

(李大元 熊斌 顾鸿达 刘鸿坤 叶声扬 命题)

5. 函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对于一切 $x、y、z\in\mathbf{R}$ 满足

$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+z).$$

则 $f(1)-f(0)=$______.

6. 在锐角△ABC 中,设∠A、∠B、∠C 的对边分别为 $a、b、c$. 若 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=4\cos C$,则 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}$ 的最小值是______.

7. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的一动点,F_1、F_2 是椭圆的两个焦点. 则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是______.

8. 用三种颜色给立方体的八个顶点染色,其中至少有一种颜色恰好染四个顶点. 则任一条棱的两个端点都不同色的概率是______.

二、解答题(共 64 分)

9. (14 分)已知

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{5},\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}.$$

求 $\frac{1-\cos 2(\alpha+\beta)+\sin 2(\alpha+\beta)}{1+\cos 2(\alpha+\beta)+\sin 2(\alpha+\beta)}$ 的值.

10. (14 分)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ $(n\geqslant 3)$ 的一个排列. 求证:

$$\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{a_k^2+a_{k+1}^2+a_{k+2}^2}>\frac{2(n-2)^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

11. (18 分)对任意的正整数 n,证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}=\frac{1}{n^2+n+1}\sum_{k=1}^{n}k.$$

12. (18 分)设 S 是一些互不相同的四元数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 的集合,其中,$a_i=0$ 或 1 $(i=1,2,3,4)$. 已知 S 的元素个数不超过 15,且满足:

若 (a_1,a_2,a_3,a_4)、$(b_1,b_2,b_3,b_4)\in S$,则

(c_1,c_2,c_3,c_4)、$(d_1,d_2,d_3,d_4)\in S$,

其中,$c_i=\max\{a_i,b_i\}$,$d_i=\min\{a_i,b_i\}$ $(i=1,2,3,4)$.

求集合 S 元素个数的最大值.

参考答案

一、1. 19.

注意到

$$227=1+2+32+64+128$$
$$=2^0+2^1+2^5+2^6+2^7.$$

故 $k_1+k_2+\cdots+k_n=0+1+5+6+7=19$.

2. 2.

由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像知△ABC 是底边为 a 的等腰直角三角形,故其面积为 $\frac{a^2}{4}=1$. 于是,$a=2$.

3. $[10,14]$.

设 $a_n=a_1+(n-1)q$. 则

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}q.$$

于是,$\frac{S_n+210}{n}=\frac{q}{2}n+\frac{210}{n}+a_1-\frac{q}{2}$.

故 $\frac{6q}{2}+\frac{210}{6}\leqslant\min\left\{\frac{5q}{2}+\frac{210}{5},\frac{7q}{2}+\frac{210}{7}\right\}$.

由此得 $10\leqslant q\leqslant 14$.

4. 3.

易知,$y'=3x^2$.

于是,$y=x^3$ 在 $x=a_k$ 的切线方程为

$$y-a_k^3=3a_k^2(x-a_k).$$

从而,上式与 x 轴交于点 $(a_{k+1},0)$. 故

$$-a_k^3=3a_k^2(a_{k+1}-a_k).$$

由此得 $a_{k+1}=\frac{2}{3}a_k$.

又 $a_1=1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

5. 0.

取 $x=-y=z$,得

$$f(2x)\geqslant f(0)\Rightarrow f(1)\geqslant f(0).$$

取 $x=y=-z$,得

$$f(0)\geqslant f(2x)\Rightarrow f(0)\geqslant f(1).$$

从而,$f(1)-f(0)=0$.

6. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

易知,$\cos C=\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}$.

则 $\sin C\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $a^2+b^2=4ab\cos C\Rightarrow a^2+b^2=2c^2$.

故 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{\cos B\cdot\sin A+\sin B\cdot\cos A}{\sin A\cdot\sin B}$

$$=\frac{\sin(A+B)\cdot\sin C}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}$$

$$=\frac{c^2}{ab\sin C}=\frac{a^2+b^2}{2ab\sin C}\geqslant\frac{2ab}{2ab\sin C}$$
$$=\frac{1}{\sin C}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

当且仅当$\angle A=\angle B=\angle C$时，上式等号成立.

7. $[-4,4]$.

设$P(x_0,y_0)$、$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$. 则
$\overrightarrow{PF_1}=(-x_0-c,-y_0)$，$\overrightarrow{PF_2}=(c-x_0,-y_0)$.

故$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2-c^2+y_0^2=x_0^2+y_0^2-c^2$.

注意到$b^2\leqslant x_0^2+y_0^2\leqslant a^2$. 则
$$b^2-c^2\leqslant\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant a^2-c^2,$$
其中，$a^2=12,b^2=4,c^2=a^2-b^2=8$.

因此，$-4\leqslant\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant4$.

8. $\frac{1}{35}$.

当其中一种颜色染四个顶点时，其余两种颜色可任意染剩余的四个顶点. 则染色方法共有
$$C_3^1C_8^4(C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3)=3\times70\times15(\text{种}).$$

若要求任一条棱的两个端点都不同色，则一种颜色染四个顶点的染法只有两种. 此时，其余两种颜色仍可任意染剩余的四个顶点. 于是，这样的染法共有
$$C_3^1\cdot2(C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3)=6\times15(\text{种}).$$

故所求概率为$\frac{6\times15}{3\times70\times15}=\frac{1}{35}$.

二、9. 由$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{3}{5}$，得
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{15}{8}.$$

注意到
$$\tan\gamma=\frac{1-\cos2\gamma}{\sin2\gamma}=\frac{\sin2\gamma}{1+\cos2\gamma}$$
$$=\frac{1-\cos2\gamma+\sin2\gamma}{1+\cos2\gamma+\sin2\gamma}.$$

取$\gamma=\alpha+\beta$，则所求为$\frac{15}{8}$.

10. 由柯西不等式易得
$$\left[\sum_{k=1}^{n-2}(a_k^2+a_{k+1}^2+a_{k+2}^2)\right]\sum_{k=1}^{n-2}(a_k^2+a_{k+1}^2+a_{k+2}^2)^{-1}$$
$$\geqslant(n-2)^2.$$

则$\sum\limits_{k=1}^{n-2}(a_k^2+a_{k+1}^2+a_{k+2}^2)^{-1}$
$$\geqslant\frac{(n-2)^2}{3\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2-2(a_1^2+a_n^2)-(a_2^2+a_{n-1}^2)}$$
$$>(n-2)^2\left(3\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{-1}$$
$$=\frac{2(n-2)^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

11. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k^2+1)^2-k^2}$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k^2+1-k)(k^2+1+k)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2+1-k}-\frac{1}{k^2+1+k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+1+n}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{n^2+n}{n^2+1+n}$$
$$=\frac{1}{n^2+n+1}\sum_{k=1}^{n}k.$$

12. 显然，所有可能的四元数组有16种.

因至少有一个四元数组不在S中，所以，
$(1,0,0,0)$、$(0,1,0,0)$、$(0,0,1,0)$、$(0,0,0,1)$中至少有一个不在S中. 若不然，由题设条件可推出所有四元数组都在S中.

不妨设$(1,0,0,0)\notin S$.

此时，由题设条件知
$(1,1,0,0)$、$(1,0,1,0)$、$(1,0,0,1)$中至少有两个不能在S中（设为$(1,1,0,0)$和$(1,0,1,0)$）. 则$(1,1,1,0)$和$(1,1,0,1)$不能同时在S中（设$(1,1,1,0)$不在S中）. 于是，S的元素个数不超过$16-4=12$个.

设S是所有可能的16个四元数组中去掉上述4个四元数组后所成的集合.

接下来用反证法证明S满足题目条件.

任取(a_1,a_2,a_3,a_4)、$(b_1,b_2,b_3,b_4)\in S$.

(1) 若$(c_1,c_2,c_3,c_4)\notin S$，则$c_1=1,c_4=0$. 故$1\in\{a_1,b_1\}$，$a_4=b_4=0$.

不妨设$a_1=1$，则(a_1,a_2,a_3,a_4)在上述被去掉的4个四元数组中，矛盾.

(2) 若$(d_1,d_2,d_3,d_4)\notin S$，则$d_1=1,d_4=0$. 故$a_1=b_1=1,0\in\{a_4,b_4\}$.

不妨设$a_4=0$，则(a_1,a_2,a_3,a_4)在上述被去掉的4个四元数组中，矛盾.

（傅龙骧　提供）

●课外训练●

数学奥林匹克初中训练题(141)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)05－0035－04

第 一 试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 将代数式 x^4+x^2 加上一个单项式后,其结果是一个代数式的完全平方.则这样的单项式有(　　)个.

