目　次

中等数学

High-School Mathematics

2011 年第 3 期(总第 207 期)

(2011 年 3 月中旬出版)

期刊基本参数:CN 12－1121/O1 * 1982 * m * 16 * 48 * zh * P * ¥4.50 * 11500 * 14 * 2011－3

数学活动课程讲座

构造一元二次方程解竞赛题

李耀文

（山东省枣庄市第十八中学，277200）

中图分类号：O122.2　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)03－0002－04

（本讲适合初中）

近年来，在各级各类初中数学竞赛中，有些试题直接求解比较困难，但如果能抓住问题的特征构造出一元二次方程，再利用判别式、求根公式、根与系数的关系以及解方程等知识和方法变更命题，可使问题获得圆满解决．本文通过举例说明构造一元二次方程解竞赛题的常用方法，供参考．

1　根的定义法

当题目条件中出现的两个等式具有特征

$ax_1^2+bx_1+c=0$,

$ax_2^2+bx_2+c=0(a\neq0)$

时，可利用根的定义，用未知数 x 取代已知等式中 x_1、x_2 构造出相应的一元二次方程

$ax^2+bx+c=0$

来解题．

例 1　已知实数 a、$b(a\neq b)$，且满足

$(a+1)^2=3-3(a+1)$,

$3(b+1)=3-(b+1)^2$.

则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为（　　）．

(A)23　(B)-23　(C)-2　(D)-13

（2004，“信利杯”全国初中数学竞赛）

【分析】将已知两等式变形为

$(a+1)^2+3(a+1)-3=0$,

$(b+1)^2+3(b+1)-3=0$.

可知 a、b 是关于 x 的方程

$$(x+1)^2+3(x+1)-3=0 \qquad ①$$

的两个根．

解　由分析的式①化简整理得

$x^2+5x+1=0$.

因为 $\Delta=25-4>0$，$a+b=-5$，$ab=1$，所以，a、b 均为负数．

则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}$

$=-\frac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}}=-23$.

故选 B．

例 2　设实数 s、t 分别满足

$19s^2+99s+1=0$,

$t^2+99t+19=0(st\neq1)$.

求 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值．

（1999，全国初中数学竞赛）

【分析】将已知等式中的第一个等式变形，并结合第二个等式发现，$\frac{1}{s}$、$t(st\neq1)$ 是一元二次方程

$x^2+99x+19=0$

的两个根．

解　因 $s\neq0$，所以，第一个等式变形为

$\left(\frac{1}{s}\right)^2+99\left(\frac{1}{s}\right)+19=0$.

又 $t^2+99t+19=0$，且 $st\neq1$，则 $\frac{1}{s}$、t 是一

收稿日期：2010－09－10

元二次方程

$x^2+99x+19=0$

的两个不等实根.

从而，$\frac{1}{s}+t=-99, \frac{1}{s}\cdot t=19$，即

$st+1=-99s, t=19s$.

故 $\frac{st+4s+1}{t}=\frac{-99s+4s}{19s}=-5$.

例3　若实数 x、y 满足

$$\frac{x}{3^3+4^3}+\frac{y}{3^3+6^3}=1,$$

$$\frac{x}{5^3+4^3}+\frac{y}{5^3+6^3}=1,$$

则 $x+y=$______.

(2005，全国初中数学联赛)

【分析】易发现已知两等式的分母一个含有 3^3，另一个含有 5^3，于是，可将 3^3、5^3 看作某个方程的两根.

解　由题设易知 3^3、5^3 是关于 t 的方程

$$\frac{x}{t+4^3}+\frac{y}{t+6^3}=1,$$

即　$t^2+(4^3+6^3-x-y)t+(4^3\times6^3-4^3y-6^3x)=0$

的两个根.

由根与系数关系得

$3^3+5^3=-(4^3+6^3-x-y)$.

所以，$x+y=3^3+4^3+5^3+6^3=432$.

2　求根公式法

当题目条件出现形如

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

时，可联想一元二次方程的求根公式，通过构造一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 来求解.

例4　已知 $a<0, b\leqslant0, c>0$，且

$\sqrt{b^2-4ac}=b-2ac$.

求 b^2-4ac 的最小值.

(2004，"信利杯"全国初中数学竞赛)

解　将已知等式变成

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2ac}=-1(ac\neq0).$$

由此得到相应的一元二次方程

$acx^2+bx+1=0$,

且该方程有实数根 $x=-1$.

所以，$ac-b+1=0\Rightarrow ac=b-1$.

故 $b^2-4ac=b^2-4(b-1)=(b-2)^2$.

因为 $b\leqslant0$，所以，当 $b=0$ 时，b^2-4ac 取得最小值4.

3　判别式法

当题目条件出现形如 b^2-4ac 型的代数式时，可联想 $\Delta=b^2-4ac$，构造出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

例5　已知

$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$，且 $a\neq0$.

则 $\frac{b+c}{a}=$______.

(1999，全国初中数学联赛)

解　由题设等式得

$(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=0$.

当 $a\neq b$ 时，由一元二次方程根的判别式，可知关于 x 的一元二次方程

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0\qquad①$$

有两个相等实数根.

又 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$，于是，$x=1$ 是方程①的根.

故方程①的两个根都是 $x=1$.

所以，$1\times1=\frac{c-a}{a-b}\Rightarrow\frac{b+c}{a}=2$.

当 $a=b$ 时，有

$(b-c)^2=0\Rightarrow b=c$.

此时，$\frac{b+c}{a}=\frac{b+b}{b}=2$.

综上，$\frac{b+c}{a}=2$.

4　根与系数的关系法

当题目条件存在形如

$x_1+x_2=p, x_1x_2=q$

的等式时，可利用根与系数的关系构造出一

元二次方程 $x^2-px+q=0$.

例6 已知 a、b、c 三数满足方程组

$$\begin{cases}a+b=8,\\ab-c^2+8\sqrt{2}c=48.\end{cases}$$

试求方程 $bx^2+cx-a=0$ 的根.

(2002,全国初中数学联赛)

【分析】先由已知条件求 ab、$a+b$ 的值(可用含 c 的代数式表示),再依据根与系数的关系构造出一元二次方程,利用判别式 $\Delta\geqslant0$ 确定出 c 的值,进而求得 a、b 的值.

解 由已知得

$a+b=8, ab=c^2-8\sqrt{2}c+48$.

则 a、b 是方程

$x^2-8x+c^2-8\sqrt{2}c+48=0$

的两个实数根.

由判别式 $\Delta\geqslant0$,得 $c=4\sqrt{2}$.

于是,$a=b=4$.

所以,原方程可化为

$x^2+\sqrt{2}x-1=0$.

解得 $x_1=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, x_2=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

5 主元法

当题目条件等式中含有多个元(字母)时,通常先从多个字母中确定一个主元素构造出一元二次方程,再运用方程的有关知识来解决问题.

例7 关于 x、y 的方程

$x^2+xy+2y^2=29$

的整数解 (x,y) 有( )组.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)无穷多

(2009,《数学周报》杯全国初中数学竞赛)

解 可将原方程视为关于 x 的二次方程

$x^2+yx+(2y^2-29)=0$.

由于该方程有整数根,则判别式 $\Delta\geqslant0$,且是完全平方数.

由 $\Delta=y^2-4(2y^2-29)$

$=-7y^2+116\geqslant0$,

解得 $y^2\leqslant\dfrac{116}{7}\approx16.57$.

于是,$y^2=0,1,4,9,16$.

经检验,只有 $y^2=16$ 时,$\Delta=4$ 是完全平方数,符合要求.

当 $y=4$ 时,原方程为 $x^2+4x+3=0$,此时,$x_1=-1, x_2=-3$;

当 $y=-4$ 时,原方程为 $x^2-4x+3=0$,此时,$x_3=1, x_4=3$.

所以,原方程的整数解共有4组.

故选C.

6 消元法

当题设等式或所求代数式中含有多个元(字母)时,常常采用代入消元法构造出一元二次方程,再运用方程等有关知识来求解.

例8 已知实数 x、y、z 满足

$x+y+z=5$,

$xy+yz+zx=3$.

则 z 的最大值是______.

(2004,"信利杯"全国初中数学竞赛)

【分析】由题设两等式消去 y 后得到关于 x、z 的二元二次方程,再把 z 看作常数,构造出关于 x 的一元二次方程,利用判别式 $\Delta\geqslant0$ 确定出 z 的取值范围.

解 由题设 $x+y+z=5$,得

$y=5-x-z$.

代入 $xy+yz+zx=3$ 中得到关于 x 的一元二次方程

$x^2+(z-5)x+z^2-5z+3=0$.

因为 x、z 为实数,所以,

$\Delta=(z-5)^2-4(z^2-5z+3)$

$=-3z^2+10z+13\geqslant0$.

解得 $-1\leqslant z\leqslant\dfrac{13}{3}$.

因此,z 的最大值是 $\dfrac{13}{3}$.

练 习 题

1. 已知实数 x、y 满足

$$\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^2}=3, y^4+y^2=3.$$

则 $\frac{4}{x^4}+y^4$ 的值为(　　).

(A)7　　(B)5

(C)$\frac{7+\sqrt{13}}{2}$　　(D)$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(2008,全国初中数学竞赛)

提示:由已知得

$$\left(-\frac{2}{x^2}\right)^2+\left(-\frac{2}{x^2}\right)-3=0,$$

$$(y^2)^2+y^2-3=0.$$

显然,$-\frac{2}{x^2}\neq y^2$.

以 $-\frac{2}{x^2}$、y^2 为根的一元二次方程为

$$t^2+t-3=0.$$

则 $\frac{4}{x^4}+y^4=(-1)^2-2\times(-3)=7$.

故选 A.

2. 设 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 则

$$\frac{a^5+a^4-2a^3-a^2-a+2}{a^3-a}=\_\_\_\_\_\_.$$

(2008,全国初中数学联赛)

提示:由 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,可得相应的一元二次方程 $a^2+a-1=0$.

故原式

$$=\frac{(a^2+a-1)(a^3-a)-2(a-1)}{a(a^2-1)}$$

$$=\frac{-2}{a^2+a}=-2.$$

3. 已知实数 a、b 满足

$a^2+ab+b^2=1$,且 $t=ab-a^2-b^2$.

则 t 的取值范围是______.

(2001,全国初中数学竞赛)

提示:答案为 $-3\leqslant t\leqslant -\frac{1}{3}$.

4. 已知实数 x、y、z 满足

$$\begin{cases}x+y=z-1,\\ xy=z^2-7z+14.\end{cases}$$

问:x^2+y^2 的最大值是什么? 当 z 为何值时,x^2+y^2 取最大值?

提示:仿例 6. 由题意知 x、y 是方程

$$t^2-(z-1)t+z^2-7z+14=0$$

的两实数根.

由判别式 $\Delta\geqslant0$,得

$$3z^2-26z+55\leqslant0.$$

解得 $\frac{11}{3}\leqslant z\leqslant5$.

又 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(z-1)^2-2(z^2-7z+14)$

$=(z-6)^2+9$,

所以,当 $z=5$ 时,x^2+y^2 的最大值是 9.

5. 已知实数 x、y 满足

$$x^2+3y^2-12y+12=0.$$

则 y^x 的值是______.

(1997,东方航空杯上海市初中数学竞赛)

提示:将已知等式看作是关于 y(主元)的一元二次方程

$$3y^2-12y+(12+x^2)=0. \quad ①$$

由 $\Delta=-12x^2\geqslant0$,又 $x^2\geqslant0$,则 $x=0$.

从而,$y=2$. 故 $y^x=2^0=1$.

6. 已知实数 a、b、c 满足

$$a=2b+\sqrt{2}, ab+\frac{\sqrt{3}}{2}c^2+\frac{1}{4}=0.$$

则 $\frac{bc}{a}=\_\_\_\_\_\_$.

(1993,"希望杯"全国数学邀请赛(初二))

提示:由已知两式消去 a,再把 c 看作常数,得到关于 b 的一元二次方程

$$2b^2+\sqrt{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c^2+\frac{1}{4}=0.$$

由判别式 $\Delta\geqslant0$,得 $c=0$.

所以,$\frac{bc}{a}=0$.

交比·调和点列·阿波罗尼斯圆·极线极点

金 磊
（西安交大附中曲江校区，710049）

中图分类号：O185.1 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)03-0006-04

（本讲适合高中）

2010年全国高中数学联赛加试第一题题目为：

如图1，已知锐角$\triangle ABC$的外心为O，K是边BC上一点（不是边BC的中点），D是线段AK延长线上一点，直线BD与AC交于点N，直线CD与AB交于点M. 求证：若$OK\perp MN$，则A、B、D、C四点共圆.[1]

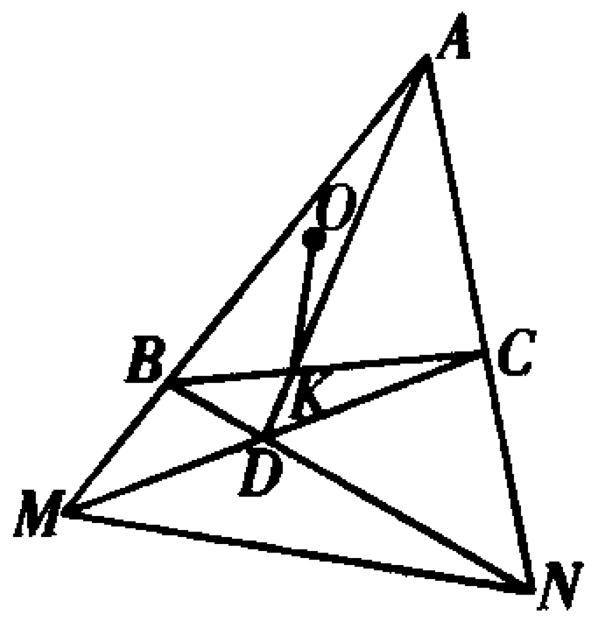

图1

本题颇有难度，命题组提供的答案用的是反证法，让有些人"匪夷所思"，其实这是一系列射影几何中常见结论的自然"结晶". 此类问题在国家队选拔考试中屡见不鲜. 本文拟系统地介绍交比、调和点列、完全四边形、阿波罗尼斯（Apollonius）圆、极线等射影几何的重要概念及应用，抽丝剥茧、溯本求源，揭示此类问题的来龙去脉，并在文中给出此题的一种简单明了的直接证明.

1 知识介绍

定义1 如图2，共点于O的四条直线被任意直线所截的有向线段比$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$称为线束$OA$、$OC$、$OB$、$OD$或点列$A$、$C$、$B$、$D$的交比.[2]

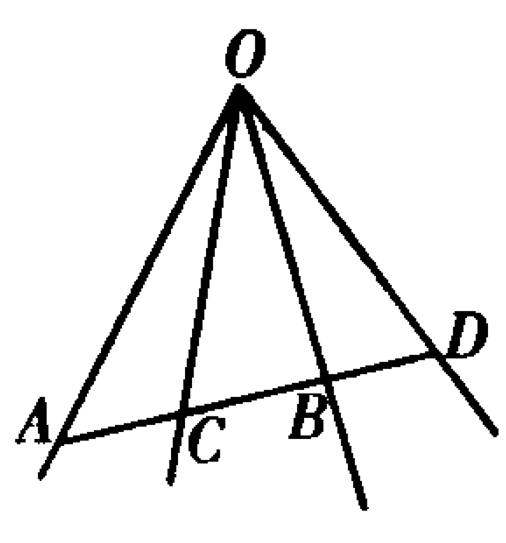

图2

性质1 线束的交比与所截直线无关.

定义2 交比为-1，即$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=-\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$的线束称为调和线束，点列称为调和点列.

显然，调和线束与调和点列是等价的，即调和线束被任意直线截得的四点均为调和点列，反之，调和点列对任意一点的线束为调和线束.

性质2 调和点列常见变形（O为边CD中点）：

(1) $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}$；

(2) $OC^2=OB\cdot OA$；

(3) $AC\cdot AD=AB\cdot AO$；

(4) $AB\cdot OD=AC\cdot BD$.