(A)6 (B)5 (C)4 (D)不超过 3

2. 已知关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}2x-1>3,\\4x-2\geqslant a\end{cases}$$

的解集为 $x>b$.则代数式

$$|a-3b|-2|a-4b|$$

的值为(　　).

(A)$3a-11b$　　(B)$5b-a$

(C)$22-3a$　　(D)$a-10$

3. 只有初、高中生参加的某种棋赛,其计分方法为:胜者得 1 分,败者得 0 分,和局双方各得 0.5 分,每一位选手与其他选手对局一次.已知参赛选手中高中生为初中生的 2 倍,但其所得总分为初中生的 10 倍.则初中生参赛人数至多为(　　).

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

4. 如图 1,在四边形 $ABCD$ 中,已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形,$\angle ADC=30°$,$AD=3$,$BD=5$.则边 CD 的长为(　　).

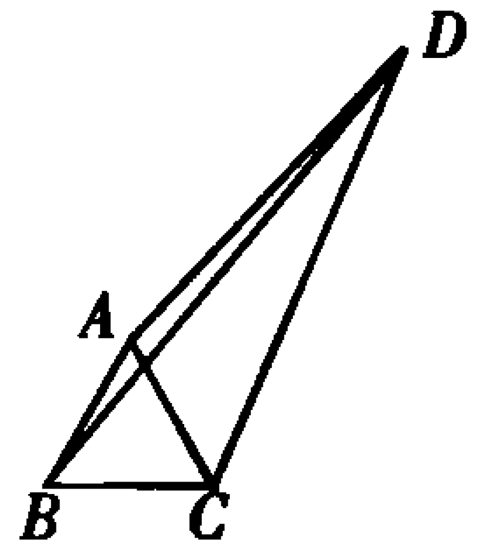

图 1

(A)$3\sqrt{2}$ (B)4

(C)$2\sqrt{5}$ (D)4.5

5. 在直角坐标系中,将横、纵坐标均为整数的点称为"整点".设 k 为非零实数.若两条不同直线 $y=kx-\frac{1}{k}$ 与 $y=\frac{1}{k}x-1$ 的交点为整点,则 k 的值有(　　)个.

(A)1 (B)2 (C)3 (D)多于 3

6. 如图 2,已知 N 是以 AB 为直径的半圆上一点,$NM\perp AB$ 于点 M,半圆$\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别以 AM、BM 为直径,$\odot O_3$、$\odot O_4$ 均与半圆 $\odot O$ 内切,亦与 MN 相切,并分别与半圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相外切.若 $\odot O_3$、$\odot O_4$ 的面积之和为 64π,则 $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BM}$ 的值为(　　).

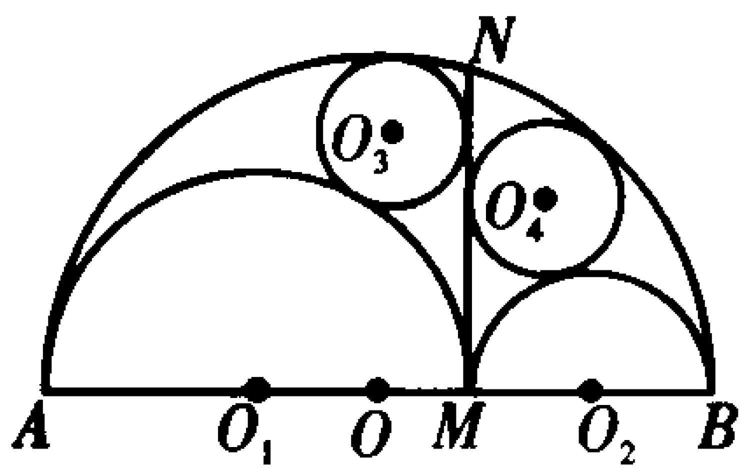

图 2

(A)1 (B)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C)$\frac{\sqrt{2}}{8}$ (D)$\frac{\sqrt{2}}{16}$

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 同一平面内的四点 A、B、C、D 满足 $AD=BD=CD$,$\angle ADC=160°$.则$\angle ABC$ 的度数为______.

2. 若函数

$$y=\frac{x+k}{(k+1)x^2+(2k+2)x+2k-3}$$

的自变量 x 的取值范围是全体实数,则 k 的取值范围是______.

3. 已知 a、b 为实数,满足

$$t=\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{2a^2+b^2}.$$

则 t 的最小值为______.

4. 已知 AD 是$\triangle ABC$ 的高,$\angle BAC=135°$,$AD=3$,$BC=25$.

则△ABC的周长为______.

第二试

一、(20分)已知关于x的方程

$kx^2-(k^2+6k+6)x+6k+36=0$

的根均是某个等腰直角三角形的边长. 求k的值.

二、(25分)如图3,已知四边形$ABCD$是⊙O的内接四边形,对角线AC的中点I是△ABD的内心. 求证:

(1) OI是△IBD外接圆的切线;

(2) $AB+AD=2BD$.

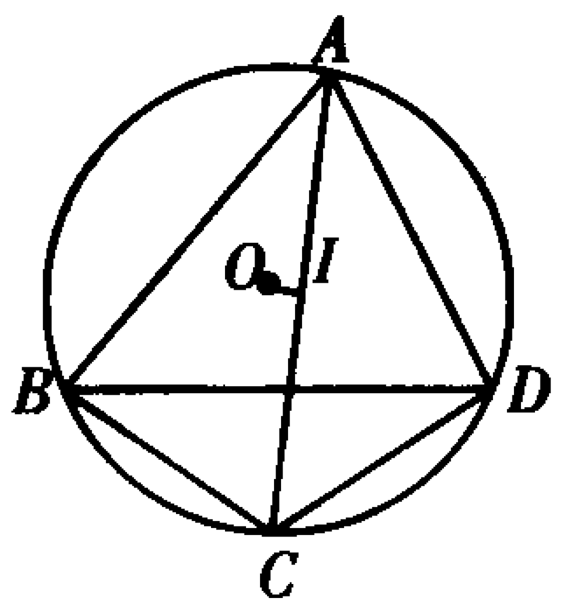

图3

三、(25分)15名小朋友每人有15枚棋子,他们玩一种"石头、剪刀、布"的游戏,每两人之间只进行一次胜负对决,并且负者送给胜者一枚棋子. 游戏结束后,将15名小朋友分成甲、乙两组,甲组的棋子总数比乙组的棋子的总数多63枚. 求乙组中棋子枚数最多的小朋友棋子枚数的最大值和最小值.

参考答案

第一试

一、**1.** A.

符合条件的单项式仅为

$-x^4$、$-x^2$、$\frac{1}{4}$、$\pm 2x^3$、$\frac{1}{4}x^6$.

2. D.

由题设不等式得$x>2, x\geqslant\frac{a+2}{4}$.

由题意得$\frac{a+2}{4}\leqslant 2, b=2$.

则$a\leqslant 6\leqslant 3b<4b$.

故$|a-3b|-2|a-4b|$

$=(3b-a)-2(4b-a)$

$=a-5b=a-10$.

3. C.

设初、高中生分别有x、$2x$人. 由题设,所有学生得分总和是初中生的11倍,即

$C_{3x}^2\geqslant 11C_x^2\Rightarrow x\leqslant 4$.

故x的最大值为4.

当$x=4$时,初中生与高中生之间的比赛中,初中生均负.

4. B.

如图4,以CD为边向四边形$ABCD$外作等边△CDE,联结AE.

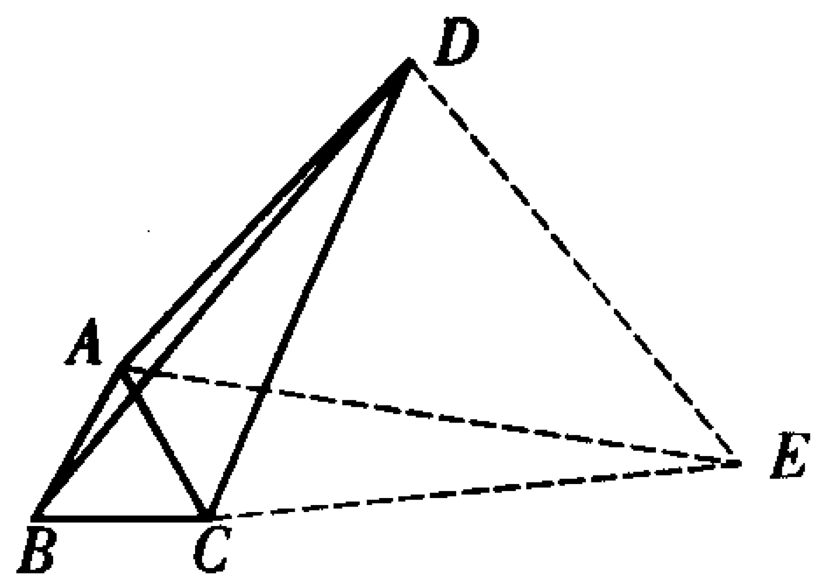

图4

由$AC=BC, CD=CE$,

$\angle BCD=\angle BCA+\angle ACD$

$=\angle DCE+\angle ACD=\angle ACE$

$\Rightarrow\triangle BCD\cong\triangle ACE\Rightarrow BD=AE$.

又$\angle ADC=30°$

$\Rightarrow\angle ADE=\angle ADC+\angle CDE=90°$

$\Rightarrow AD^2+DE^2=AE^2\Rightarrow AD^2+CD^2=BD^2$

$\Rightarrow CD=\sqrt{BD^2-AD^2}=4$.

5. A.

由题意得

$(k^2-1)x=1-k$. ①

若$k=1$,则两条直线的解析式相同,不符合题意.

若$k=-1$,则方程①无解.

若$k\neq\pm 1$,显然,$x\neq 0$,$k=-\frac{1}{x}-1$.

则$y=\frac{1}{k}x-1=-x-\frac{1}{x+1}$.

因为x、y均为整数,所以,$\frac{1}{x+1}$为整数.

故$x+1=\pm 1\Rightarrow x=0$(舍去)或-2.

从而,$k=-\frac{1}{x}-1=-\frac{1}{2}$.

6. D.

如图5,设⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3、⊙O_4、⊙O

的半径分别为 R_1、R_2、R_3、R_4、R，$\odot O_4$ 与 MN 切于点 D，过点 O_4 作 $O_4C\perp AB$ 于点 C，联结 OO_4、O_2O_4、DO_4.

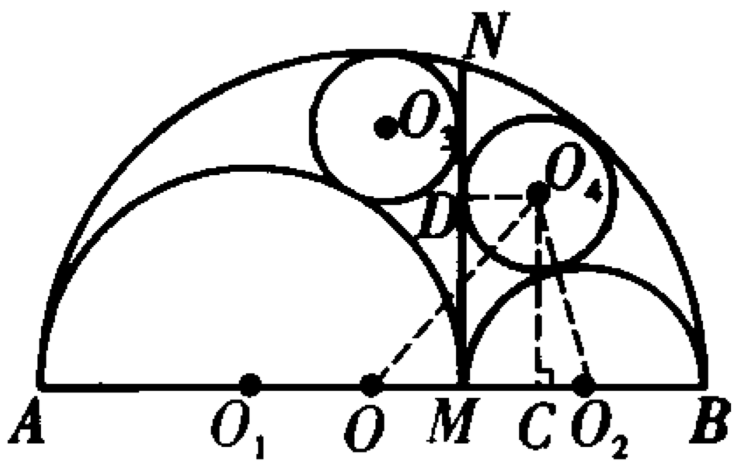

图 5

易知，四边形 CO_4DM 是矩形.

则 $CM=DO_4=R_4$.

故 $OC=OO_2-CO_2$

$=(R-R_2)-(R_2-R_4)$

$=R-2R_2+R_4$.

在 Rt$\triangle OCO_4$ 和 Rt$\triangle O_2CO_4$ 中，

$OO_4^2-OC^2=CO_4^2=O_2O_4^2-CO_2^2$，

即 $(R-R_4)^2-(R-2R_2+R_4)^2$

$=(R_2+R_4)^2-(R_2-R_4)^2$.

故 $R_4=R_2-\dfrac{R_2^2}{R}=R_2-\dfrac{R_2^2}{R_1+R_2}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

同理，$R_3=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}=R_4$.

由题设知

$\pi R_3^2+\pi R_4^2=64\pi$.

则 $R_3=4\sqrt{2}$.

故 $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{BM}=\dfrac{1}{2R_1}+\dfrac{1}{2R_2}$

$=\dfrac{R_1+R_2}{2R_1R_2}=\dfrac{1}{2R_3}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{16}$.

二、1. $80°$ 或 $100°$.

由题设知点 D 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心.

若点 B 在优弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则

$\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle ADC=80°$；

若点 B 在劣弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则

$\angle ABC=180°-\dfrac{1}{2}\angle ADC=100°$.

2. $k\leqslant -1$ 或 $k>4$.

注意到

$f(x)=(k+1)x^2+(2k+2)x+2k-3$

$=(k+1)(x+1)^2+k-4$.

当 $k=-1$ 时，$f(x)=-5\neq 0$，符合题意.

当 $k\neq -1$ 时，

$f(x)\neq 0\Rightarrow k+1$、$k-4$ 同号.

从而，$k<-1$ 或 $k>4$.

故 k 的取值范围是 $k\leqslant -1$ 或 $k>4$.

3. $\dfrac{2}{3}$.

令 $x^2=a^2+2b^2$，$y^2=2a^2+b^2$. 则

$a^2=\dfrac{-x^2+2y^2}{3}$，$b^2=\dfrac{-y^2+2x^2}{3}$.

故 $t=\dfrac{2y^2-x^2}{3x^2}+\dfrac{2x^2-y^2}{3y^2}$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)-\dfrac{2}{3}\geqslant\dfrac{2}{3}$.

当且仅当 $\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{x^2}{y^2}$，即 $a^2=b^2$ 时，t 有最小值 $\dfrac{2}{3}$.

4. $30+15\sqrt{2}$.

如图 6，以点 A 为圆心、AD 为半径作 $\odot A$，过 B、C 两点分别作 $\odot A$ 的切线，切点依次为 E、F，两切线交于点 G，联结 AE、AF.

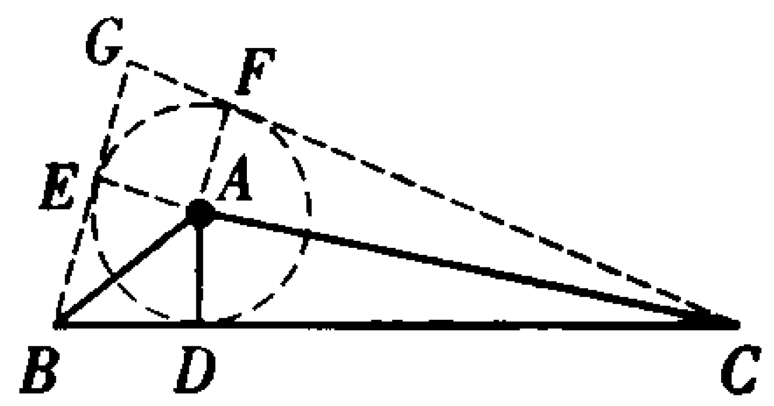

图 6

设 $BD=x$，$CD=y$. 则

$BE=BD=x$，$CF=CD=y$.

由内心性质知

$\angle BAC=90°+\dfrac{1}{2}\angle BGC=135°$

$\Rightarrow\angle BGC=90°$.

故四边形 $AEGF$ 为正方形.

注意到

$BG=BE+EG=x+3$，

$CG=CF+FG=y+3$.

则 $BG^2+CG^2=BC^2$，即

$(x+3)^2+(y+3)^2=25^2$. ①

又 $x+y=25$. ②

由式①、②解得 $(x,y)=(4,21),(21,4)$.

故 $\triangle ABC$ 的周长为

$AB+AC+BC$

$=\sqrt{AD^2+x^2}+\sqrt{AD^2+y^2}+BC$

$=5+15\sqrt{2}+25=30+15\sqrt{2}$.

第二试

一、当 $k=0$ 时,方程的根为 $x=6$,符合题意.

当 $k\neq0$ 时,方程可分解为

$(kx-6)(x-6-k)=0$.

解得 $x_1=\frac{6}{k}$, $x_2=6+k$.

显然,$k>0$.

因为 x_1、x_2 是一等腰直角三角形的两边长,所以,

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{k(k+6)}{6}=1$ 或 $\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

若 $\frac{k(k+6)}{6}=1$,解得

$k=-3\pm\sqrt{15}$(负根舍去).

若 $\frac{k(k+6)}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得

$k=-3\pm\sqrt{9+3\sqrt{2}}$(负根舍去).

若 $\frac{k(k+6)}{6}=\sqrt{2}$,解得

$k=-3\pm(\sqrt{6}+\sqrt{3})$(负根舍去).

综上,k 的值为

$0,\sqrt{15}-3,\sqrt{9+3\sqrt{2}}-3$ 或 $\sqrt{6}+\sqrt{3}-3$.

二、(1)如图 7.

由内心性质知

$CB=CI=CD$.

故 C 是 $\triangle IBD$ 的外心.