性质3 一直线被调和线束中的三条平分当且仅当它与第四条线平行.

定义3 如图3，凸四边形$ABCD$各边延长交成的图形称为完全四边形$ABCDEF$，AC、BD、EF称为其对角线（一般的四条直线即交成完全四边形）.[3]

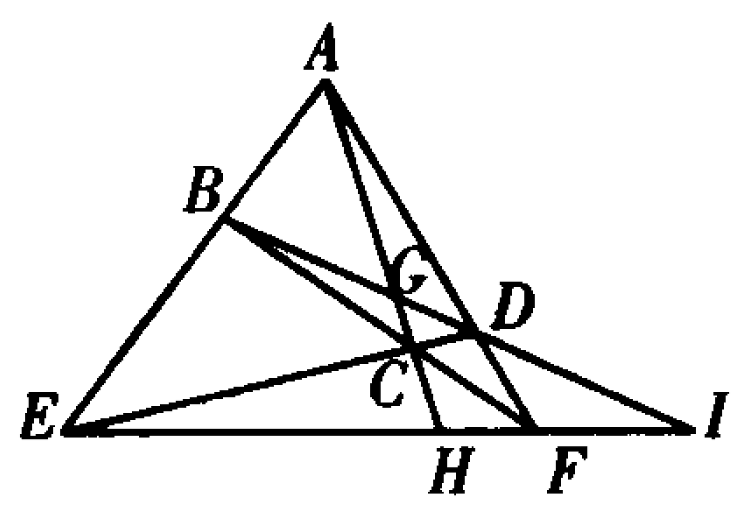

图3

性质4 完全四边形对角线互相调和分割，即A、G、C、H，B、G、D、I，E、H、F、I分别构成调和点列.

定理1 在完全四边形$ABCDEF$中，$\triangle AED$、$\triangle ABF$、$\triangle EBC$、$\triangle FDC$这四个三角

收稿日期：2010-10-21 修回日期：2010-11-24

形的外接圆共点,称为完全四边形的密克(Miquel)点.

定理 2 如图 4,到两定点 A、B 距离之比为定值 k ($k>0$,且 $k\neq 1$)的点的轨迹为圆,称为阿波罗尼斯(Apollonius)圆.

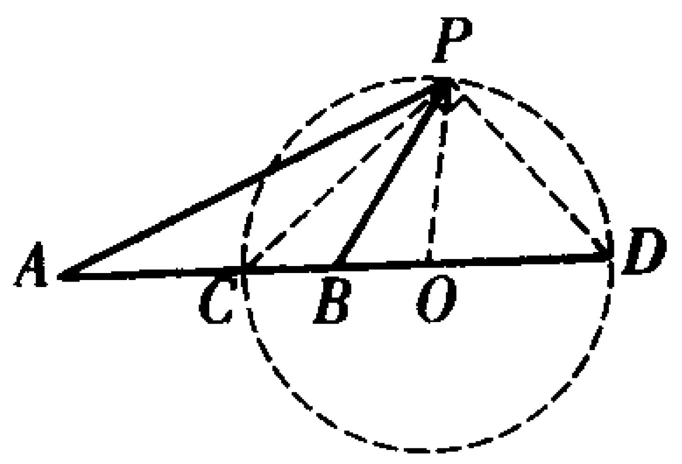

图 4

性质 5 如下三个条件中,由其中两个可推得第三个:

(1) PC(或 PD)为 $\angle APB$ 内(外)角平分线;

(2) $CP\perp PD$;

(3) A、C、B、D 构成调和点列.

定义 4 设 A、B 关于 $\odot O$ 互为反演点,过 B 作 OA 的垂线 l 称为点 A 对 $\odot O$ 的极线;A 称为 l 的极点.[4]

性质 6 若点 A 的极线为 l,过 A 的圆的割线 ACD 与 l 交于点 B,则 A、C、B、D 为调和点列.

定理 3(配极原则) 若点 A 的极线通过另一点 D,则 D 的极线也通过 A. 一般称 A、D 互为共轭点.

性质 7 A、B、C、D 是 $\odot O$ 上四点,直线 AB 与 CD、AC 与 BD、AD 与 BC 分别交于点 P、Q、R. 则三点中任意两点的连线的极点是第三点.

性质 8 若 A、D 互为共轭点,则

$AD^2=A$ 的幂 $+D$ 的幂(对 $\odot O$).

2 例题选讲

例 1 如图 5,在完全四边形 $ABCDEF$ 中,$GJ\perp EF$ 于点 J. 则

$\angle BJA=\angle DJC$.[5]

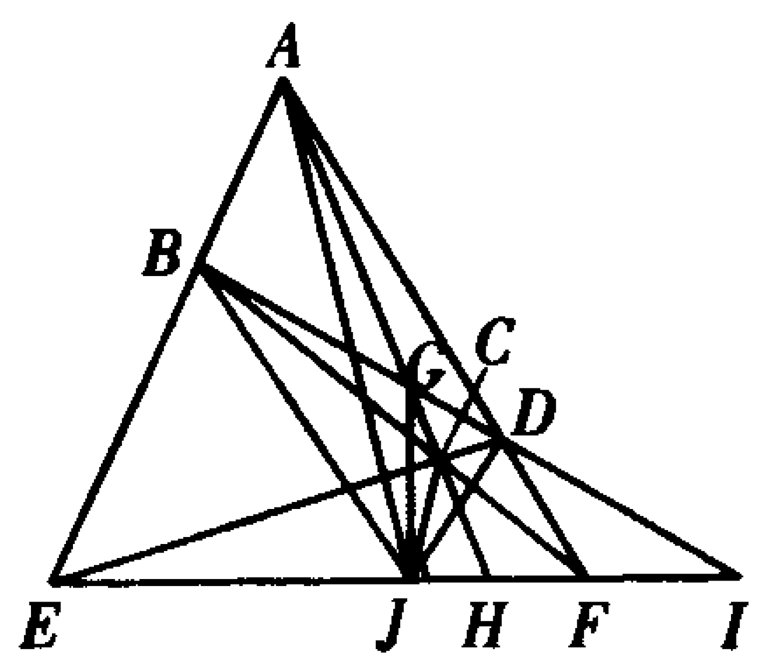

图 5

(2002,中国国家集训队选拔考试)

证明 由性质 4 及性质 5 有

$\angle BJG=\angle DJG$,$\angle AJG=\angle CJG$.

则 $\angle BJA=\angle DJC$.

例 2 如图 6,$\triangle ABC$ 内角平分线 BE 与 CF 交于点 I,$IQ\perp EF$ 与 BC 交于点 P,且 $IP=2IQ$. 求证:$\angle BAC=60°$.

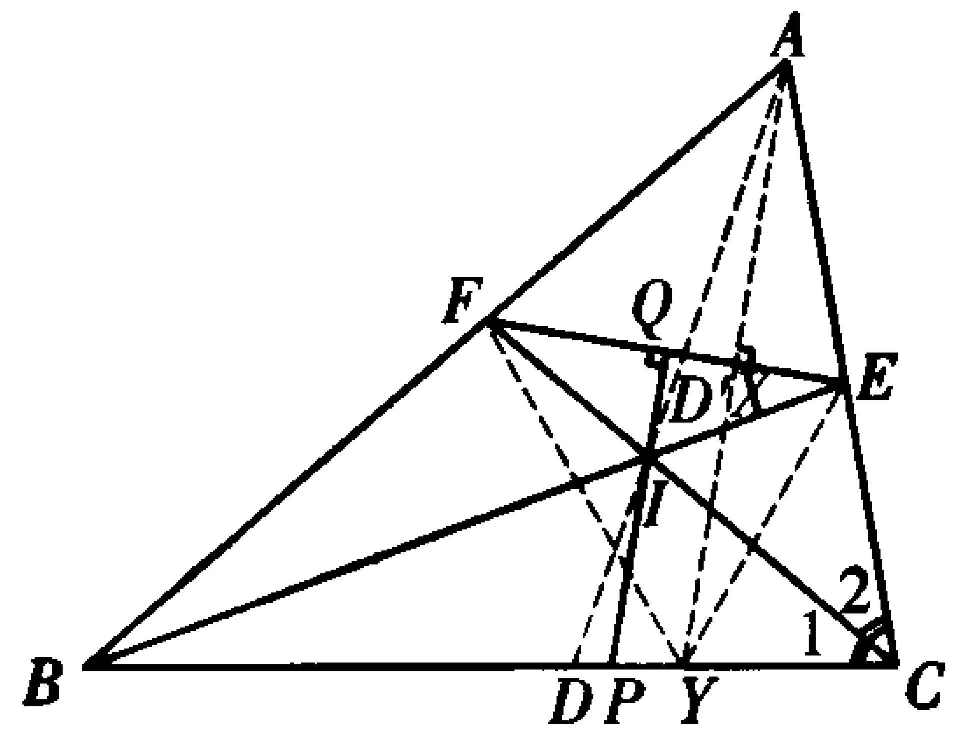

图 6

证明 如图 6,作 $AX\perp EF$ 与 BC 交于点 Y.

由性质 4 知 A、D'、I、D 为调和点列.

故 $\dfrac{IQ}{AX}=\dfrac{D'I}{D'A}=\dfrac{DI}{DA}=\dfrac{PI}{YA}$.

又 $IP=2IQ$,则 $AX=XY$,即 EF 为 AY 的中垂线.

由正弦定理得

$$\frac{CF}{\sin\angle FYC}=\frac{FY}{\sin\angle 1}$$

$$=\frac{FA}{\sin\angle 2}=\frac{CF}{\sin\angle FAC}.$$

则 A、F、Y、C 四点共圆.

同理,A、E、Y、B 四点共圆.

故 $\angle BYF=\angle BAC=\angle CYE=\angle EYF$.

所以,$\angle BAC=60°$.

例 3 如图 7,P 为 $\odot O$ 外一点,PA、PB 为 $\odot O$ 的两条切线,PCD 为任意一条割线,$CF\parallel PA$ 且与 AB 交于点 E. 求证:$CE=EF$.

(2006,IMO 中国国家集训队培训)

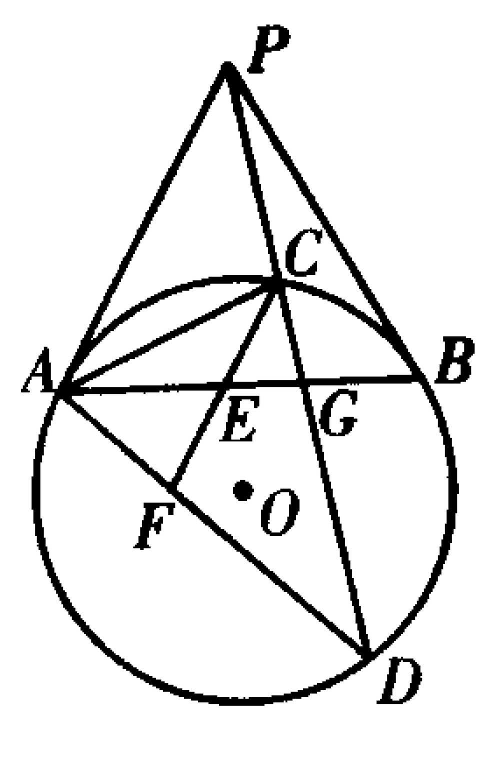

图 7

证明 由性质6及性质3即得.

例4 如图8,△ABC内切圆切边BC于点D,AD与圆交于点E,作$CF=CD$,CF与BE交于点G.求证:$GF=FC$.[6]

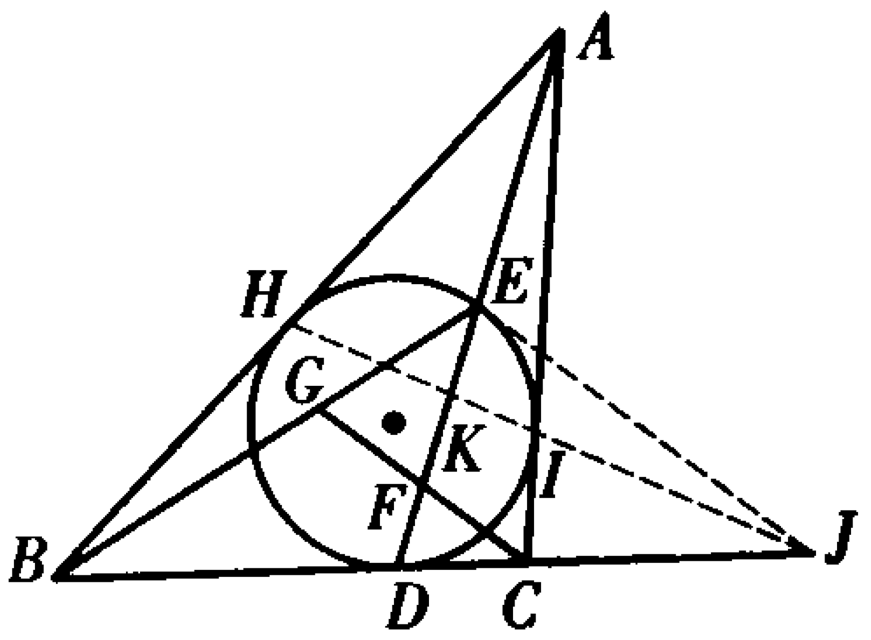

图8

(2008,IMO中国国家队选拔考试)

证明 如图8,设另两切点为H、I,HI与BD交于点J,联结JE.

由性质6知A、E、K、D为调和点列,由定理3知AD的极点在HI上.

又AD极点在BD上,则J为AD极点.

故JE为切线,B、D、C、J为调和点列.

由$CF=CD$,且$JD=JE$,知$CF/\!/JE$.

由性质3知$GF=FC$.

例5 如图9,在圆内接完全四边形$ABCDEF$中,AC与BD交于点G.则E、F、G、O构成垂心组(即任意一点是其余三点的垂心).

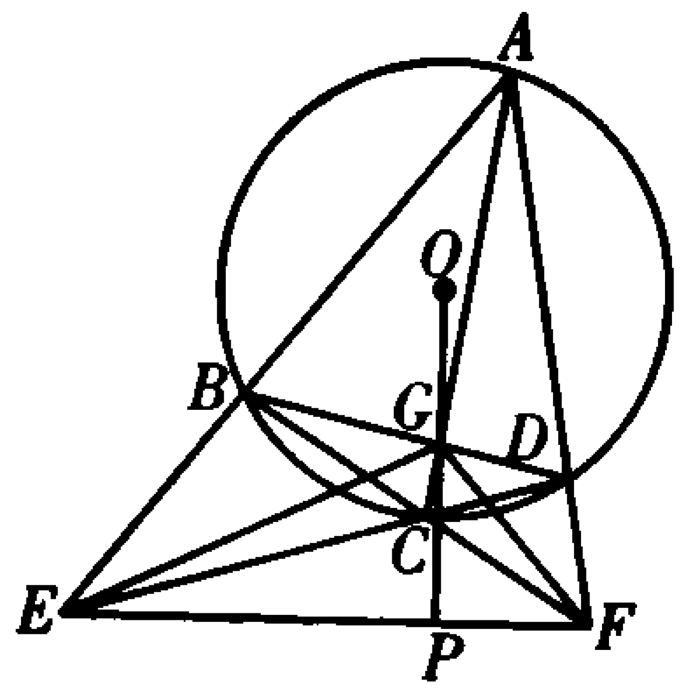

图9

证明 由定理3、性质7知E、G,F、G为两组共轭点.

由性质8知

EG^2-FG^2

$=(E$的幂$+G$的幂$)-(F$的幂$+G$的幂$)$

$=E$的幂$-F$的幂$=EO^2-FO^2$.

则$OG\perp EF$.

其余垂直同理可证.

【注】本题结论优美深刻,这在文献[7]中已有介绍,它涉及到调和点列、完全四边形、密克点、极线、阿波罗尼斯圆、垂心组等几何内容.本文开头提到的2010年联赛题为本题的逆命题.解题者在熟悉上述内容的情况下,采用反证法也就在情理之中了.

证明 如图1,假设点D不在⊙O上.