因为 I 是 AC 的中点,所以,

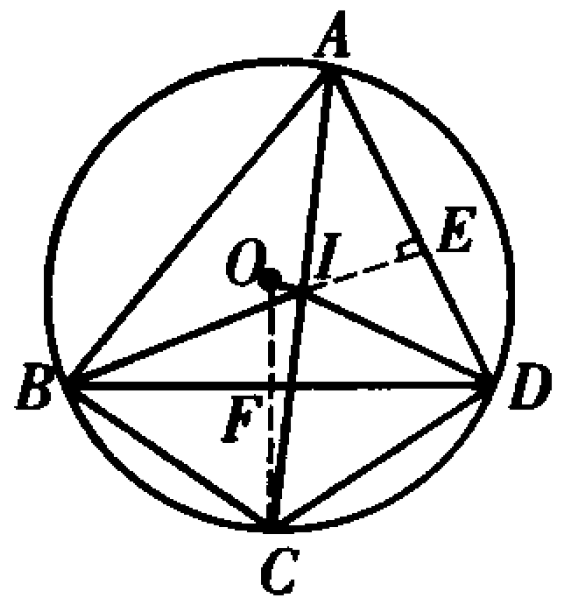

图7

$OI\perp AC$,且 $AI=IC$.

故 $OI\perp CI$.

因此,OI 是 $\triangle IBD$ 外接圆 $\odot C$ 的切线.

(2)如图 7,过点 I 作 $IE\perp AD$ 于点 E,联结 OC 与 BD 交于点 F.

由 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$,知 $OC\perp BD$, $BF=\frac{1}{2}BD$.

故 $\angle AEI=\angle BFC=90^\circ$.

又 $\angle CBF=\angle IAE$, $BC=CI=AI$,则

$\triangle BCF\cong\triangle AIE\Rightarrow BF=AE$.

因为 I 是 $\triangle ABD$ 的内心,所以,

$AB+AD-BD=2AE=BD$.

故 $AB+AD=2BD$.

三、设甲组有 x 人. 则乙组有 $15-x$ 人.

再设两组之间对决时甲组胜了 y 次,乙组胜了 z 次. 则 $z=x(15-x)-y$.

由题意得

$15x+y-[x(15-x)-y]$

$=15(15-x)-y+[x(15-x)-y]+63$.

化简得 $y=-\frac{1}{2}x^2+72$.

显然,x 为偶数.

由 y、$z\geqslant0$ 得

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+72\geqslant0,\\ x(15-x)-\left(-\frac{1}{2}x^2+72\right)\geqslant0.\end{cases}$$

解得 $6\leqslant x\leqslant12$.

于是,x 的取值为 6,8,10,12.

则 $(x,y,z)=(6,54,0),(8,40,16),$

$(10,22,28),(12,0,36)$.

易知,乙组棋子总数为 81.

故当 $x=6$ 时,所求最小值为 9;

当 $x\neq6$ 时,所求最大值为

$15+(15-1)=29$.

因此,乙组中棋子枚数最多的小朋友的棋子枚数的最大值为 29 枚,最小值为 9 枚.

(谢文晓 湖北省黄冈中学,438000)

数学奥林匹克高中训练题(141)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)05－0039－06

第一试

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d\neq 0$,前 n 项之和为 S_n. 则$\{S_n\}$为递增数列的充分必要条件是______.

2. 已知点

$$A\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot y,1\right)、B\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot y,-1\right)$$

满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$. 则 $S=x^2-xy+y^2-1$ 的取值范围是______.

3. 已知定义域在$[-1,1]$上的函数$f(x)$满足:对 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,有

$$f(\sin\theta)+3f(-\sin\theta)=\cos\theta.$$

则函数$f(x)$的值域为______.

4. 设过点 $M(2,0)$的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$交于点 A、B,与圆$(x-4.5)^2+y^2=16$交于点 C、D. 若$|AC|=|BD|$且$|AB|\neq|CD|$,则直线 l 的方程为______.

5. 已知三棱锥的六条棱长分别为$\sqrt{5}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{2}$. 则两条较长棱所在的直线所成角的余弦值为______.

6. 对 $0<x<1$,若复数

$$z=\sqrt{x}+\mathrm{i}\sqrt{\sin x}$$

对应的点有 n 个在单位圆上,则 $n=$______.

7. 从 $S=\{0,1,\cdots,7\}$中任取一个子集 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,剩下的元素组成补集 $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$. 则取出的子集 A 使

$$a_1+a_2+a_3+a_4>b_1+b_2+b_3+b_4$$

的概率为______.

8. 设$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\,010}$. 则 $m\equiv$______$(\bmod 2\,011)$.

二、解答题(共 56 分)

9. (16 分)单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为 AB 的中点. 求异面直线 DE 与 B_1C 的距离.

10. (20 分)已知曲线 C 的方程为

$$\frac{(16\lambda^2-9)x^2}{112}+\frac{\lambda^2y^2}{7}=1(|x|\leqslant 4).$$

(1)对$\lambda>0$,讨论曲线 C 的形状;

(2)设 M 是曲线 C 上的动点,P 为过 M 且垂直于 x 轴的直线上一点,满足$\frac{|OP|}{|OM|}=\lambda$,求点 P 的轨迹方程.

11. (20 分)设函数

$$f(x)=\frac{a}{2}x^2+x-a$$

在定义域$[\sqrt{2},2]$上的最大值为 $g(a)$.

(1)求 $g(a)$的解析式;

(2)当 $g(a)>g\left(\frac{1}{a}\right)$时,求实数 a 的取值范围.

加试

一、(40 分)如图 1,在圆内接五边形 $ABCDE$ 中,$\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{AB}$,对角线 AC 与 BD 交于点 P,在 BD 方向的延长线上取一点 Q. 求证:C、P、E、Q 四点共圆的充分必要条件是 A、E、Q 三点共线.

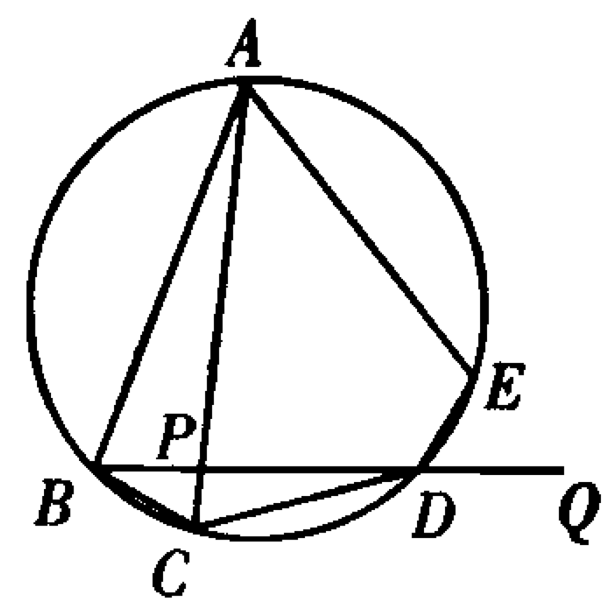

图 1

二、(40 分)对于函数$f(x)$,若$f(x_0)=$

x_0,则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数

$$f(x)=\frac{x}{ax+b}(b>0),f(2)=1,$$

且在其定义域内有唯一的不动点.

(1)求 $f(x)$ 表达式;

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=\pi,a_{n+1}=f(a_n)(n\geqslant1),$$

求 $S_{2\,011}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,011}}$.

三、(50 分)已知

$$a_n=\sum_{i=0}^{n-1}10^i(n=1,2,\cdots).$$

求证:存在无穷多个正整数 n,使 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 除以 n 的余数互不相同.

四、(50 分)取集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_{70}\}$ 的子集 $A_i=\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_{i+59}\}(i=1,2,\cdots,70)$,其中,$a_{70+i}=a_i$. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_{70}$ 中存在 k 个集合满足:任意七个的交集非空,求 k 的最大值.

参考答案

第一试

一、**1.** $d>0$ 且 $a_2>0$.

显然,$\{S_n\}$ 为递增数列

$\Leftrightarrow S_n<S_{n+1}\Leftrightarrow a_{n+1}>0$

$\Leftrightarrow dn+a_2>0$

$\Leftrightarrow d>0$ 且 $a_2>0$.

2. $\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$.

由已知有

$$\left(x-\frac{3-\sqrt5}{2}\cdot y\right)\left(x-\frac{3+\sqrt5}{2}\cdot y\right)-1=0$$

$$\Rightarrow x^2-3xy+y^2-1=0 \quad ①$$

$$\Rightarrow 1=(x+y)^2-5xy\geqslant-5xy$$

$$\Rightarrow xy\geqslant-\frac{1}{5}. \quad ②$$

当 $x=-y=\pm\frac{\sqrt5}{5}$ 时,式①、②的等号成立.

故 $S=x^2-xy+y^2-1$

$=(x^2-3xy+y^2-1)+2xy$

$=2xy$(把式①代入)

$\geqslant-\frac{2}{5}$(把式②代入).

从而,S 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$.

3. $\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

在题设等式中用 $-\theta$ 替换 θ 得

$f(-\sin\theta)+3f(\sin\theta)=\cos\theta.$

两式联立解得

$$f(\sin\theta)=\frac{1}{4}\cos\theta=\frac{1}{4}\sqrt{1-\sin^2\theta}.$$

所以,$f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}(x\in[-1,1])$.

故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$.

4. $x=2,y-2x+4=0,y+2x-4=0$.

在 $A、B、C、D$ 的 24 种排列中,同时满足 $|AC|=|BD|$ 且 $|AB|\neq|CD|$ 的有如下 8 种:

A,C,D,B; A,D,C,B; B,C,D,A;

B,D,C,A; C,A,B,D; D,A,B,C;

C,B,A,D; D,B,A,C.

它们的共同特点是,线段 AB 与线段 CD 的中点重合.

设直线 $l:x=my+2$. ①

将直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 联立,消去 x 得关于 y 的一元二次方程

$y^2-4my-8=0.$

于是,AB 中点的纵坐标为 $y_0=2m$.

同理,CD 中点的纵坐标为

$$y_0'=\frac{5m}{2(m^2+1)}.$$

由 AB 与 CD 的中点重合得

$$2m=\frac{5m}{2(m^2+1)}.$$

从而,$m(4m^2-1)=0\Rightarrow m=0,\pm\frac{1}{2}$.

所以,满足条件的直线 l 共有三条

$x=2,y-2x+4=0,y+2x-4=0.$

5. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

如图2,设三棱锥 $A-BCD$ 中,

$AB=\sqrt{5}$.

若两条较长棱成异面直线,则

$CD=\sqrt{3}$.

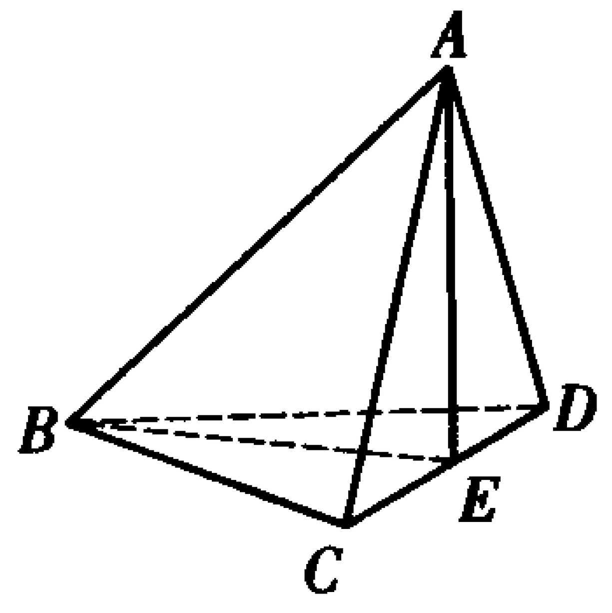

图2

取 CD 的中点 E,联结 AE、BE.

在等腰三角形中,有

$$AE=BE=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

则 $AE+BE=\sqrt{5}=AB$,与"三角形两边之和大于第三边"矛盾.

故两条较长棱相交.

不妨设在 $\triangle ABC$ 中,

$AB=\sqrt{5}, AC=\sqrt{3}, BC=\sqrt{2}$.

则两条较长棱所在的直线所成角的余弦值为

$$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

6. 1.

由点在单位圆上有

$x+\sin x=1(0<x<1)$.

作函数 $\varphi(x)=x+\sin x-1(x\in(0,1))$.

由 $\varphi'(x)=1-\cos x>0(x\in(0,1))$,知 $\varphi(x)$ 为严格递增函数.

又 $\varphi(0)=-1<0, \varphi(1)=\sin 1>0$,故方程 $x+\sin x=1$ 在 $(0,1)$ 内恰有一个实根.

因此,$n=1$.

7. $\frac{31}{70}$.

四元子集的取法有 $C_8^4=70$ 种,其中,满足

$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4=14$$

的取法有8种:

$(7,6,1,0),(7,5,2,0),(7,4,3,0),(7,4,2,1),(6,5,3,0),(6,5,2,1),(6,4,3,1),(5,4,3,2)$.

又由对称性知,剩余取法中满足

$$a_1+a_2+a_3+a_4>b_1+b_2+b_3+b_4$$

的 A 占一半,有 $\frac{70-8}{2}=31$ 种.

故所求概率为 $\frac{31}{70}$.

8. 0.

注意到

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\,010}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2\,010}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,009}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1\,005}+\frac{1}{1\,006}\right)$$

$$=\frac{2\,011}{1\times2\,010}+\frac{2\,011}{2\times2\,009}+\cdots+\frac{2\,011}{1\,005\times1\,006}$$

$$=2\,011\times\frac{q}{2\,010!},$$

其中,q 为正整数.

从而,$2\,011nq=m\times2\,010!$.

这表明,2 011 整除 $m\times2\,010!$,但 2 011 为质数,不能整除 $2\,010!$,所以,2 011 整除 m,得 $m\equiv0(\bmod 2\,011)$.

二、**9. 解法1** 如图3,联结 A_1C、A_1D、A_1E.

由 $B_1C/\!/A_1D$,知 $B_1C/\!/$平面 A_1DE.

设异面直线 DE 与 B_1C 的距离为 d.则点 C 到平面 A_1DE 的距离也为 d.

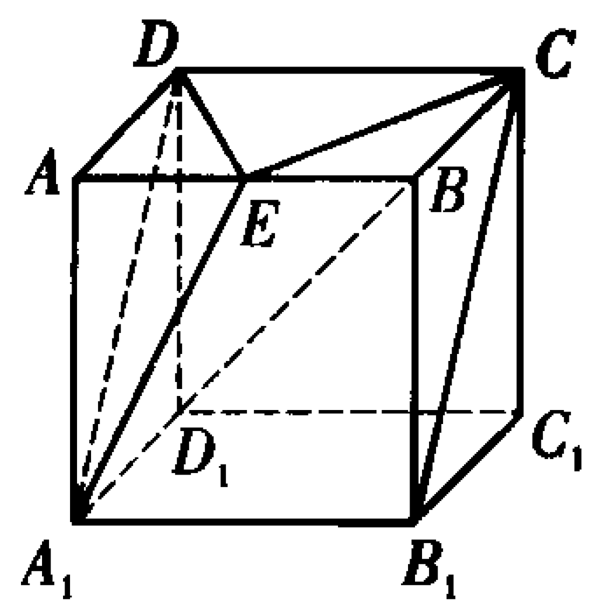

图3

注意到

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2},$$

$$S_{\triangle A_1DE}=\frac{1}{2}A_1D\sqrt{DE^2-\left(\frac{A_1D}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

由 $V_{C-A_1DE}=V_{A_1-CDE}$,有

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\Rightarrow d=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故异面直线 DE 与 B_1C 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法2 以 D_1 为原点、D_1A_1 和 D_1C 和 D_1D 为坐标轴建立空间直角坐标系,有

$$D(0,0,1)、E\left(1,-\frac{1}{2},1\right)、B_1(1,1,0)、C(0,1,1),$$

得 $\overrightarrow{ED}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,1),$

$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0).$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 同时与$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{B_1C}$垂直,有

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=-x+\frac{1}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-x+z=0.\end{cases}$$

取 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$.

则点 C 到平面 A_1DE 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times0+2\times(-1)+1\times0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

10. (1)分四种情形讨论(见图4).