令AD与⊙O交于点E,CE与AB交于点P,BE与AC交于点Q.

由例5得$PQ/\!/MN$.

由性质4得MN、AD调和分割BC.

同理,PQ亦然.

则$PQ/\!/MN/\!/BC$.

从而,K为边BC的中点,矛盾.

故A、B、D、C四点共圆.

其实本题也可直接证明.

另证 如图10,由例1得$\angle1=\angle2$.

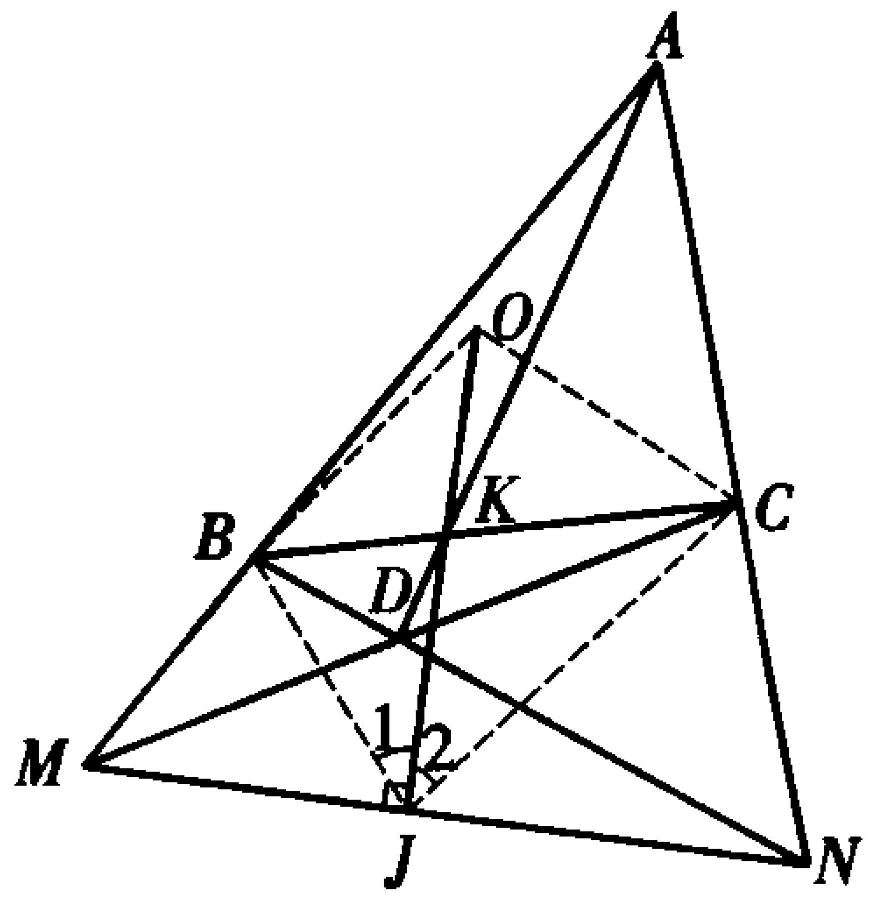

图10

又K不是边BC的中点,类似例2证明可得O、B、J、C四点共圆.

故$\angle MJB=\angle NJC$

$=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC$.

由定理1得J为完全四边形$ABDCMN$的密克点.

则$\angle BDM=\angle BJM=\angle BAN$.

故A、B、D、C四点共圆.

以例5为背景的赛题层出不穷,再举几例.

例6 设D是△ABC的边BC上一点,满足$\angle CAD=\angle CBA$.⊙O经过点B、D,并分别与线段AB、AD交于点E、F,BF与DE交于点G,M是AG的中点.求证:$CM\perp AO$.[8]

(2009,IMO中国国家队选拔考试)

证明 如图 11，设 EF 与 BC 交于点 J.

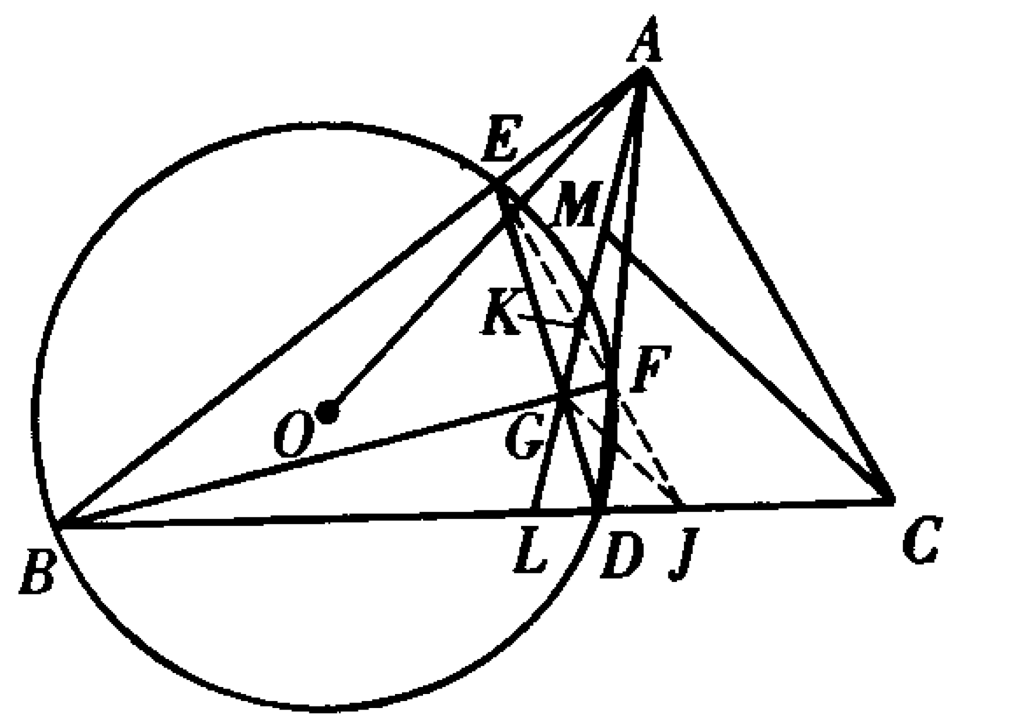

图 11

由性质 3 得 A、K、G、L 为调和点列.

由性质 2(4) 有

$LK\cdot GM=LG\cdot KA$.

又 $\angle CAD=\angle ABD=\angle JFD$，则

$EJ/\!/CA$.

故 $\dfrac{LJ}{JC}=\dfrac{LK}{KA}=\dfrac{LG}{GM}$，即 $JG/\!/CM$.

而由例 5 有 $JG\perp OA$.

故 $CM\perp AO$.

例 7 如图 12，设 $\odot O$ 的外切四边形 $A'B'C'D'$ 对边交于点 E'、F'，$A'C'$ 与 $B'D'$ 交于点 G'. 则 $OG'\perp E'F'$.

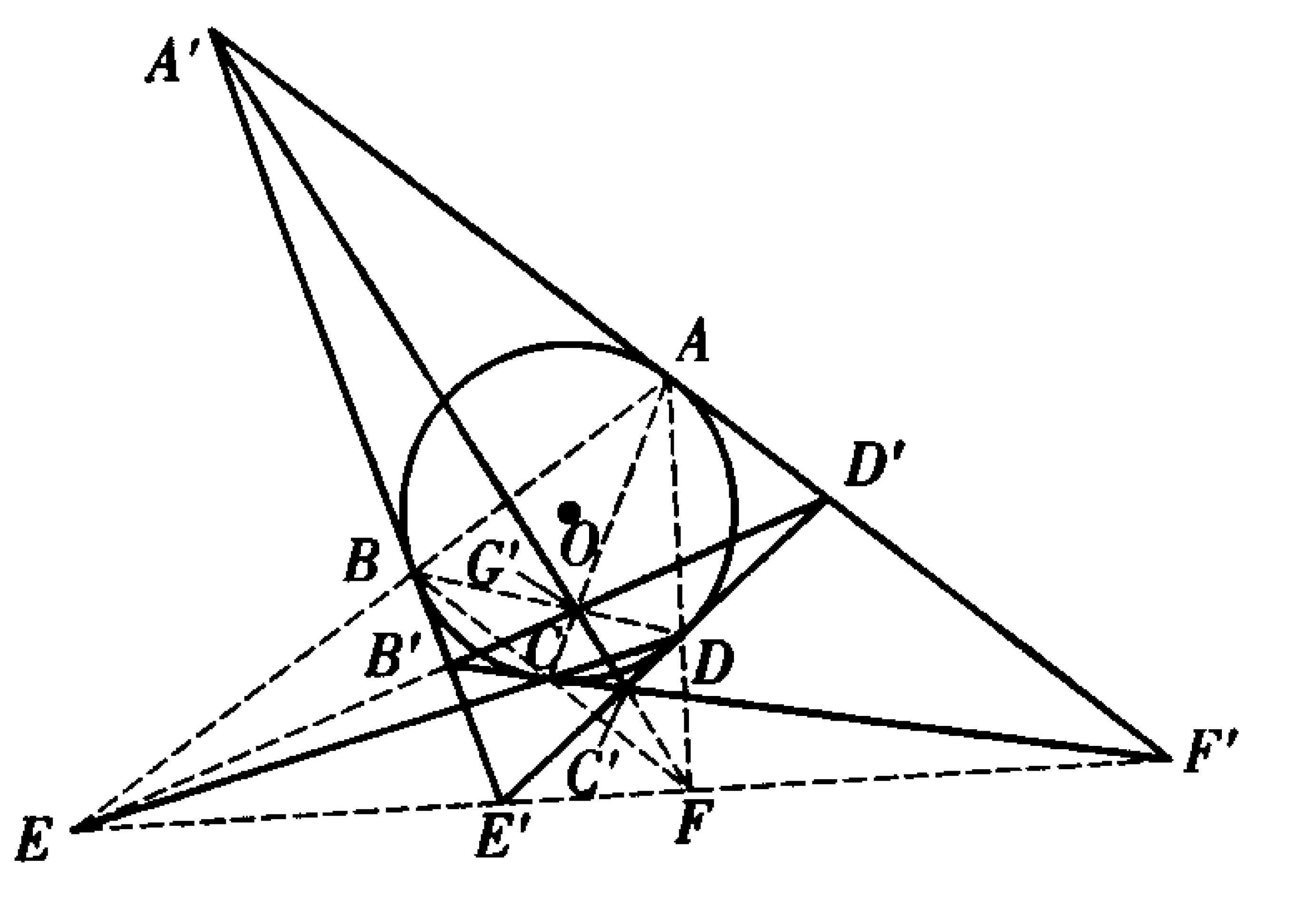

图 12

证明 如图 12，设 $\odot O$ 与其外切四边形 $A'B'C'D'$ 的四边切点分别为 A、B、C、D，AC 与 BD 交于点 G，AB 与 CD 交于点 E，AD 与 BC 交于点 F.

由性质 7 知 BD、AC 的极点 E'、F' 在 EF 上. 则点 G' 与 G 重合.

由例 5 即得 $OG'\perp E'F'$.

例 8 如图 13，四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的外切四边形，$OE\perp AC$ 于点 E. 则

$\angle BEC=\angle DEC$.

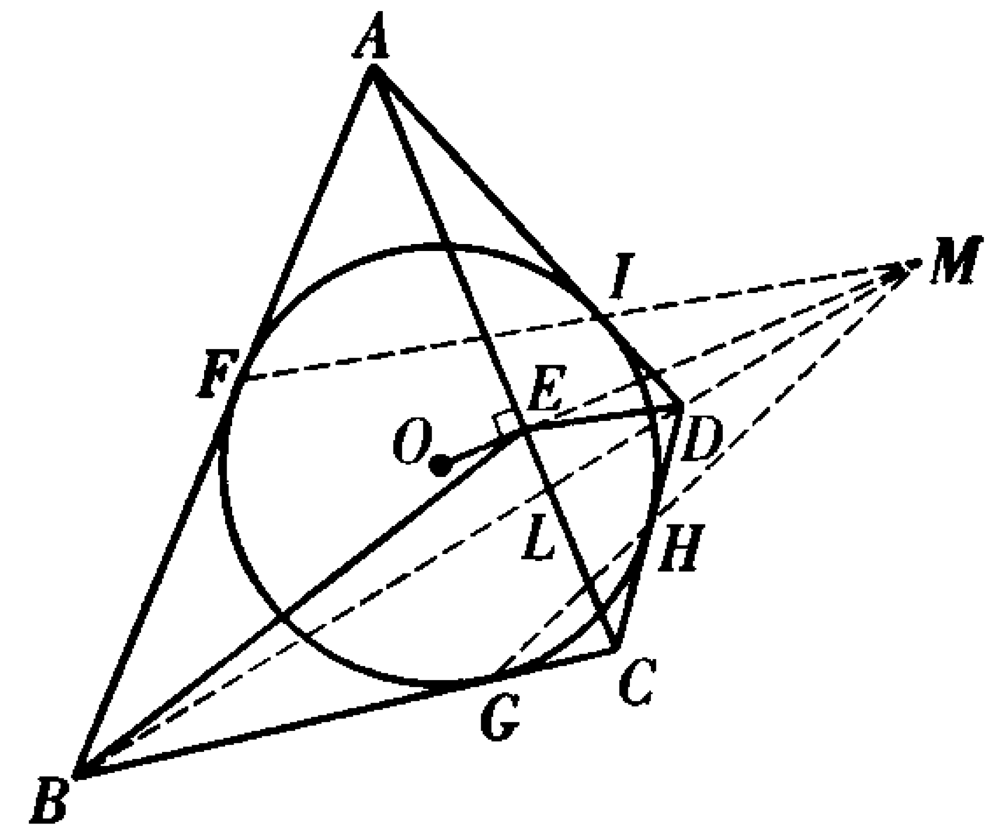

图 13

证明 如图 13，作出辅助线.

由例 7 知 FI、GH、BD 三线共点于 M，且为 AC 的极点.

从而，OE 也过点 M，且 B、L、D、M 构成调和点列.

由性质 5 得 $\angle BEC=\angle DEC$.

最后再看一道伊朗试题及其推广.

例 9 $\triangle ABC$ 内切圆 $\odot I$ 切 BC 于点 D，AD 与 $\odot I$ 交于点 K，BK、CK 与 $\odot I$ 交于点 E、F. 求证：BF、AD、CE 三线共点.

【分析】本题一般思路为塞瓦定理计算，计算量较大. 有人将其推广为对 AD 上任意一点 K，都有本结论成立（如图 14）. 对推广证明如下.