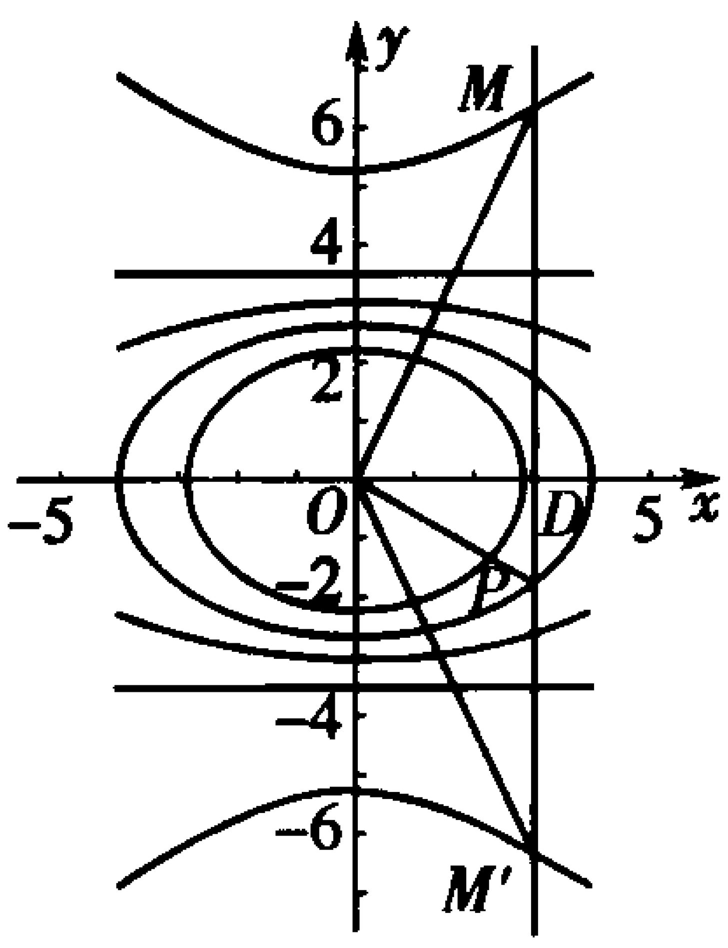

图4

(i)当$0<\lambda<\frac{3}{4}$时,曲线 C 为

$$\frac{\lambda^2y^2}{7}-\frac{x^2}{\frac{112}{9-16\lambda^2}}=1(|x|\leqslant4),$$

这是中心在原点、实轴在 y 轴上的双曲线满足$|x|\leqslant4$ 的部分.

(ii)当$\lambda=\frac{3}{4}$时,曲线 C 为两条线段

$$y=\pm\frac{4\sqrt{7}}{3}(|x|\leqslant4).$$

(iii)当$\frac{3}{4}<\lambda<1$ 时,$\frac{112}{16\lambda^2-9}>16$,曲线 C 为

$$\frac{x^2}{\frac{112}{16\lambda^2-9}}+\frac{\lambda^2y^2}{7}=1(|x|\leqslant4),$$

这是中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆满足$|x|\leqslant4$ 的部分.

(iv)当$\lambda\geqslant1$ 时,$\frac{112}{16\lambda^2-9}\leqslant16$,曲线 C 为

$$\frac{x^2}{\frac{112}{16\lambda^2-9}}+\frac{\lambda^2y^2}{7}=1,$$

这是中心在原点、长轴在 x 轴上的椭圆.

(2)设 $M(x_0,y_0)$、$P(x,y)$,其中,$x_0=x\in[-4,4]$.

由$\frac{|OP|}{|OM|}=\lambda$,有(见图4)

$$\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}=\lambda^2,$$

得 $$y_0^2=\frac{(1-\lambda^2)x^2+y^2}{\lambda^2}.$$

因点 M 在曲线 C 上,所以,

$$\frac{(16\lambda^2-9)x^2}{112}+\frac{\lambda^2}{7}\cdot\frac{(1-\lambda^2)x^2+y^2}{\lambda^2}=1,$$

即 $$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1.$$

因此,点 P 的轨迹为椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

11. (1)当 $a\geqslant0$ 时,$f'(x)=ax+1>0$,故$f(x)$在$[\sqrt{2},2]$上单调递增. 于是,最大值在右端点取得,且

$$g(a)=f(2)=a+2.$$

当 $a<0$ 时,函数 $y=f(x)$ 在 $x\in[\sqrt{2},2]$ 上的图像是开口向下的抛物线的一段,直线 $x=-\frac{1}{a}$是抛物线的对称轴,且

$$x=-\frac{1}{a}>0.$$

下面分三种情形讨论.

(i)当 $x=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$时,有

$$-\frac{1}{2}<a<0,$$

函数 $y=f(x)$ 在 $[\sqrt{2},2]$ 上单调递增,于是,最大值在右端点取得,且

$$g(a)=f(2)=a+2.$$

(ii)当 $x=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$时,有

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2},$$

函数 $y=f(x)$在$[\sqrt{2},2]$上的图像经过顶点,于是,最大值在顶点取得,且

$$g(a)=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}.$$

(iii)当 $x=-\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2}]$时,有

$$a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

函数 $y=f(x)$在$[\sqrt{2},2]$上单调递减,于是,最大值在左端点取得,且

$$g(a)=f(\sqrt{2})=\sqrt{2}.$$

综上,

$$g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\frac{1}{2};\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2};\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

(2)当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$时,

$$g'(a)=-1+\frac{1}{2a^2}>0,$$

故 $g(a)$在 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$上为严格递增函数.

于是,$g(a)$在 $\mathbf{R}$ 上是不减的.

由 $g(a)>g\left(\frac{1}{a}\right)$,有 $a>\frac{1}{a}$,得

$$a>1 \text{ 或 } -1<a<0.$$

但当 $-1<a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$时,

$$-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{a}\leqslant-1,$$

有 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$.

所以,a 的取值范围是

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup(1,+\infty).$$

加　试

一、联结 AD. 由$\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{AB}$,知

$$\angle ABD=\angle ADB,$$

且 BD 方向的延长线与 AE 的延长线相交.

当 A、E、Q 三点共线时,BD 方向的延长线与 AE 的延长线交于点 Q. 则

$$\angle DEQ=\angle ABD=\angle ADB.$$

故$\angle AED=\angle ADQ$

$$\Rightarrow\triangle AED\backsim\triangle ADQ\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{AD}{AQ}.$$

又$\angle ADP=\angle ACD$

$$\Rightarrow\triangle ADP\backsim\triangle ACD\Rightarrow\frac{AP}{AD}=\frac{AD}{AC}.$$

从而,$AE\cdot AQ=AD^2=AP\cdot AC$.

所以,C、P、E、Q 四点共圆.

当 C、P、E、Q 四点共圆时,记$\triangle CPE$ 外接圆为$\odot O$,则 BD 与$\odot O$ 交于点 P、Q.

若 A、E、Q 三点不共线,则 BD 与 AE 延长线的交点 Q'不同于 Q.

由上证,C、P、E、Q'四点共圆,即 Q'也在$\odot O$ 上. 于是,直线 BD 与$\odot O$ 交于三点 P、Q、Q',这是不可能的.

故 A、E、Q 三点共线.

二、(1)由$f(2)=1$,有

$$2a+b=2. \quad ①$$

又由$f(x)$有唯一的不动点,知方程

$$x(ax+b-1)=0 \quad ②$$

有唯一的根(显然为 0).

下面分两种情形讨论.

(i)当 $a=0$ 时,由式①得 $b=2$,故

$$f(x)=\frac{x}{2}.$$

(ii)当 $a\neq0$ 时,由式②得

$$a\cdot0+b-1=0\Rightarrow b=1.$$

代入式①得 $a=\frac{1}{2}$,故 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$.

(2)因为 $f(x)$ 有两种表达式,所以,求和也可分两种情形计算.

(i)当 $f(x)=\frac{x}{2}$ 时,数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=\pi,a_{n+1}=\frac{a_n}{2}(n\geqslant1),$$

则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{\pi}$、公比为 2 的等比数列.

故 $S_{2\,011}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,011}}$

$$=\frac{\frac{1}{\pi}(2^{2\,011}-1)}{2-1}=\frac{2^{2\,011}-1}{\pi}.$$

(ii)当 $f(x)=\frac{2x}{x+2}$ 时,数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=\pi,a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}(n\geqslant1),$$

有 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}(n\geqslant1)$,

则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{\pi}$、公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

故 $S_{2\,011}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,011}}$

$$=\frac{2\,011\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}+\frac{2\,010}{2}\right)}{2}$$

$$=\frac{2\,011(2+1\,005\pi)}{2\pi}.$$

三、由已知得 $a_n\sum\limits_{i=0}^{n-1}10^i=\underbrace{11\cdots1}_{n个}$.

下面证明:$n=3^m(m=1,2,\cdots)$满足题意.

首先证明:$3^m\parallel a_{3^m}(m=1,2,\cdots)$.

对 m 用数学归纳法.

当 $m=1$ 时,$a_3=111=3\times37$,则 $3\parallel a_3$.

假设 $m=k$ 时,$3^k\parallel a_{3^k}$.

则当 $m=k+1$ 时,有

$$a_{3^{k+1}}=a_{3^k}(10^{2\times3^k}+10^{3^k}+1).$$

但 $10^{2\times3^k}+10^{3^k}+1\equiv3(\bmod 9)$,故 $3^{k+1}\parallel a_{3^{k+1}}$.

由数学归纳法,得证 $3^m\parallel a_{3^m}(m=1,2,\cdots)$.

其次证明:$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 均不能被 3^m 整除.

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 中存在被 3^m 整除的数,取其中最小的记为 $a_r(1\leqslant r<n)$,设

$$3^m=qr+t(0\leqslant t<r-1).$$

$$则\ a_n=a_{pr+t}=\left(a_r\sum_{d=0}^{p-1}10^{dr}\right)\times10^t+a_t.$$

此处规定 $t=0$ 时,$a_t=0$.

故由 3^m 整除 a_n、a_r,得 3^m 也整除 a_t.

但由 $a_r(1\leqslant r<n)$ 的最小性及 $0\leqslant t<r-1$ 知,$t=0$,即 r 整除 3^m,必有小于 m 的正整数 α 使 $r=3^\alpha$.

由第一步证明知 $3^\alpha\parallel a_r\Rightarrow3^m\nmid a_r$,矛盾.

所以,$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 不能被 3^m 整除.

最后证明:$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 被 3^m 除的余数互不相同.

假设 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 被 3^m 除的余数有相同的,即存在 $1\leqslant i<j<n$,使得

$$a_j\equiv a_i(\bmod 3^m).$$

但 $a_j=10^ia_{j-i}+a_i$ 且 $(10,3^m)=1$,得

$$3^m\mid a_{j-i}(1\leqslant j-i<n-1),$$

与第二步矛盾.

所以,$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 被 3^m 除的余数互不相同.

综上,存在无穷多个正整数 $n=3^m(m=1,2,\cdots)$,使 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 除以 n 的余数互不相同.

四、由已知有

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{60}=\{a_{60}\},$$

更有 $A_1,A_2,\cdots,A_{60}$ 中的"任意七个的交集非空",故 $k\geqslant60$.

下面证明:若 $k>60$,则不能保证所取出的 k 个子集中"任意七个的交集非空",从而,k 的最大值为 60.

数学奥林匹克问题

本期问题

初 297 在$\triangle ABC$中，已知$AC=7$，$BC=4$，过点C作$CG\perp AB$与AB交于点G，且$\angle GEA=\frac{1}{2}\angle ACB$，$\frac{AG}{GB}=\frac{5}{2}$．求当$\angle ABC$分别为锐角、钝角时，$CE$的长.

初 298 将长为m、宽为n的矩形纸片能否剪拼成面积相等的正方形纸片（损耗不计，m、$n\in\mathbf{N}_+$）？若能，给出一种剪拼的方法；若不能，说明理由.

高 297 设α、β、γ是长方体的体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角. 证明：

$$\sqrt{(\cos^2\alpha)^{1-\cos^2\alpha}(\cos^2\beta)^{1-\cos^2\beta}(\cos^2\gamma)^{1-\cos^2\gamma}}\leqslant\frac{1}{3}.$$

高 298 证明：对任意的实数x有

$\sin\sin\sin\sin\sin x<\cos\cos\cos\cos\cos x$.

上期问题解答

初 295 如图 1，三个半径为r的圆两两外切，与$\odot O$内切于点A、B、C，过A、B作$\odot O$的切线交于点P. 求由两条切线及切点间的圆弧所形成的阴影区域的面积.

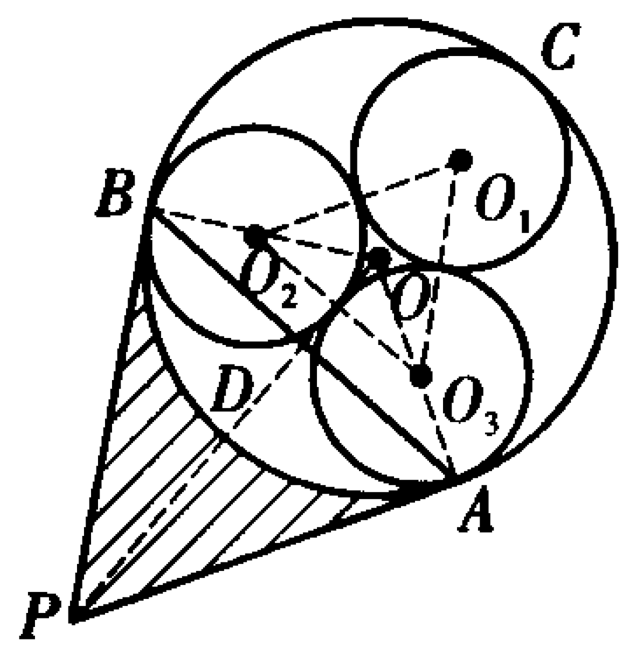

图 1

解 如图 1，联结O_1O_2、O_2O_3、O_1O_3、OA、OB、OP，OP与$\odot O$交于点D.

因为$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$两两外切，所以，$\triangle O_1O_2O_3$是边长为$2r$的等边三角形，且$\angle O_2OO_3=120°$. 于是，

$$OO_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

因此，$\odot O$的半径$OA=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}r$.

又因为$\triangle PAB$是等边三角形，且

$\angle OPA=30°$.

所以，在$\mathrm{Rt}\triangle POA$中，有

$PA=(2+\sqrt{3})r$.

将已知集合$A_1,A_2,\cdots,A_{70}$平均分为 10 组（构造抽屉）：

$B_i=\{A_i,A_{10+i},\cdots,A_{60+i}\}(i=1,2,\cdots,10)$.

因每一个B_i内七个集合A_j的补集$\overline{A_j}$满足

$$\begin{aligned}&\overline{A_i}\cup\overline{A_{10+i}}\cup\cdots\cup\overline{A_{60+i}}\\&=\{a_{i+60},a_{i+61},\cdots,a_{i+69}\}\cup\\&\quad\{a_{i+70},a_{i+71},\cdots,a_{i+79}\}\cup\cdots\cup\\&\quad\{a_{i+120},a_{i+121},\cdots,a_{i+129}\}\\&=\{a_1,a_2,\cdots,a_{70}\}=S(a_{70+i}=a_i),\end{aligned}$$

所以，每一个B_i内七个集合的交集为空集

$$A_i\cap A_{10+i}\cap\cdots\cap A_{60+i}=\varnothing. \qquad ①$$

对$k>60$，有$k=6\times10+r(1\leqslant r\leqslant9)$.

由抽屉原理知，从$A_1,A_2,\cdots,A_{70}$中所取出的k个子集，必有七个属于同一个$B_i(1\leqslant i\leqslant10)$.

又由式①知，与“任意七个的交集非空”矛盾.

所以，k的最大值为 60.

（罗增儒　陕西师范大学数学系，710062）

则 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}PA\cdot OA$

$=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})r\cdot\frac{2\sqrt{3}+3}{3}r=\frac{12+7\sqrt{3}}{6}r^2$,

$$S_{扇形ODA}=\frac{60\pi\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}r\right)^2}{360}=\frac{(7+4\sqrt{3})\pi r^2}{18}.$$

故 $S_{阴影}=2(S_{\triangle POA}-S_{扇形ODA})$

$=2\left[\frac{12+7\sqrt{3}}{6}r^2-\frac{(7+4\sqrt{3})\pi r^2}{18}\right]$

$=\left[\frac{12+7\sqrt{3}}{3}-\frac{(7+4\sqrt{3})\pi}{9}\right]r^2.$

(杨卫强　天津师范大学数学科学学院09级研究生,300387)

初296　如图2,已知$\odot O_1$与$\odot O_2$交于点A、B,CD是两圆的外公切线,切点为C、D,直线BC与AD、BD与AC分别交于点E、F.求证:$\frac{EA}{AF}=\frac{FB}{BE}$.

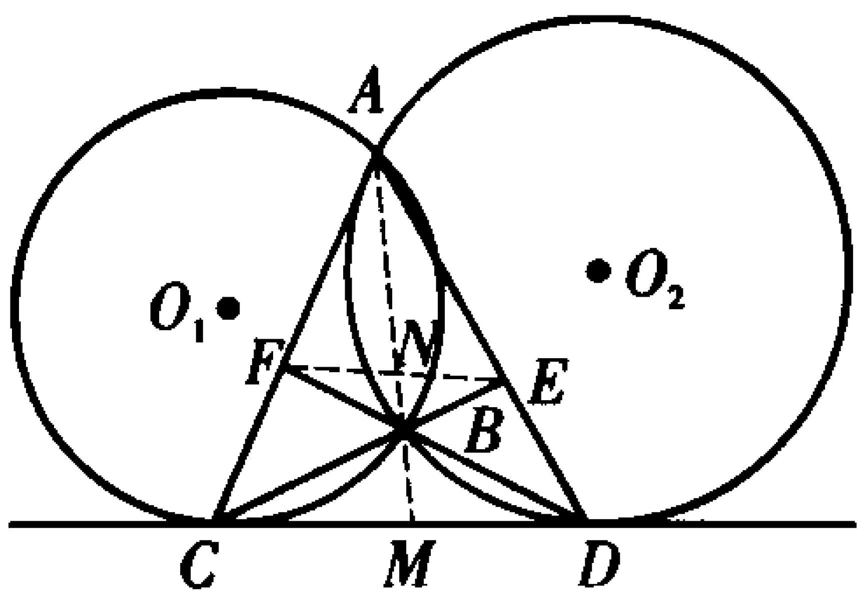

图2

证明　联结AB并延长与CD交于点M,联结EF与AB交于点N.