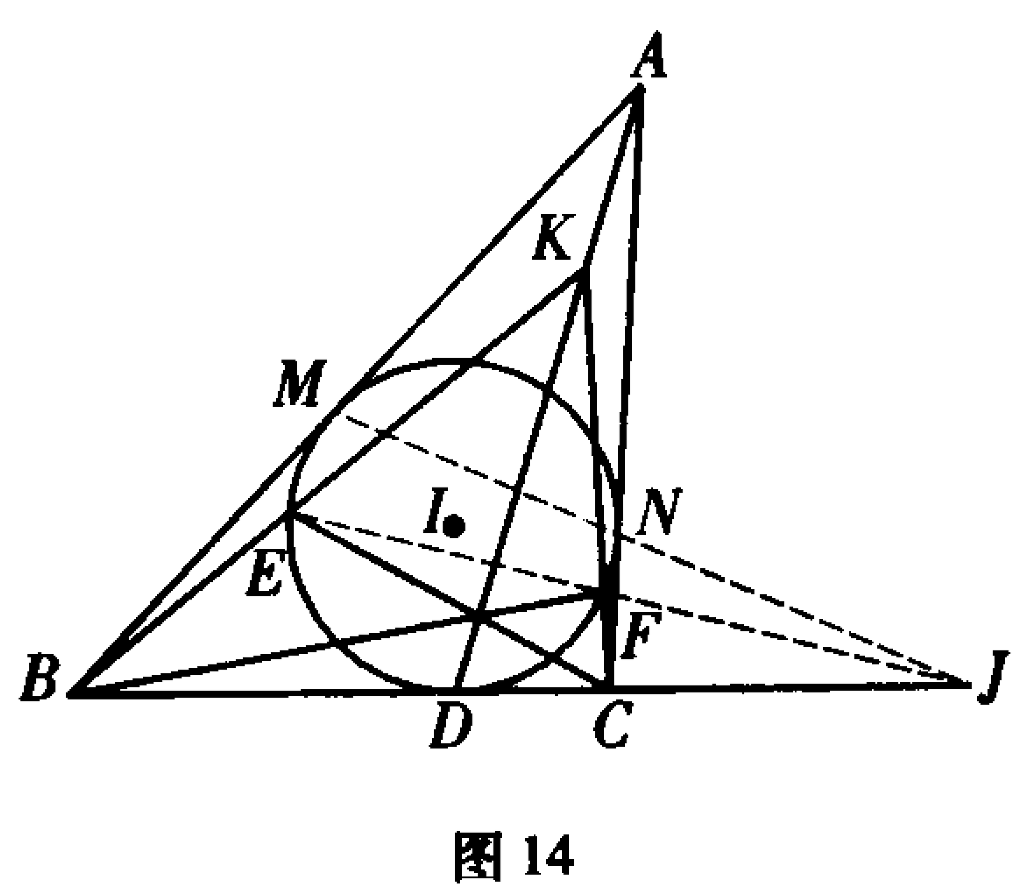

图 14

证明 如图 14，设另两个切点为 M、N，MN 与 BC 交于点 J. 由例 4 得 B、D、C、J 为调和点列，故对 AD 上的点 K，由性质 1 知 EF 必过点 J；由性质 4 对完全四边形 $BEFCJK$ 必有 CE、BF、AK 三线共点.

命题与解题

一个函数的最小值

单墫
（南京师范大学数学系，210097）

中图分类号：O174　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)03－0010－03

在 $0\leqslant a、b、c\leqslant 1$ 时，$a、b、c$ 的函数

$$f(a,b,c)=\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+c+a}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

的最大值为 1.

这是一道美国的数学竞赛题，难度不大，解题者很自然地会想到确定它的最小值.

不难猜测，当 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 时，最小值为 $\frac{7}{8}$. 但证明并不容易，本文将给出一个证明.

收稿日期：2010－12－02

1 几种特殊情形

下面给出几种特殊情形，每一种情形本身也都是一个有趣的不等式问题.

(1) 当 $a=b=c$ 时，问题化为

$$g(t)=\frac{3t}{1+2t}+(1-t)^3\geqslant\frac{7}{8}(0\leqslant t\leqslant 1). \quad ①$$

练习题

1. H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，以 BC 为直径作圆，自 A 作切线 $AS、AT$. 求证：$S、H、T$ 三点共线.

（1996，中国数学奥林匹克）

提示：本题为性质 7 特例.

2. 求证：在完全四边形 $ABCDEF$ 中，过 AC 与 BD 的交点作 AB 平行线被 $CD、EF$ 平分.

提示：由性质 4 及性质 3 即得.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，H 为 AD 上一点，$BH、CH$ 分别与对边交于点 $E、F$，EF 与 AD 交于点 K，任意作过 K 的直线与 $CF、CE、CD$ 交于点 $M、N、Q$，都有 $\angle MDF=\angle NDE$.

（2003，保加利亚数学奥林匹克）

提示：由性质 4 类比例 1 即得.

4. $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的两个顶点 $A、C$，且与边 $AB、BC$ 分别交于两个不同的点 $K、N$，又 $\triangle ABC$ 和 $\triangle KBN$ 的外接圆交于点 B 及另一点 M. 求证：$\angle OMB$ 为直角.

（第 22 届 IMO）

提示：由性质 3 及例 5 即得.

参考文献：

[1] 2010 年全国高中数学联合竞赛[J]. 中等数学，2010(12).

[2] 梅向明 等. 高等几何[M]. 北京：高等教育出版社，1988.

[3] 梁绍鸿. 初等数学复习及研究（平面几何）[M]. 哈尔滨工业大学出版社，2008.

[4] 冯克勤. 射影几何趣谈[M]. 上海教育出版社，1983.

[5] 2002 年 IMO 中国国家队选拔考试[J]. 中等数学，2003(1).

[6] 2008 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO · 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2008.

[7] 单 墫 译. 近代欧氏几何[M]. 上海教育出版社，1999.

[8] 2009 年 IMO 中国国家队选拔考试[J]. 中等数学，2009(7).

因为其导数

$$g'(t)=\frac{3}{(1+2t)^2}-3(1-t)^2$$

$$=\frac{3}{(1+2t)^2}[1-(1-t)^2(1+2t)^2]$$

$$=\frac{3}{(1+2t)^2}[1+(1-t)(1+2t)]t(2t-1)$$

在 $t=0$、$\frac{1}{2}$时为 0，且 $g(0)=g(1)=1$，所以，

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}$为最小值.

故式①成立.

(2) 当 $c=1$ 时，问题化为

$$\frac{a}{2+b}+\frac{b}{2+a}+\frac{1}{1+a+b}>\frac{7}{8}(0\leqslant a、b\leqslant 1). \quad ②$$

注意到

$$\frac{a}{2+b}+\frac{b}{2+a}-\frac{a+b}{2+\frac{a+b}{2}}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{a+b}{2}}\left[\frac{a(a-b)}{2(2+b)}-\frac{b(a-b)}{2(2+a)}\right]$$

$$=\frac{(2+a+b)(a-b)^2}{(4+a+b)(2+a)(2+b)}\geqslant 0.$$

则 $$\frac{a}{2+b}+\frac{b}{2+a}\geqslant\frac{a+b}{2+\frac{a+b}{2}}. \quad ③$$

式③的另一种证法是利用排序不等式及 $\frac{1}{2+x}$的凸性得

$$\frac{a}{2+b}+\frac{b}{2+a}\geqslant\frac{a+b}{2}\left(\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}\right)\geqslant\frac{a+b}{2+\frac{a+b}{2}}.$$

于是，式②化为

$$\frac{2a}{2+a}+\frac{1}{1+2a}>\frac{7}{8}. \quad ④$$

由 $8[2a(1+2a)+(2+a)]-7(2+a)(1+2a)$

$=18a^2-11a+2$

$\geqslant 2\times 6a-11a>0$，

知式④成立.

从而，式②成立.

(3) 当 $c=0$，$a=b$ 时，问题化为

$$d(a)=\frac{2a}{1+a}+(1-a)^2>\frac{7}{8}. \quad ⑤$$

因为 $d(0)=d(1)=1$，其导数

$$d'(a)=\frac{2}{(1+a)^2}-2(1-a)$$

$$=\frac{2a}{(1+a)^2}(a^2+a-1)$$

在 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$、0 时为 0，所以，

$$d(a)\geqslant d\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+1}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{13-5\sqrt{5}}{2}>\frac{7}{8}.$$

从而，式⑤成立.

(4) 当 $c=0$ 时，问题化为

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}+(1-a)(1-b)>\frac{7}{8}. \quad ⑥$$

不妨设 $a\geqslant b$. 将式⑥的左边看作 a 的函数 $h(a)$，其导数

$$h'(a)=\frac{1}{1+b}-\frac{b}{(1+a)^2}-(1-b)$$

$$=\frac{b[b(1+a)^2-(1+b)]}{(1+b)(1+a)^2}$$

有唯一的正的零点

$$a_0=\sqrt{\frac{1+b}{b}}-1,$$

且 $$h''(a)=\frac{2b}{(1+a)^3}\geqslant 0.$$

所以，函数 $h(a)$ 在 a_0 取最小值.

若 $a_0\leqslant b$，则 $h(a)$ 在区间 $[b,1]$ 上的最小值是

$$h(b)=\frac{2b}{1+b}+(1-b)^2.$$

由(3)知 $h(b)>\frac{7}{8}$.

若 $a_0>1$，则 $h(a)$ 在区间 $[b,1]$ 上的最小值是

$$h(1)=\frac{1}{1+b}+\frac{b}{2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{1+b}\cdot\frac{1+b}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}>\frac{7}{8}.$$

若 $b\leqslant a_0\leqslant 1$,则 $h(a)$ 在区间 $[b,1]$ 上的最小值是 $h(a_0)$.

为避免根式运算,改用 a(即 a_0,为方便起见,略去下标)来表示 b,即

$$b=\frac{1}{(1+a)^2-1},$$

$$\frac{1}{1+b}=\frac{(1+a)^2-1}{(1+a)^2}.$$

所以,最小值

$$h(a)=\frac{a[(1+a)^2-1]}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+a)[(1+a)^2-1]}+(1-a)\frac{(1+a)^2-2}{(1+a)^2-1}$$

$$=a-\frac{a}{(1+a)^2}+\frac{1}{a(1+a)(2+a)}+\frac{(1-a)(a^2+2a-1)}{a(2+a)}$$

$$=1-\frac{a}{(1+a)^2}+\frac{1}{a(1+a)(2+a)}-\frac{1-a}{a(2+a)}$$

$$=1+\frac{a}{a(2+a)(1+a)^2}-\frac{a}{a(1+a)(2+a)}$$

$$=1-\frac{a}{(1+a)^2(2+a)}$$

$$>1-\frac{a}{4a\times 2}=\frac{7}{8}.$$

2 证明不等式 $f(a,b,c)\geqslant\frac{7}{8}$

不妨设 a、b、c 中 c 最大. 记 $r=\frac{a+b}{2}$. 则 $c\geqslant r$.

证明分为三步.

首先证明:

$$f(a,b,c)\geqslant\frac{2r}{1+c+r}+\frac{c}{1+2r}+(1-c)(1-r)^2. \quad ⑦$$

式⑦$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{1+b+c}-\frac{a}{1+c+r}\right)+\left(\frac{b}{1+c+a}-\frac{b}{1+c+r}\right)$

$$\geqslant(1-c)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{a(a-b)}{2(1+b+c)(1+c+r)}-\frac{b(a-b)}{2(1+c+a)(1+c+r)}\geqslant(1-c)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(1+a+b+c)}{2(1+c+r)(1+b+c)(1+c+a)}\geqslant(1-c)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\frac{2(1+a+b+c)-(1-c)(1+c+r)(1+b+c)(1+c+a)}{(1+c+r)(1+b+c)(1+c+a)}\geqslant 0.$$

而 $2-(1-c)(1+b+c)(1+c+a)$

$$\geqslant 2-(1-c)(1+2c)^2$$

$$=1-3c+4c^3$$

$$=(1+c)(1-2c)^2$$

$$\geqslant 0,$$

于是,式⑦成立.

其次证明:在 $0\leqslant c$、$r\leqslant 1$ 时,

$$\frac{2r}{1+c+r}+\frac{c}{1+2r}+(1-c)(1-r)^2\geqslant\frac{3t}{1+2t}+(1-t)^3, \quad ⑧$$

其中,$t=\frac{2r+c}{3}$.

易知

$$r-t=\frac{r-c}{3},$$

$$c-t=\frac{2(c-r)}{3}=-2(r-t).$$

又 $(1-c)(1-r)^2-(1-t)^3$

$$=[1-t-2(t-r)][1-t+(t-r)]^2-(1-t)^3$$

$$=(1-t)(t-r)^2-4(1-t)(t-r)^2-2(t-r)^3$$

$$=(r-t)^2[-3(1-t)-2(t-2)]$$

$$=(r-t)^2(-3+t+2r),$$

$$\frac{2r}{1+c+r}-\frac{2t}{1+2t}+\frac{c}{1+2r}-\frac{t}{1+2t}$$

$$=\frac{2(r-t)(1+3t)}{(1+c+r)(1+2t)}-\frac{2(r-t)(1+3t)}{(1+2r)(1+2t)}$$

$$=\frac{6(1+3t)(r-t)^2}{(1+c+r)(1+2r)(1+2t)}.$$

从几何角度证明代数不等式

蒋国盛

（南京审计学院 2010 级数学与统计学院数学 3 班，211815）

中图分类号：O122.3　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)03－0013－03

不等式是数学竞赛中的常见题型之一，证明的方法也多种多样. 笔者发现，有一类不等式可以结合代数式的几何意义去证明. 这类问题主要是根据几何图形的凸凹性寻求不等关系，其特点是让多组对称式的求和化归成面积或长度等几何量. 下面通过实例来介绍.

例 1　设 a、b、$c>0$，$a+b+c=abc$. 求证：

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

其中，“$\sum$”表示轮换对称和.

（1998，韩国数学奥林匹克）

证明　由题意可设

$a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$，

其中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的内角. 则

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\sum\cos A.$$

因为函数 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是上凸的，所以，由琴生不等式有

$$\sum\cos A\leqslant3\cos\frac{A+B+C}{3}=\frac{3}{2}.$$

当且仅当 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$ 时，上式等号成立.

故当 $a=b=c=\sqrt{3}$ 时，原不等式等号成立.

例 2　设 x、y、$z\in\mathbf{R}$，$0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$. 求证：

收稿日期：2010－11－16

注意到

$$\begin{aligned}&(3-t-2r)(1+c+r)(1+2r)(1+2t)(1+t)\\&\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3(1+c+r)(1+2t)\\&=\frac{125}{27}[(1+3t)(1+2t)-r(1+2t)]\\&=6(1+3t)(1+t)-\frac{1+3t}{27}[162(1+t)-\\&\quad125(1+2t)]-\frac{125}{27}r(1+2t)\\&=6(1+3t)(1+t)-\frac{1+3t}{27}(37-88t)-\\&\quad\frac{125}{27}r(1+2t)\\&\leqslant6(1+3t)(1+t)-\frac{1+3t}{27}\left[37-\frac{88(1+2r)}{3}\right]-\\&\quad\frac{125}{27}r(1+2t)\\&<6(1+3t)(1+t)+\frac{1+3t}{27}\cdot\frac{176r}{3}-\\&\quad\frac{125}{27}r(1+2t)\\&=6(1+3t)(1+t)-\\&\quad\frac{r}{81}(375+750t-176-528t)\\&<6(1+3t)(1+t).\end{aligned}$$

从而，式⑧成立.

最后，由式⑦、⑧及①知，$f(a,b,c)$ 的最小值为 $\frac{7}{8}$.

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cdot\cos y+2\sin y\cdot\cos z$$

$$>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$ [1]

(1990,IMO 中国国家集训队测试题)

证明 要证原不等式即要证

$$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+$$

$$\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cdot\cos z.$$

注意到不等式右边是如图 1 所示单位圆中三个阴影矩形的面积之和,而 $\frac{\pi}{4}$ 为此单位圆在第一象限的面积,所以,上式成立.

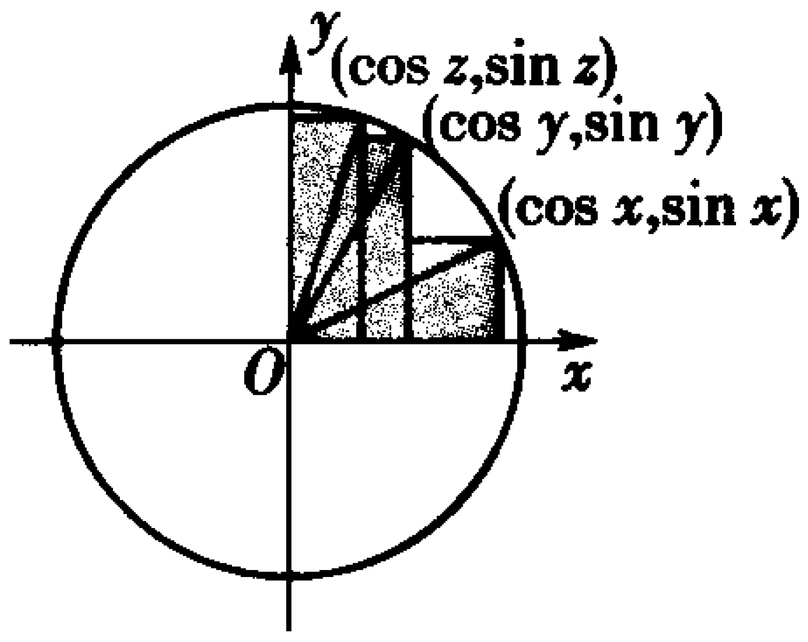

图 1

故原不等式成立.