由切割线定理得

$MC^2=MB\cdot MA=MD^2\Rightarrow MC=MD.$

由弦切角定理得

$\angle MCB=\angle BAC,\angle MDB=\angle BAD.$

则$\angle EAF+\angle EBF$

$=\angle MCB+\angle MDB+\angle CBD=180°.$

于是,A、F、B、E四点共圆.

故$\angle BEF=\angle BAF=\angle MAC=\angle MCB$

$\Rightarrow EF/\!/CD\Rightarrow\frac{FN}{CM}=\frac{AN}{AM}=\frac{EN}{DM}.$

由$MC=MD$,知$FN=EN$.

则$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle AFB}$

$\Rightarrow AE\cdot BE\sin\angle AEB=AF\cdot BF\sin\angle AFB.$

由A、F、B、E四点共圆知

$\sin\angle AEB=\sin\angle AFB.$

则$AE\cdot BE=AF\cdot BF\Rightarrow\frac{EA}{AF}=\frac{FB}{BE}.$

(吕建恒　陕西省兴平市教研室,713100)

高295　考虑矩阵

$(a_{ij})_{n\times n}(a_{ij}\in\{1,2,3\})$.

若a_{ij}所在的第i行和第j列均至少有三个元素(包括a_{ij})与a_{ij}相同,则称元素a_{ij}是"好的".如果矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$中至少有一个元素是好的,求n的最小值.

解　n的最小值为7.

当$n=6$时,矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&3&3\\1&1&3&3&2&2\\2&2&1&1&3&3\\2&2&3&3&1&1\\3&3&2&2&1&1\\3&3&1&1&2&2\end{pmatrix}$$

中任何一个元素都不是好的,所以,$n\geqslant7$.

下面用反证法证明:当$n=7$时,矩阵(a_{ij})中至少有一个元素是好的.

假设矩阵(a_{ij})中任何一个元素都不是好的.

定义　如果数字m在某一行(或者某一列)的个数不少于三个,则称数字m控制了该行(或该列).

易知,数字m控制的行数(或列数)一定不超过4.

先证明一个引理.

引理　若数字1控制了前三行,则前三行中的1至少出现在五列中.

证明　因为前三行中1至少出现了9个,所以,由抽屉原理知,至少出现在五列中.

下面说明五列是不可能的.

若数字1出现在前五列中,考虑原矩阵的前五列、后四行组成的子矩阵T,则T中至多有一个为1.

若 T 中有一行 2 至少出现三次，有一行 3 至少出现三次，则一定有一列，其中 1、2、3 在所在的行都出现了三次. 所以，该列中的 1、2、3 均最多出现两次，矛盾.

不妨设 T 中有三行数字 2 出现了至少三次，则前五列中数字 1、2 在每列都至多出现两次. 于是，前五列中数字 3 在每列都至少出现三次，矛盾.

所以，此情形不可能发生.

分两步证明：

(1) 如果数字 m 控制的行数（或列数）大于或等于 3，则矩阵 (a_{ij}) 中等于 m 的元素的个数一定不超过 16.

分两种情形（不妨设 $m=1$）讨论.

(i) 数字 1 控制了四行.

不妨设为前四行，则前四行中 1 至少出现了 12 个，由抽屉原理知，至少出现在六列中.

①若数字 1 出现在七列中，则数字 1 的个数至多为 14；

②若数字 1 出现在六列中，则数字 1 的个数至多为 $6\times2+3=15$.

(ii) 数字 1 控制了三行.

不妨设为前三行，由引理知，前三行中的 1 至少出现在六列中.

①若数字 1 出现在七列中，则数字 1 的个数至多为 14；

②若数字 1 出现在六列中，则数字 1 的个数至多为 $6\times2+4=16$.

(2) 对于 $m=1,2,3$ 控制的行数和列数中至少有一个不少于 3.

由抽屉原理，不妨设 1 控制的行数不少于 3.

下面说明：数字 2、3 控制的行数或者列数中有一个不少于 3.

分两种情形讨论：

(i) 数字 1 控制了四行.

不妨设为前四行，则前四行中 1 至少出现了 12 个，由抽屉原理知，至少出现在六列中.

①若数字 1 出现在七列中，则 2、3 分别控制三列和四列.

②若数字 1 出现在前六列中，考虑原矩阵的前六列、后三行组成的子矩阵 T，T 中只出现了 2 和 3.

如果 T 中的第一行出现了 3 个 2、3 个 3，则 2、3 分别控制了三列；如果 T 中第一行出现了 4 个 2，则 3 控制了四列，2 控制了三行（这是因为在 T 中的后两行不可能一行出现超过 3 个 3）.

(ii) 数字 1 控制了三行.

不妨设为前三行，由引理知，前三行中的 1 至少出现在六列中.

①若数字 1 出现在七列中，则 2、3 分别控制三列和四列.

②若数字 1 出现在前六列中，考虑原矩阵的前六列、后四行组成的子矩阵 T，T 中至多出现 3 个 1，所以，T 中某一行一定不出现 1.

如果该行是 2 与 3 分别有 3 个，则 2、3 分别控制三列；如果该行中 2 出现 4 次，则 3 控制了四列.

因为 1 至多出现 3 个，所以，2 至少控制后面四行中的三行.

由 (1)、(2) 知，在矩阵 (a_{ij}) 中，数字 $m=1,2,3$ 控制的行数和列数中至少有一个不少于 3.

进而，1、2、3 在矩阵 (a_{ij}) 中出现的次数都不超过 16.

但当 $n=7$ 时，矩阵 (a_{ij}) 共有 49 个元素，矛盾.

故当 $n=7$ 时，矩阵 (a_{ij}) 中至少有一个元素是好的.

（李朝晖　复旦大学附属中学，200433）

高 296　已知 P 是一个给定的圆内接凸 n 边形，用 $n-3$ 条对角线将 P 任意划分为 $n-2$ 个三角形，且这些对角线在 P 内部不相交. 证明：这 $n-2$ 个三角形的内切圆半径之和不依赖于划分方式（即对任意的划分方

式,这 $n-2$ 个三角形的内切圆半径之和是一个定值).

证明 先证明一个引理.

引理 对于$\triangle ABC$,设其外接圆、内切圆的半径分别为 R、r. 则

$$\frac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C-1.$$

证明 事实上,

$$\frac{r}{R}=\frac{2S}{(a+b+c)R}=\frac{2\cdot\frac{abc}{4R}}{(a+b+c)R}$$

$$=\frac{abc}{2(a+b+c)R^2}=\frac{2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

$$=\cos A+\cos B+\cos C-1.$$

回到原题.

设 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$,P 的外接圆半径为 R,划分成的 $n-2$ 个三角形为$\triangle_1$,$\triangle_2$,…,$\triangle_{n-2}$,其$\triangle_i(1\leqslant i\leqslant n-2)$的内切圆半径为 r_i. 则

$$\sum_{i=1}^{n-2}r_i=\sum_{i=1}^{n-2}R(\cos\alpha_{i1}+\cos\alpha_{i2}+\cos\alpha_{i3}-1)$$

$$=R\left[\sum_{i=1}^{n-2}(\cos\alpha_{i1}+\cos\alpha_{i2}+\cos\alpha_{i3})-(n-2)\right].$$

将所有 α_{i1}、α_{i2}、α_{i3} 这 $3(n-2)$ 个角分为两类:

(1)α 所对的弦是 P 的某条边,则称它是Ⅰ类角.

(2)α 所对的弦是 P 的某条对角线,则称它是Ⅱ类角.

注意到,这 $n-3$ 条对角线中的每一条都恰在两个三角形中出现,也就是说,每条对角线都对应两个Ⅱ类角 α、β,其中,

$$\alpha+\beta=\pi\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta=0,$$

且每条对角线对应的Ⅱ类角互不相同.

从而,在 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}(\cos\alpha_{i1}+\cos\alpha_{i2}+\cos\alpha_{i3})$ 中,所有的含Ⅱ类角的余弦值都相互抵消.

又每一条边所对的Ⅰ类角显然也互不相同,且这 n 个Ⅰ类角是给定的,则

$$\sum_{i=1}^{n-2}(\cos\alpha_{i1}+\cos\alpha_{i2}+\cos\alpha_{i3})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}^{\circ}}{2}(\text{定值}).$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}r_i$ 为定值,且不依赖于划分方式.

(肖登鹏 上海市市北中学,200071)