【注】例 2 先将二倍角化为单角的正余弦,再结合三角函数线证明.这里寻找不等关系的依据是单位圆在第一象限是上凸的.

例 3 设 $n\in\mathbf{N}_+$,$x_0=0$,$x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$.求证:

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

(1996,中国数学奥林匹克)

证明 令 $\sin\theta_i=x_0+x_1+\cdots+x_i$.则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+\sin\theta_{i-1}}\cdot\sqrt{1-\sin\theta_{i-1}}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|\cos\theta_{i-1}|}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i=1.$$

当且仅当 $n=1$ 时,上式等号成立.

由题设知

$$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=\frac{\pi}{2},$$

且点 $A_i(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$ 在平面直角坐标系中第一象限的单位圆弧上.

记多边形 $A_0A_1\cdots A_nO$ 的面积为 S.

由图形几何性质有 $S<\frac{\pi}{4}$,且

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\cos\theta_{i-1}-\cos\theta_i)(\sin\theta_i+\sin\theta_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1})(\cos\theta_i+\cos\theta_{i-1}),$$

故 $$2S=\sum_{i=1}^{n}(\sin\theta_i\cdot\cos\theta_{i-1}-\cos\theta_i\cdot\sin\theta_{i-1})<\frac{\pi}{2}.$$

由前面知

$$\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}=\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}}.$$

于是,只要证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}}<\sum_{i=1}^{n}(\sin\theta_i\cdot\cos\theta_{i-1}-\cos\theta_i\cdot\sin\theta_{i-1}).$$

下面证明:

$$\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}}<\sin\theta_i\cdot\cos\theta_{i-1}-\cos\theta_i\cdot\sin\theta_{i-1}.$$

这等价于证明:

$$\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}<\sin\theta_i\cdot\cos^2\theta_{i-1}-\cos\theta_i\cdot\sin\theta_{i-1}\cdot\cos\theta_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow\cos(\theta_i-\theta_{i-1})<1,$$

这是显然成立的.所以,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}}<\sum_{i=1}^{n}(\sin\theta_i\cdot\cos\theta_{i-1}-\cos\theta_i\cdot\sin\theta_{i-1}).$$

故 $$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

【注】例 3 求面积 S 时,是将多边形分割成多个直角梯形后计算的,并且分割的方法

有两种,它们的高分别在两个坐标轴上,于是,得到两个面积表达式,再将两式相加.

例 4 求证:不等式

$$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\leqslant\frac{1}{2}(n=1,2,\cdots).$$

(2009,全国高中数学联赛)

证明 首先证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\ (n>1).$$

因为函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上是下凸的,所以,$y=\frac{1}{x}$ 的图像与 $y=0,x=1,x=n$ 所围成的面积 S 满足:

(1)小于以 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n-1}$ 为高、以 1 为长的矩形面积之和;

(2)大于以 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$ 为高、以 1 为长的矩形面积之和.

则 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\ (n>1),$$

即 $$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

故 $\ln n-1<\ln(n+2)-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}<\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$<\frac{1}{2}+\ln n\ (n>2).$$

而当 $n=1$ 时,不等式显然成立.则

$$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\leqslant\frac{1}{2}.$$ [2]

【注】本题运用了微积分方法.此类题目应注意被积函数的凸凹性,并以此寻求不等关系.其实,本题也可对函数 $y=\frac{x}{x^2+1}$ 在区间$[1,n]$上直接求定积分,但直接找该函数的原函数比较困难,可结合

$$\int_a^b\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(x)}{g(x)g'(x)}\mathrm{d}g(x)$$

求解,最终得

$$\int_1^n\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+1}{2}.$$

参考文献:

[1] 冯惠愚主编.高中新课标数学提优教程(二)[M].南京:江苏教育出版社,2007.

[2] 2009 年全国高中数学联赛加试题另解[J].中等数学,2009(12).

初等数学研究

浅析一道 IMO 预选题

高 凯

（安徽省砀山中学，235300）

中图分类号：O123.1 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)03－0016－02

这是第 35 届国际数学奥林匹克的一道预选题.

题目 如图 1，在一条直线 l 的一侧画一个半圆 Γ，分别过半圆 Γ 上两点 C、D 作 Γ 的切线与 l 交于点 B、A，且使 Γ 的圆心在线段 AB 上，AC 与 BD 交于点 E，过 E 作 $EF \perp l$ 于点 F. 求证：EF 平分 $\angle CFD$.

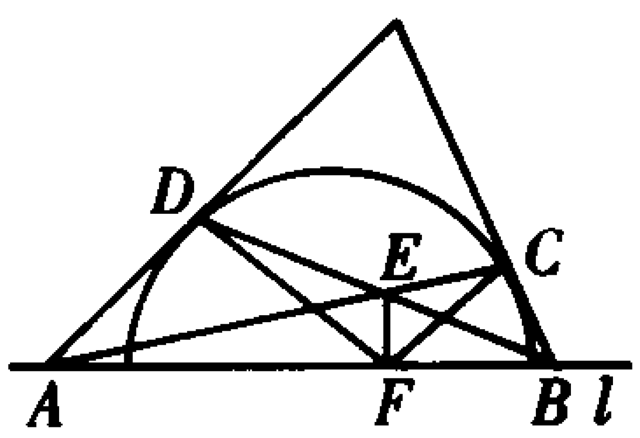

图 1

文[1]的证明采用的是解析法，并将结论推广到圆锥曲线中，形成了一般性的结论. 直线与圆锥曲线相切是圆锥曲线中的一类比较重要的问题. 笔者通过深入研究此题，又发现了几个比较重要的结论.

结论 1 如图 2，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，C、D 是椭圆上 x 轴同侧的两个点，分别过 C、D 作椭圆的切线交于点 P，且分别与 x 轴交于点 B、A，AC 与 BD 交于点 E，作 $EF \perp AB$ 于点 F. 求证：

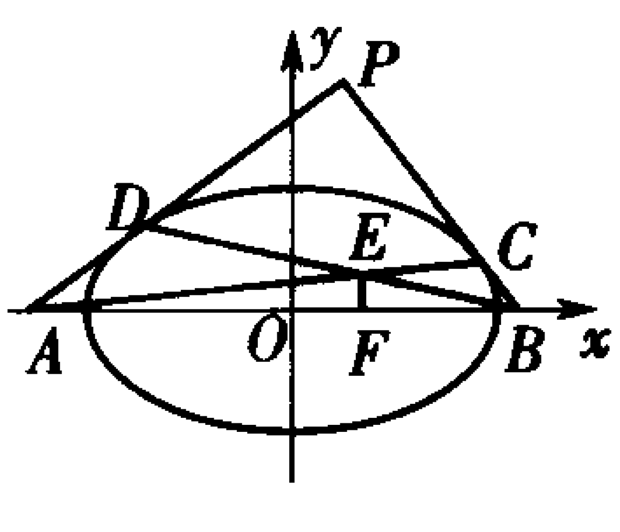

图 2

(1) P、E、F 三点共线；

(2) 若 F 为椭圆的焦点，则直线 CD 过定点.

收稿日期：2010－10－15

证明 (1) 设 $P(x_0,y_0)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$. 则切线 CB、DA 的方程分别为

$$l_{CB}:\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1, \quad ①$$

$$l_{DA}:\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}=1. \quad ②$$

故 $A\left(\frac{a^2}{x_2},0\right)$，$B\left(\frac{a^2}{x_1},0\right)$.

因为 P 为两条切线的交点，所以，将 $P(x_0,y_0)$ 代入式①、②并联立得

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{1-\frac{x_1x_0}{a^2}}{1-\frac{x_2x_0}{a^2}}=\frac{a^2-x_1x_0}{a^2-x_2x_0}. \quad ③$$

又 $$l_{AC}:y=\frac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{x_2}}\left(x-\frac{a^2}{x_2}\right), \quad ④$$

$$l_{BD}:y=\frac{y_2}{x_2-\frac{a^2}{x_1}}\left(x-\frac{a^2}{x_1}\right). \quad ⑤$$

联立式④、⑤消去 y 并利用式③解得 $x_E=x_0$.

又 $EF \perp AB$，则 $x_E=x_F=x_0$.

故 P、E、F 三点共线.

(2) 不妨设 F 为椭圆的右焦点，由 (1) 知点 $P(c,y_0)$，切点弦 CD 的方程为

$$\frac{cx}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

令 $y=0$. 则 $x=\frac{a^2}{c}$.

所以,直线 CD 过定点$\left(\frac{a^2}{c},0\right)$.

结论 2　如图 3,已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$,C、D 是双曲线上 x 轴同侧的两个点(且分别在双曲线的两支上),分别过 C、D 作双曲线的切线,两条切线交于点 P,且分别与 x 轴交于点 B、A,AC 与 BD 交于点 E,作 $EF\perp AB$ 于点 F. 求证:

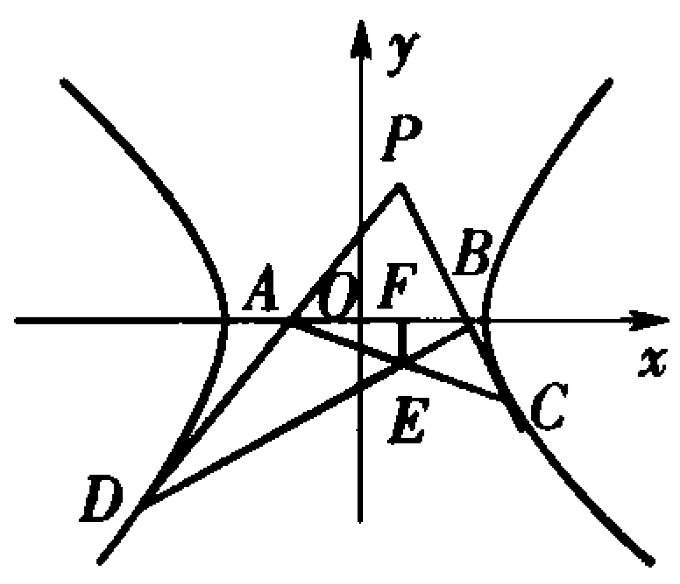

图3

(1)P、E、F 三点共线;

(2)若 F 为准线与 x 轴的交点,则直线 CD 过定点.

证明过程与结论 1 相似,其中,(2)中的定点为与准线相应的焦点.

结论 3　如图 4,已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$,C、D 是抛物线上 x 轴同侧的两个点,分别过 C、D 作抛物线的切线,两条切线交于点 P,且分别与 x 轴交于点 B、A,AC 与 BD 交于点 E,作 $EF\perp AB$ 于点 F. 求证:

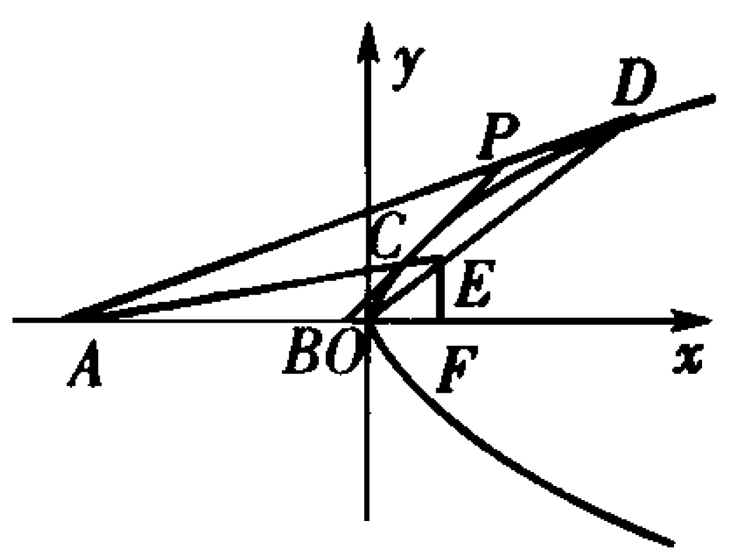

图4

(1)P、E、F 三点共线;

(2)若 F 为抛物线的焦点,则直线 CD 过定点.

证明　(1)设 $P(x_0,y_0)$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$. 则切线 CB、DA 的方程分别为

$$l_{CB}:y_1y=p(x+x_1), \qquad ①$$

$$l_{DA}:y_2y=p(x+x_2). \qquad ②$$

故 $A(-x_2,0)$,$B(-x_1,0)$.

因 P 为两切线的交点,所以,将 $P(x_0,y_0)$ 代入式①、②并联立得

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{x_0+x_1}{x_0+x_2}. \qquad ③$$

又 $l_{AC}:y=\frac{y_1}{x_1+x_2}(x+x_2)$, ④

$$l_{BD}:y=\frac{y_2}{x_1+x_2}(x+x_1). \qquad ⑤$$

联立式④、⑤消去 y 并利用式③解得

$x_E=x_0$.

又 $EF\perp AB$,则 $x_E=x_F=x_0$.

故 P、E、F 三点共线.

(2)由题意知点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

由(1)知点 $P\left(\frac{p}{2},y_0\right)$,切点弦 CD 的方程为

$$y_0y=p\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

令 $y=0$. 则 $x=-\frac{p}{2}$.

所以,直线 CD 过定点$\left(-\frac{p}{2},0\right)$.

上述结论是笔者用几何画板作图时“无意间”发现的. 几何画板作为优秀的数学软件,为我们提供一种先发现结论再去证明结论的方式. 笔者试着利用几何画板作进一步探究,结果又得到了“意外”收获.

结论 4　如图 5,已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,C、D 是椭圆上 x 轴同侧的两个点,分别过 C、D 作椭圆的两条切线交于点 P,且分别与 x 轴交于点 B、A,线段 AC 与 BD 交于点 E,作 $EF\perp AB$ 于点 F,线段 EF 反向延长线分别与 CD 交于点 M,与椭圆交于点 N. 求证:

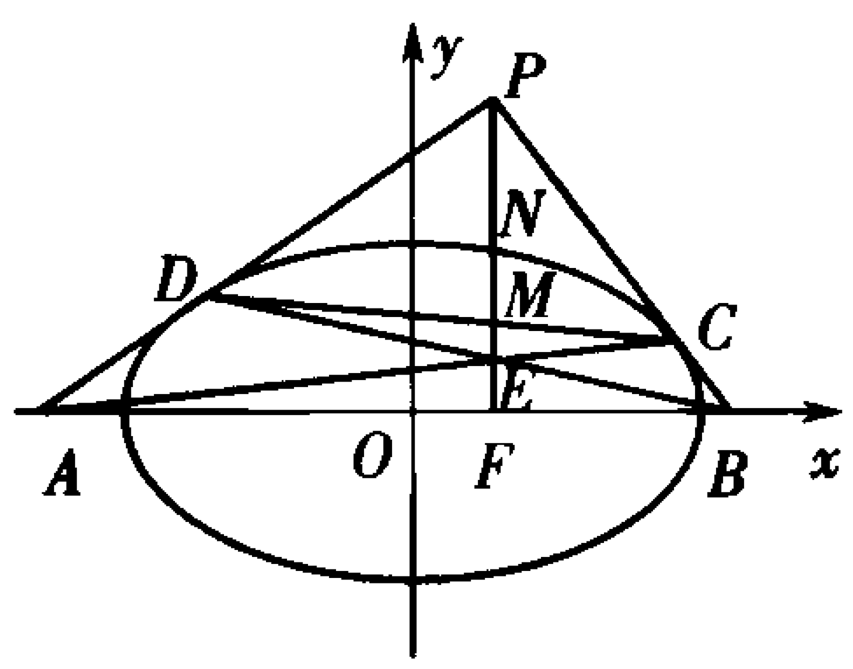

图5

专题写作

一个优美不等式与一道IMO试题同出一辙

郑日锋

（浙江省杭州学军中学，310012）

中图分类号：O122.3 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)03－0018－01

安振平老师在文[1]中提出了第19个优美不等式：

若 a、b、c 为正数，$a+b+c=3$. 求证：

$$\left(\frac{3}{a}-2\right)\left(\frac{3}{b}-2\right)\left(\frac{3}{c}-2\right)\leqslant 1.$$

笔者对此进行了探究，给出如下的简证：

由题意知，所证不等式等价于

$$\left(\frac{a+b+c}{a}-2\right)\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)\left(\frac{a+b+c}{c}-2\right)\leqslant 1,$$

即 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$\leqslant abc. \quad ①$$

由于式①关于 a、b、c 对称，故不妨设

$a\geqslant b\geqslant c>0$.

因此，$c+a-b>0$，$a+b-c>0$.

若 $b+c-a\leqslant 0$，则

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant 0<abc$.

若 $b+c-a>0$，则

$$a=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}$$

$$\geqslant\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}.$$

同理，$b\geqslant\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$，

$c\geqslant\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$.

将以上三个不等式相乘得

$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant abc$.

故原不等式成立.

问题1 设 a、b、$c>0$，且 $abc=1$. 证明：

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1.$$

（第41届IMO）

笔者与学生一起探究，得到如下证法：

设 $a=\frac{x}{y}$，$b=\frac{y}{z}$，$c=\frac{z}{x}$ $(x、y、z>0)$.

则所证不等式等价于

$$(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x)\leqslant xyz. \quad ②$$

由于式①、②实质上是一样的，故证明完全相同.

参考文献：

[1] 李慧，郭璋. 一道IMO预选题的证明与推广[J]. 数学通讯，2009(11下).

收稿日期：2010－08－31

$PM^2=PF^2+MF^2-2NF^2$.

证明 设 $P(x_0,y_0)$. 则切点弦 CD 的方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \quad ①$$

由结论1得 $x_N=x_M=x_0$.

则 $y_M=\frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$，$y_N^2=b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$.

故 $PM^2=(y_0-y_M)^2$

$$=y_0^2+y_M^2-2b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

$$=y_0^2+y_M^2-2y_N^2$$

$$=PF^2+MF^2-2NF^2.$$

【注】仿照结论4，还可以在双曲线和抛物线中得出同样结论.

关于曼海姆定理推广的证明

龙明旺
（湖南师范大学数学科学学院08级研究生，410081）
万喜人
（湖南图书馆培训楼戴舞云学校，410000）

中图分类号：O123.1　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)03-0019-02

曼海姆(Mannheim)定理　一圆切$\triangle ABC$的两边AB、AC及外接圆于点P、Q、T. 则PQ必通过$\triangle ABC$的内心.[1]

2007年IMO中国国家集训队教练组将此定理推广，成为如下测试题.

题目　凸四边形$ABCD$内接于圆Γ，与边BC相交的一个圆$\odot O$与圆Γ内切，且分别与BD、AC切于点P、Q. 求证：$\triangle ABC$的内心与$\triangle DBC$的内心皆在直线PQ上.[2]

显然，曼海姆定理是此题中点D与A重合时的特殊情形.

下面给出测试题的两种新证法.

证法1　如图1，过两圆的切点T作公切线KL，延长PQ与CD交于点R，联结TP并延长与圆Γ交于点G，联结CG分别与PQ、BD交于点I、H. 设AC与BD交于点E，TC、

收稿日期：2010-06-02

由此可见，第19个不等式与此IMO试题同出一辙，最终都归结为如下的问题2.

问题2　设a、b、$c>0$. 求证：

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leqslant abc.$$

笔者进一步研究，提出问题：能否将第19个不等式推广到n个正数的情况？

于是，得到了如下的命题1.

命题1　若$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}$，$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. 则

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{a_i}-(n-1)\right]\leqslant 1.$$

容易验证当$n=2$时，命题成立.

但当$n\geqslant 4$时，命题均不成立，如取a_1、a_2为大于$\frac{n}{n-1}$的充分接近$\frac{n}{2}$的数，而$a_3,a_4,\cdots,a_n$充分接近0，则

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{a_i}-(n-1)\right]>1.$$

而当$n\geqslant 4$时，可以适当增加条件，使命题为真命题，于是，得到了命题2.

命题2　若$n\geqslant 4$，$n\in\mathbf{N}$，$0<a_i<\frac{n}{n-1}(i=1,2,\cdots,n)$，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. 则

$$\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{a_i}-(n-1)\right]\leqslant 1.$$

命题2的证明　由$0<a_i<\frac{n}{n-1}$，得

$$\frac{n}{a_i}-(n-1)>0(i=1,2,\cdots,n).$$

于是，只需证：

$$\prod_{i=1}^{n}[n-(n-1)a_i]\leqslant a_1a_2\cdots a_n. \qquad ③$$

由均值不等式得

$$a_i=\frac{\sum\limits_{j=1(j\neq i)}^{n}[n-(n-1)a_j]}{n-1}$$

$$\geqslant\sqrt[n-1]{\prod_{j=1(j\neq i)}^{n}[n-(n-1)a_j]}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

将以上n个不等式相乘，即得式③.

因此，命题2得证.

参考文献：

[1] 安振平. 二十六个优美不等式[J]. 中学数学教学参考，2010(1~2)(上).

TD 分别与 $\odot O$ 交于点 M、N.

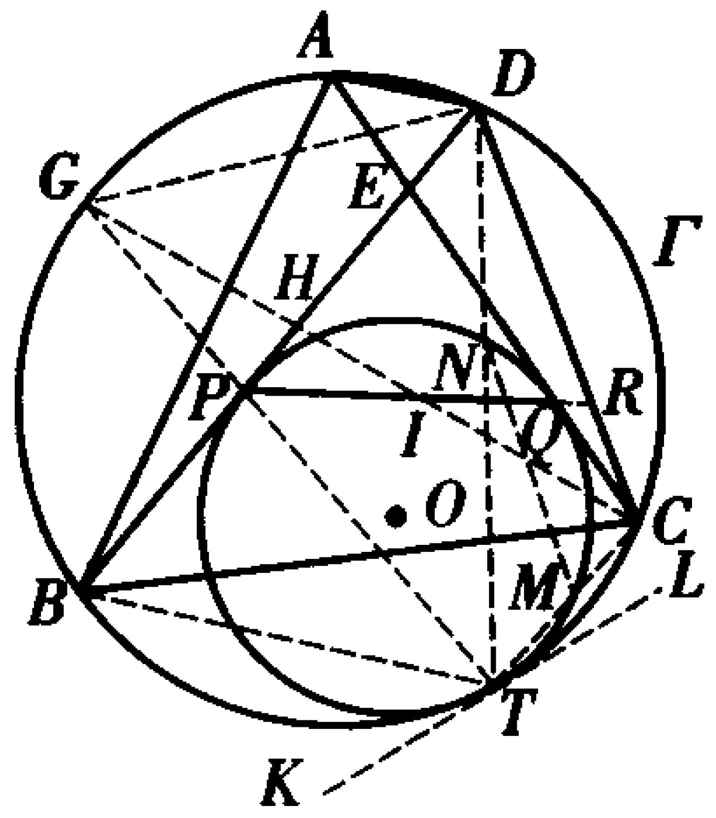

图1

由 $\angle KTB + \angle BTP = \angle KTP = \angle BPT = \angle PDT + \angle DTP$，$\angle KTB = \angle PDT$，

故 $\angle BTP = \angle DTP$，即 G 为弧 $\overparen{BAD}$ 的中点.

因此，CI 平分 $\angle BCD$.

下面证明：DI 平分 $\angle BDC$.

因为直线 HIC、PQR 分别截 $\triangle PDR$、$\triangle CDE$，所以，由梅涅劳斯定理分别得

$$\frac{PI}{IR}\cdot\frac{RC}{CD}\cdot\frac{DH}{HP}=1, \quad ①$$

$$\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QE}\cdot\frac{EP}{PD}=1.$$

又 $EP = QE$，则

$$RC=\frac{DR\cdot CQ}{PD}. \quad ②$$

因为 $\triangle GDP \backsim \triangle GTD$，所以，

$$\frac{DH}{HP}=\frac{GD\sin\angle DGH}{GP\sin\angle PGH}=\frac{TD}{DP}\cdot\frac{CD}{TC}. \quad ③$$

由 $\angle TNM = \angle MTL = \angle TDC$，得 $NM /\!/ DC$.

故 $\dfrac{DP^2}{CQ^2}=\dfrac{TD\cdot DN}{TC\cdot CM}=\dfrac{TD^2}{TC^2}$，即 $\dfrac{TD}{TC}=\dfrac{DP}{CQ}$.

将上式代入式③得 $\dfrac{DH}{HP}=\dfrac{CD}{CQ}$.

将上式及式②代入式①得 $\dfrac{PI}{IR}=\dfrac{PD}{DR}$.

故 DI 平分 $\angle BDC$.

因此，$\triangle DBC$ 的内心 I 在直线 PQ 上.

同理，$\triangle ABC$ 的内心在直线 PQ 上.

证法2 同证法1，知 CI 平分 $\angle BCD$.

下面证明：BI 平分 $\angle DBC$.

如图2，设 TA、TB 分别与 $\odot O$ 交于点 N、M. 注意到

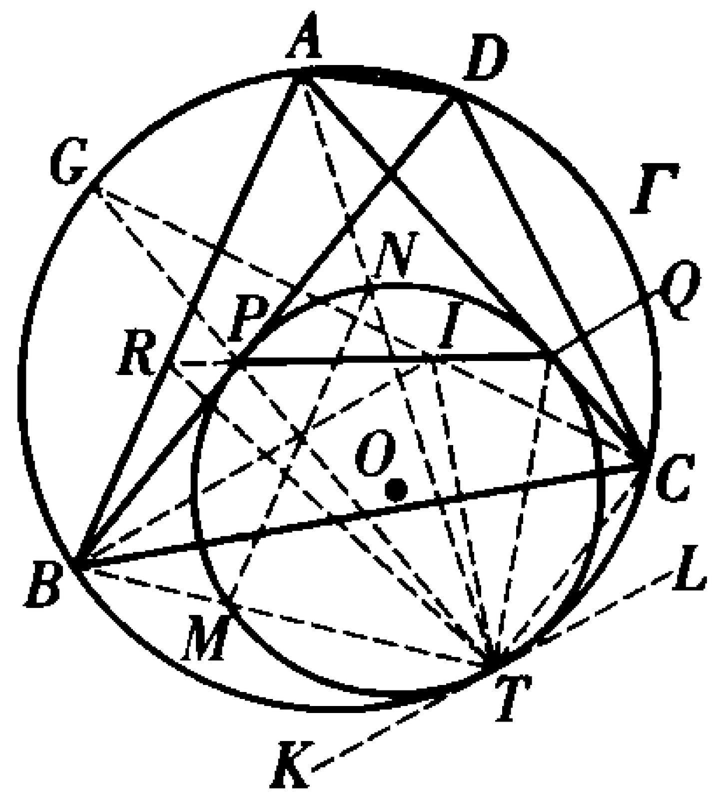

图2

$$\frac{BR}{BP}=\frac{\sin\angle RPB}{\sin\angle BRP}=\frac{\sin\angle AQP}{\sin\angle ARQ}=\frac{AR}{AQ},$$

即 $\dfrac{BR}{AR}=\dfrac{BP}{AQ}$.

由 $\angle MNT = \angle MTK = \angle BAT$，知 $NM /\!/ AB$.

故 $\dfrac{BP^2}{AQ^2}=\dfrac{BM\cdot BT}{AN\cdot AT}=\dfrac{BT^2}{AT^2}$.

所以，$\dfrac{BR}{AR}=\dfrac{BT}{AT}$.

则 $\angle BTR = \angle ATR = \dfrac{1}{2}\angle ATB = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

由 $\angle IQT = \angle PTK = \angle GCT = \angle ICT$，知 I、T、C、Q 四点共圆.

从而，$\angle QIT = 180° - \angle QCT = \angle RBT$.

于是，I、T、B、R 四点共圆.

故 $\angle BIP = \angle BTR = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \dfrac{1}{2}\angle QCB$.

则
$$\angle PBI = 180° - \angle BPI - \angle BIP = 180° - \frac{1}{2}(360° - \angle PBC - \angle QCB) - \frac{1}{2}\angle QCB = \frac{1}{2}\angle PBC,$$

即 BI 平分 $\angle DBC$.

所以，I 是 $\triangle DBC$ 的内心，即 $\triangle DBC$ 的内心在直线 PQ 上.

同理，$\triangle ABC$ 的内心在直线 PQ 上.

参考文献：

[1] 陈圣德. 平面几何一题多证[M]. 福州：福建人民出版社. 1985.7.

[2] 2007年IMO中国国家集训队教练组. 走向IMO・数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2007.8.

竞赛之窗

2011 中国数学奥林匹克

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)03－0021－04

第 一 天

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant3)$ 是实数.证明：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2,$$

其中，$a_{n+1}=a_1$，$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，$m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

（姚一隽　供题）

2. 如图 1，设 D 是锐角$\triangle ABC$ 外接圆 Γ 上弧$\overparen{BC}$的中点，点 X 在弧$\overparen{BD}$上，E 是弧$\overparen{ABX}$的中点，S 是弧$\overparen{AC}$上一点，直线 SD 与 BC 交于点 R，SE 与 AX 交于点 T. 证明：若 $RT/\!/DE$，则$\triangle ABC$ 的内心在直线 RT 上.

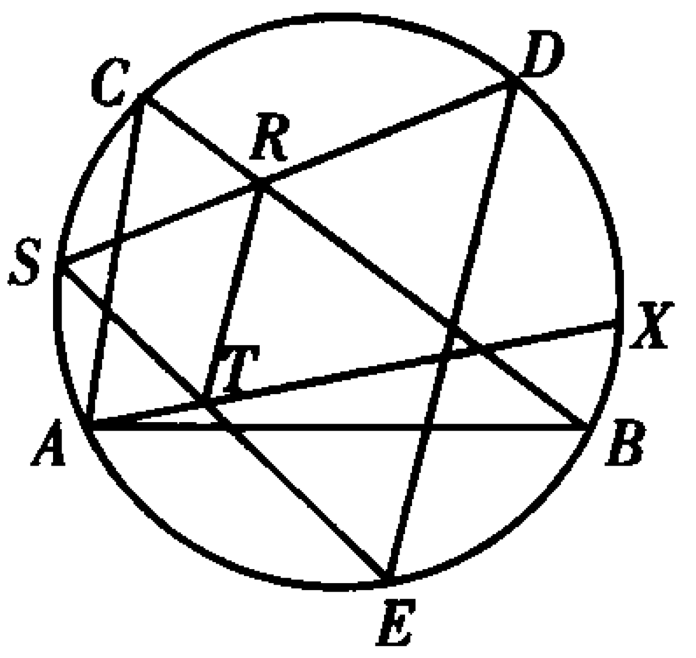

图 1

（熊　斌　供题）

3. 设 A 是一个有限实数集，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 A 的非空子集，满足

(1) A 中所有元素之和为 0；

(2) 对任意 $x_i\in A_i(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $x_1+x_2+\cdots+x_n>0$.

证明：存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，使得

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|<\frac{k}{n}|A|,$$

其中，$|X|$表示有限集合 X 的元素个数.

（瞿振华　供题）

第 二 天

4. 设 n 是给定的正整数，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$. 对非空的有限实数集合 A 和 B，求 $|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|$的最小值，其中，

$$C=A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\},$$

$$X\otimes Y=\{x\mid x\text{ 恰好属于 } X \text{ 和 } Y \text{ 中的一个}\},$$

$|X|$表示有限集合 X 的元素个数.

（冷岗松　供题）

5. 给定整数 $n(n\geqslant4)$，对任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$

的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}$$

的最大值.

（朱华伟　付云皓　供题）

6. 求证：对于任意给定的正整数 m、n，总存在无穷多组互质的正整数 a、b，使得

$$(a+b)\mid(am^a+bn^b).$$

（陈永高　供题）

参 考 答 案

第 一 天

1. 若 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}_+)$，则

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$
$$\leqslant n(M-m)^2.$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\frac{n}{2}(M-m)^2$

$$=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2.$$

若 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$，则对于循环排列的 $2k+1$ 个数，必有连续三项递增或递减.

究其原因，由于

$$\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)$$
$$=\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})^2\geqslant 0,$$

于是，不可能对于每一个 i，都有 a_i-a_{i-1} 与 $a_{i+1}-a_i$ 异号.

不妨设连续三项为 a_1、a_2、a_3. 则有

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2\leqslant(a_1-a_3)^2.$$

故 $2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$
$$\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2.$$

这就将问题转化为 $2k$ 个数的情形.

于是，有

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)$$
$$\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$
$$\leqslant 2k(M-m)^2,$$

即 $$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\leqslant k(M-m)^2$$
$$=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2.$$

2. 如图 2，联结 AD 与 RT 交于点 I.

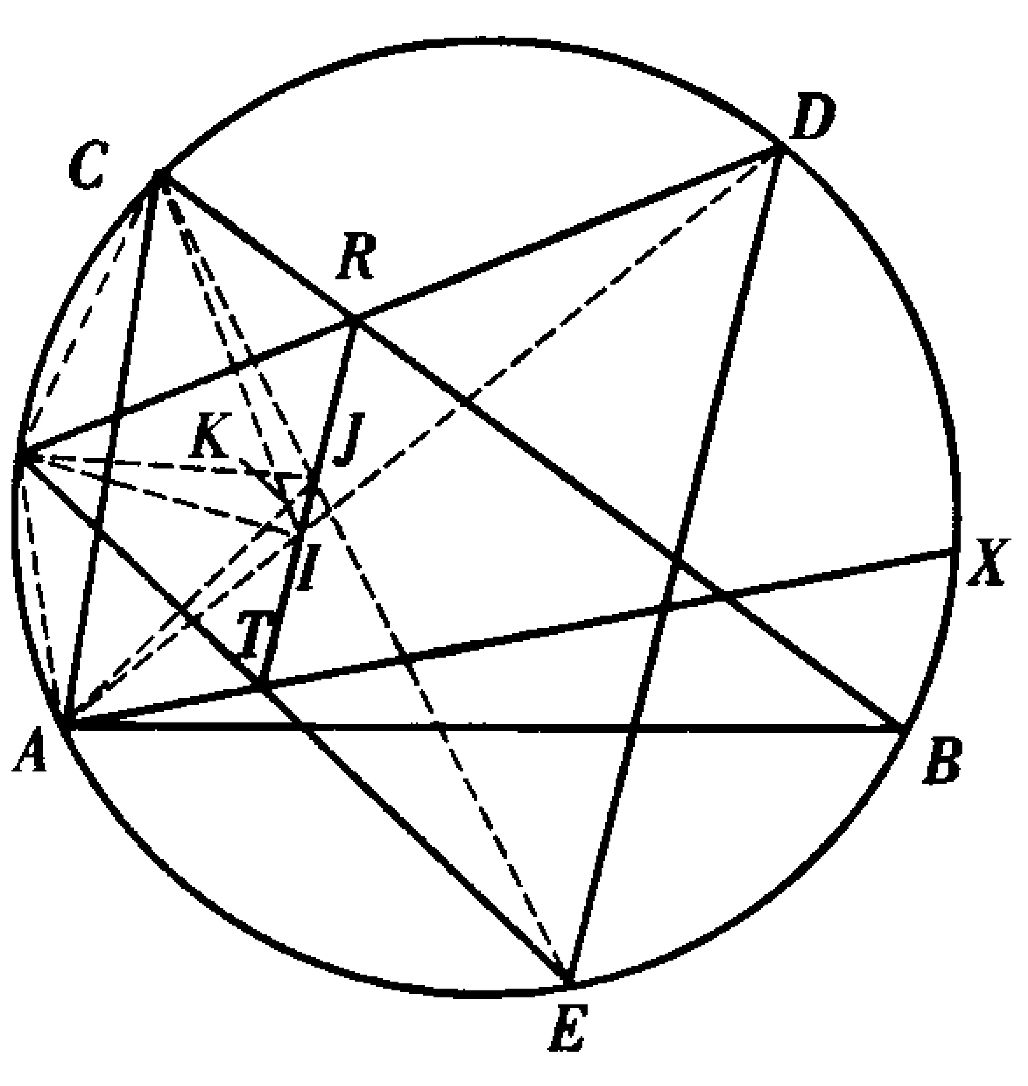

图2

因 D 是弧 $\overparen{BC}$ 的中点，所以，AI 为 $\angle BAC$ 的角平分线.

联结 AS、SI. 则由 $RT/\!/DE$，知

$\angle STI=\angle SED=\angle SAI$.

故 A、T、I、S 四点共圆（记此圆为 ω_1）.

联结 CE 与 RT 交于点 J，联结 SC. 则

$\angle SRJ=\angle SDE=\angle SCE$.

于是，S、J、R、C 四点共圆（记此圆为 ω_2）.

设圆 ω_1、ω_2 除点 S 外另一个交点为 K.

接下来证明：AJ 与 CI 交于点 K.

设圆 ω_1 与 AJ（除点 A 外）的交点为 K_1.

由于 E 是弧 $\overparen{AX}$ 的中点，于是，

$\angle SK_1A=\angle STA$

$=\frac{1}{2}(\overparen{SA}+\overparen{XE})=\frac{1}{2}(\overparen{SA}+\overparen{AE})$

$=\angle SDE=\angle SRT=\angle SRJ$.

故 S、K_1、J、R 四点共圆.

于是，点 K_1 在圆 ω_2 上.

同理，设圆 ω_2 与 CI（除点 C 外）另一个交点为 K_2. 则点 K_2 在圆 ω_1 上.

所以，点 K_1 与 K_2 重合，且为 AJ 与 CI 的交点，即 K 为 AJ 与 CI 的交点.

因为 $\angle CAD=\angle CAI$，且

$\angle TJE=\angle CJR=\angle CED=\angle CAD$，

所以，A、I、J、C 四点共圆.

因而，$\angle ACI=\angle AJI$.

又由 C、K、J、R 四点共圆知

$\angle BCI=\angle ICR=\angle AJI$.

因此，$\angle ACI=\angle BCI$.

故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

3. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$a_1>a_2>\cdots>a_m$. 则由条件(1)知

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=0.$$

考虑每个 A_i 中的最小数，并设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中恰有 k_i 个集合的最小数为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$.

于是，$\sum_{i=1}^{m}k_i=n$，且由条件(2)知

$$\sum_{j=1}^{m}k_ja_j>0.$$

对 $s(1\leqslant s\leqslant m-1)$，共有 $\sum_{i=1}^{s}k_i$ 个集合，其最小数大于或等于 a_s. 故这些集合的并集

包含在$\{a_1,\cdots,a_s\}$中,元素个数不超过s.

接下来用反证法证明:

存在$s(1\leqslant s\leqslant m-1)$,使得

$$k=\sum_{i=1}^{s}k_i>\frac{sn}{m}.$$

假设对于$s(1\leqslant s\leqslant m-1)$,都有

$$\sum_{i=1}^{s}k_i\leqslant\frac{sn}{m}.$$

由阿贝尔变换可知(注意$a_s-a_{s+1}>0$,$1\leqslant s\leqslant m-1$)

$$\begin{aligned}0&<\sum_{j=1}^{m}k_ja_j\\&=\sum_{s=1}^{m-1}\left[(a_s-a_{s+1})\sum_{i=1}^{s}k_i\right]+a_m\sum_{i=1}^{m}k_i\\&\leqslant\sum_{s=1}^{m-1}(a_s-a_{s+1})\frac{sn}{m}+a_mn\\&=\frac{n}{m}\sum_{j=1}^{m}a_j=0,\end{aligned}$$

矛盾.

对于这一s,取$A_1,A_2,\cdots,A_n$中最小数大于或等于a_s的那些集合,记为$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$.则由上述的结果可知,这些子集共有

$$k=\sum_{i=1}^{s}k_i>\frac{sn}{m}$$

个,且它们的并集的元素个数不超过s,即

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\leqslant s<\frac{km}{n}=\frac{k}{n}|A|.$$

第二天

4. 所求的最小值是$n+1$.

首先,取$A=B=S$,可知

$|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|=n+1$.

下面证明:

$l=|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|\geqslant n+1$.

记$X\backslash Y=\{x\mid x\in X,x\notin Y\}$.显然,

$$\begin{aligned}l=&|A\backslash S|+|B\backslash S|+|C\backslash S|+\\&|S\backslash A|+|S\backslash B|+|S\backslash C|.\end{aligned}$$

于是,只要证明:

(1)$|A\backslash S|+|B\backslash S|+|S\backslash C|\geqslant1$;

(2)$|C\backslash S|+|S\backslash A|+|S\backslash B|\geqslant n$.

先证(1).

事实上,若$|A\backslash S|=|B\backslash S|=0$,则$A$、$B\subseteq S$.

故 1 不可能是C中元素,即$|S\backslash C|\geqslant1$.

再证(2).

若$A\cap S=\varnothing$,则$|S\backslash A|\geqslant n$,结论成立.

若$A\cap S\neq\varnothing$,设$A\cap S$的元素中最大的一个是$n-k(0\leqslant k\leqslant n-1)$.则

$$|S\backslash A|\geqslant k. \quad ①$$

另一方面,对$i=k+1,k+2,\cdots,n$,要么$i\notin B$(此时$i\in S\backslash B$),要么$i\in B$(此时$n-k+i\in C$,即$n-k+i\in C\backslash S$).

所以,$$|C\backslash S|+|S\backslash B|\geqslant n-k. \quad ②$$

由式①、②即得(2).

综上可知,$l\geqslant n+1$.

所以,最小值是$n+1$.

5. 所求最大值为$n-1$.

由齐次性,不妨假设

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1.$$

首先,当

$$a_1=1,a_2=a_3=\cdots=a_n=0,$$
$$b_1=0,b_2=b_3=\cdots=b_n=\frac{1}{n-1}$$

时,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)=1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)=\frac{1}{n-1}.$$

故$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}=n-1.$$

其次证明:对任意满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$$

的$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$,都有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}\leqslant n-1.$$

由于分母是正数,故上式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i),$$

即 $(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$

由对称性,不妨设 b_1 是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中最小的一个. 则

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$
$$\geqslant(n-1)b_1^2+(n-1)\sum_{i=2}^{n}b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n}a_ib_1$$
$$\geqslant(n-1)b_1^2+\left(\sum_{i=2}^{n}b_i\right)^2+(n-2)b_1$$
$$=(n-1)b_1^2+(1-b_1)^2+(n-2)b_1$$
$$=nb_1^2+(n-4)b_1+1$$
$$\geqslant1=\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

6. 如果 $mn=1$,则结论成立.

下设 $mn\geqslant2$. 由于

$$n^a(am^a+bn^b)$$
$$=(a+b)n^{a+b}+a[(mn)^a-n^{a+b}],$$

故只要证明存在无穷多组互质的正整数 a、b 使得

$$(a+b)\mid[(mn)^a-n^{a+b}],(a+b,n)=1.$$

令 $p=a+b$.

只要证明存在无穷多个质数 p 及正整数 $a(1\leqslant a\leqslant p-1)$,使得

$$p\mid[(mn)^a-n^p].$$

由费马小定理知,当

$$a_1\equiv a_2(\bmod p-1),a_1\geqslant1,a_2\geqslant1$$

时,有

$$(mn)^{a_1}\equiv(mn)^{a_2}(\bmod p).$$

因此,只要证明存在无穷多个质数 p 及正整数 a,使得

$$p\mid[(mn)^a-n]. \qquad ①$$

假设这样的质数只有有限个,记为 $p_1,p_2,\cdots,p_r$(由于 $mn\geqslant2$,这样的质数必存在).

设 $(mn)^2-n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, ②

其中,$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 为非负整数.

取 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}(p_1-1)\cdots(p_r-1)+2$.

设 $(mn)^a-n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$, ③

其中,$\beta_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 为非负整数.

若 $p_i\mid n$,则由式③及 $a\geqslant2$ 可知 $p_i^{\beta_i}\mid n$.

故 $p_i^{\beta_i}\mid[(mn)^2-n]$.

从而,由式②知 $\beta_i\leqslant\alpha_i$.

若 $p_i\nmid n$,则 $p_i\nmid m$. 故 $(p_i^{\alpha_i+1},mn)=1$.

由欧拉定理知(注意 $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})=p_i^{\alpha_i}(p_i-1)$ 为 $a-2$ 的约数)

$$(mn)^a-n\equiv(mn)^2-n(\bmod p_i^{\alpha_i+1}).$$

由于 $p_i^{\alpha_i+1}\nmid[(mn)^2-n]$,故由上式知

$$p_i^{\alpha_i+1}\nmid[(mn)^a-n].$$

因而,$\beta_i\leqslant\alpha_i$. 于是,

$$(mn)^a-n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$$
$$\leqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}=(mn)^2-n,$$

与 $a>2$ 矛盾.

所以,存在无穷多个质数 p 及正整数 a,使得 $p\mid[(mn)^a-n]$.

(熊 斌 提供)

2010 年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)03－0025－03

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 设 x、y 为实数,满足

$x+y=1, x^4+y^4=\frac{7}{2}$.

则 x^2+y^2 的值是( ).

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

2. 如图 1,直线 $k/\!/l$, $\angle 4-\angle 3=\angle 3-\angle 2=\angle 2-\angle 1=d>0$,其中,$\angle 3<90°$,$\angle 1=50°$. 则$\angle 4$ 最大可能的整数值是( ).

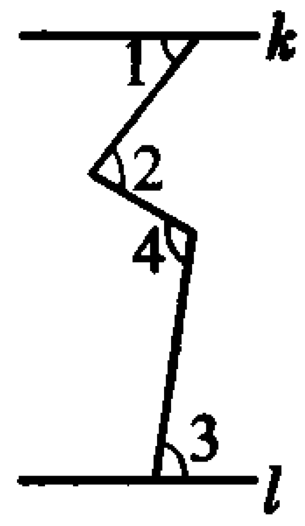

图 1

(A) 107° (B) 108°

(C) 109° (D) 110°

3. 设 p 是质数. 则满足

$|a+b|+(a-b)^2=p$

的整数对(a,b)共有( )对.

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

4. 设$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC=2$,$CA=3$,$AB=4$,h_a、h_b、h_c分别表示边 BC、CA、AB 上的高. 则

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(\quad).$$

(A)$\frac{41}{6}$ (B)$\frac{39}{4}$ (C)$\frac{38}{5}$ (D)$\frac{38}{7}$

5. 如图 2,正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分,已知线段 OD、AD 的长都是正整数,$\frac{CE}{BE}=20$. 则满足上述条件的正方形 $ABCD$ 面积的最小值是( ).

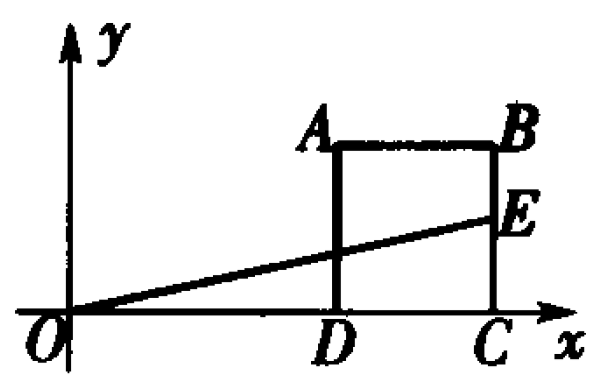

图 2

(A)324 (B)331 (C)354 (D)361

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 如图 3,已知 $AB=2$,$BC=AE=6$,$CE=CF=7$,$BF=8$. 则四边形 $ABDE$ 与$\triangle CDF$ 面积的比值是______.

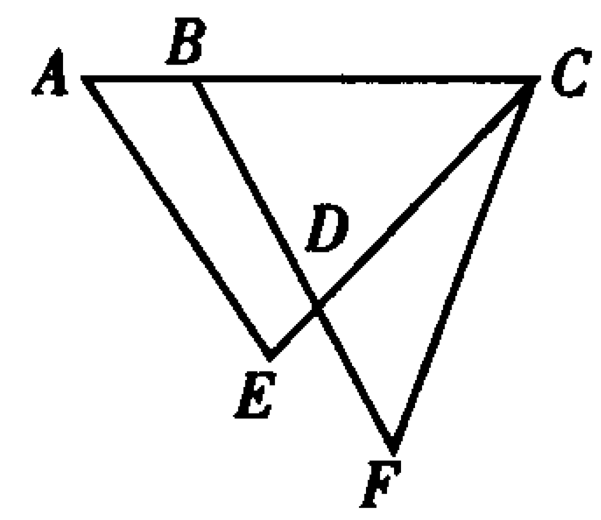

图 3

2. 已知 $4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}}}=\sqrt{5}+2$.

则 $k=$______.

3. 如图 4,在四边形 $ABCD$ 中,设$\angle BAD+\angle ADC=270°$,且 E、F 分别为 AD、BC 的中点,$EF=4$,阴影部分分别是以 AB、CD 为直径的半圆. 则这两个半圆面积的和是______(圆周率为π).

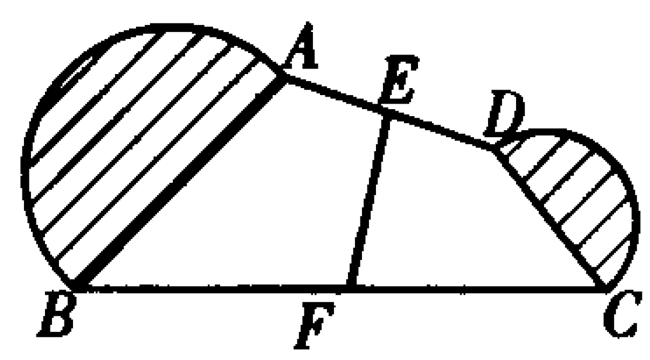

图 4

4. 计算:

$$\frac{1}{1\times2\,010}+\frac{1}{2\times2\,009}+\cdots+\frac{1}{2\,010\times1}-\frac{2\,010}{2\,011}\left(\frac{1}{1\times2\,009}+\frac{1}{2\times2\,008}+\cdots+\frac{1}{2\,009\times1}\right)$$

$=$______.

5. 如图 5, 在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中,内接有六个大小相同的正方形,P、Q、M、N 是落在大正方形边上的小正方形的顶点. 则这六个小正方形的面积和是______.

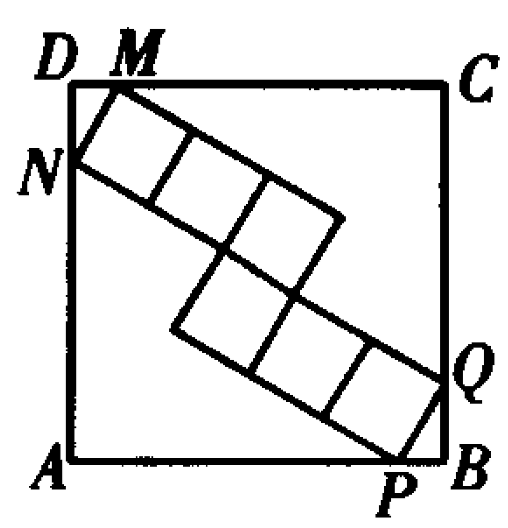

图 5

三、(10分)在凸五边形 $ABCDE$ 中,

$AB=BC=CD=DE=EA$,

$\angle ABC=2\angle DBE$.

求证:$\angle ABC=60°$.

四、(15分)能否将2 010写成 k 个互不相等的质数的平方和?如果能,试求 k 的最大值;如果不能,请简述理由.

五、(15分)某次初二数学竞赛,共有99所中学报名参加,每校参赛者中既有男选手,也有女选手.证明:存在其中的50所学校的男选手总数不小于全部男选手总数的一半,且其参赛的女选手总数也不小于全部女选手总数的一半.

参考答案

一、1. A.

令 $x^2+y^2=a$. 则

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{1-a}{2}.$$

又 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$$=a^2-2\left(\frac{1-a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2+a-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$\Rightarrow a^2+2a-1=7$

$\Rightarrow a=2$ 或 -4.

由于 $a>0$,则 $x^2+y^2=2$.

2. C.

由 $\angle 3=50°+2d<90°\Rightarrow d<20°$

$\Rightarrow\angle 4=50°+3d<50°+3\times 20°=110°$

$\Rightarrow\angle 4$ 最大可能的整数值是 $109°$.

3. D.

因 $a+b$、$a-b$ 具有相同的奇偶性,所以,$p=2$.

于是,整数对 (a,b) 为

$(1,1),(-1,-1),(0,1),$

$(1,0),(-1,0),(0,-1)$.

共6对.

4. B.

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S. 则

$$h_a=\frac{2S}{a},h_b=\frac{2S}{b},h_c=\frac{2S}{c}.$$

故 $(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

$$=\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\left(\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(2+3+4)=\frac{39}{4}.$$

5. D.

如图6,因为正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分,所以,直线 OE 通过正方形的中心 P.

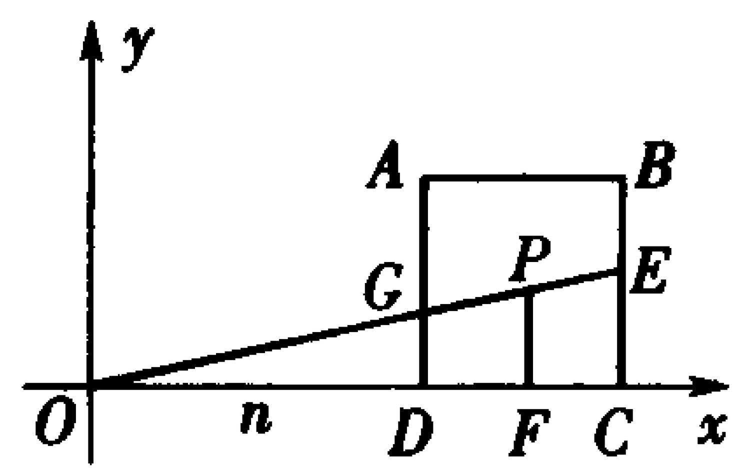

图6

故 $BE=GD$.

令 $OD=n,AD=m$. 则

$$\frac{CE}{BE}=\frac{CE}{GD}=\frac{OC}{OD}=\frac{n+m}{n}=20.$$

所以,$m=19n\geqslant 19$.

当 $n=1$ 时,$m=19$.

故正方形 $ABCD$ 面积的最小值为 $19^2=361$.

二、1. 1.

因 $AC=BF=8,CE=CF=7,BC=AE=6$,所以,$\triangle AEC\cong\triangle BCF$.

故 $S_{\text{四边形}ABDE}=S_{\triangle AEC}-S_{\triangle BDC}$

$=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle BDC}=S_{\triangle CDF}$.

2. -1.

注意到 $\sqrt{5}+2=4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

故 $\sqrt{5}-2k=\sqrt{5}+2\Rightarrow k=-1$.

3. 8π.

如图7,延长 BA 与 CD 交于点 M.

由 $\angle BAD+\angle ADC=270°$,得

$\angle BMC=\angle AMD=90°$.

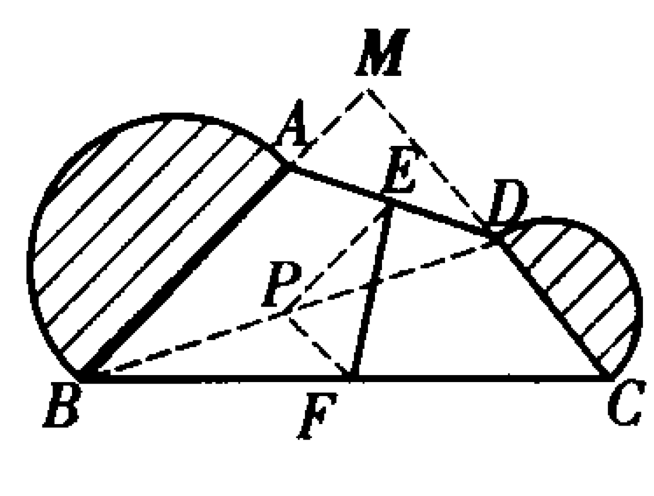

图7

联结 BD,并取 BD 的中点 P,再联结 PE、

PF.

由三角形的中位线定理有

$PE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{AB}{2}$, $PF \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{CD}{2}$.

因此，$\angle EPF = \angle BMC = 90°$.

在 Rt$\triangle EPF$ 中应用勾股定理得

$PE^2 + PF^2 = EF^2 = 4^2$,

即 $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 16$.

所以，两个阴影半圆面积的和为

$\frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \times 16 = 8\pi$.

4. $\frac{1}{2\,021\,055}$.

对于 $k = 2, 3, \cdots, 2\,010$，有

$$\frac{1}{k(2\,011-k)} - \frac{2\,010}{2\,011} \cdot \frac{1}{(k-1)(2\,011-k)}$$

$$= \frac{1}{2\,011}\left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2\,011-k}\right) - \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2\,011-k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\,011}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right).$$

故原式 $= \frac{1}{2\,010} + \frac{1}{2\,011}\left(\frac{1}{2\,010} - 1\right)$

$$= \frac{1}{2\,011 \times 1\,005} = \frac{1}{2\,021\,055}.$$

5. 32.64.

如图 8，过每个小正方形的顶点依次作各边的平行线，构成"弦图"，其中的小直角三角形长边为 a，短边为 b. 则

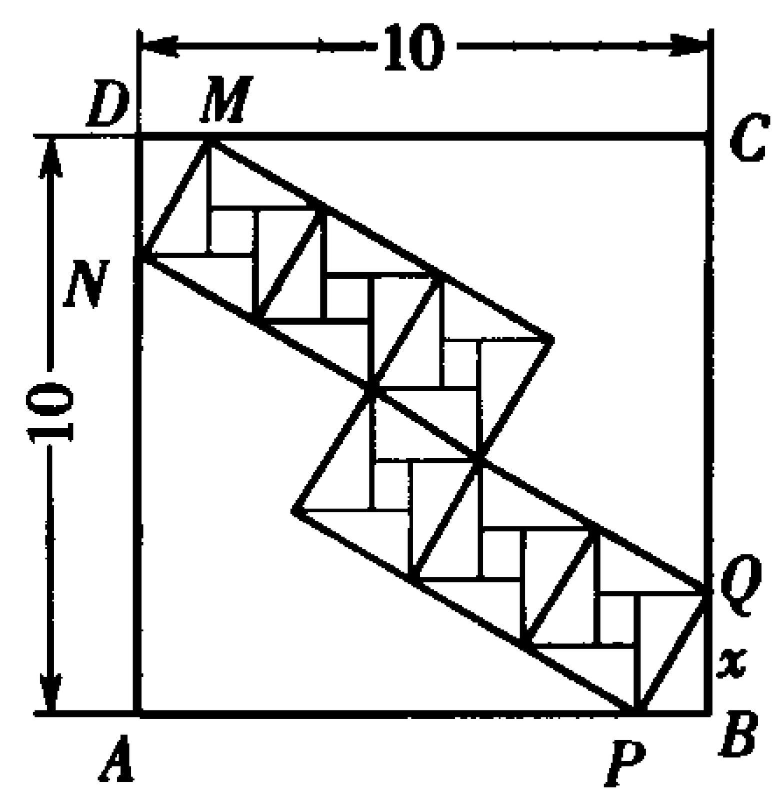

图 8

$$\begin{cases} 2a + 5b = 10, \\ 5a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 1.2. \end{cases}$$

所以，一个小正方形面积为

$2^2 + 1.2^2 = 5.44$.

于是，六个小正方形面积和为

$5.44 \times 6 = 32.64$.

三、因为 $\angle ABC = 2\angle DBE$，所以，

$\angle DBE = \angle ABE + \angle CBD$.

如图 9，过点 B 作 $BP \parallel AE$，与 DE 交于点 P.

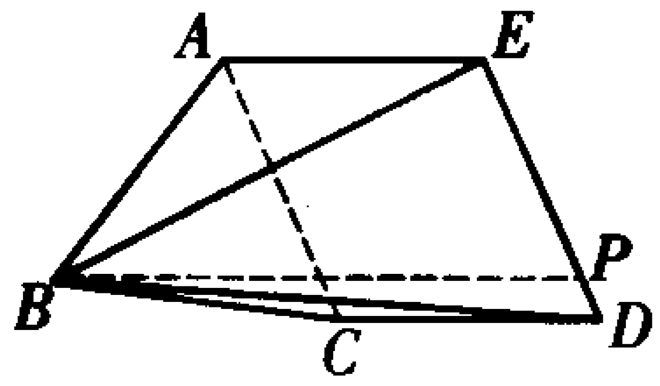

图 9

结合 $AB = AE$，知 $\angle PBE = \angle AEB = \angle ABE$.

所以，$\angle CBD = \angle DBP$.

但由 $BC = CD$，得 $\angle CDB = \angle CBD$.

所以，$\angle CDB = \angle DBP$.

因此，$BP \parallel CD$.

又 $BP \parallel AE$，则 $CD \parallel AE$.

而 $CD = AE$，知四边形 $ACDE$ 是平行四边形.

于是，$AC = DE$.

在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB = BC = AC$，知 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

因此，$\angle ABC = 60°$.

四、若 2 010 能写成 k 个质数的平方和，取最小的 10 个互不相等的质数的平方和，则

$4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 +$
$289 + 361 + 529 + 841$
$= 2\,397 > 2\,010$.

因此，$k \leqslant 9$.

易知，只有一个偶质数 2，其余质数都是奇数，而奇数的平方被 8 除余 1.

因为 2 010 被 8 除余 2，但九个不同质数的平方和被 8 除余 1 或 4，八个不同质数的平方和被 8 除余 0 或 3，故 $k \leqslant 7$.

当 $k = 7$ 时，经试算得

$2^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 37^2 = 2\,010$.

综上，2 010 可以写成 k 个互不相等的质数的平方和，k 的最大值是 7.

事实上，还可以证明 $k \neq 1, 2, \cdots, 6$.

所以，2 010 只能表示为七个互不相等的质数的平方和.

五、将参赛中学编号为 $1, 2, \cdots, 99$，以 x_i $(i = 1, 2, \cdots, 99)$ 表示编号为第 i 所中学男选

2010 年全国高中数学联赛山东赛区预赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2011)03-0028-07

一、选择题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $\{a_n\}$ 是一等差数列，S_n 是其前 n 项之和. 则 $-a_m < a_1 < -a_{m+1}$ 是 $S_m > 0$，$S_{m+1} < 0$ 的(　　)条件.

(A)充分必要

(B)充分而不必要

(C)必要而不充分

(D)既不充分也不必要

2. 已知函数

$$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+1)x+a$$

在其定义域内既有极大值又有极小值. 则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $-1<a<2$　　(B) $a>2$

(C) $a<-1$　　(D) $a>2$ 或 $a<-1$

3. 若集合 $M=\left\{x \left| \frac{|3-x|}{|5-x|} \leqslant \frac{1}{2}\right.\right\}$ 和集合 $N=\{x \mid x^2-2x+c \leqslant 0\}$ 满足 $M \cap N=M$，则实数 c 的取值范围是(　　).

(A) $c \leqslant -\frac{44}{9}$　　(B) $c \leqslant -\frac{55}{9}$

(C) $c \leqslant -\frac{66}{9}$　　(D) $c \leqslant -\frac{77}{9}$

4. 已知 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

$2\tan\beta=\tan 2\alpha, \tan(\beta-\alpha)=-2\sqrt{2}$.

则 $\cos\alpha=$(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知整数集合

$M=\{m \mid x^2+mx-36=0$ 有整数解$\}$，

集合 A 满足条件：

(1) $\varnothing \subset A \subseteq M$；

(2)若 $a \in A$，则 $-a \in A$.

则所有这样的集合 A 的个数为(　　).

(A)15　(B)16　(C)31　(D)32

6. 已知 $0<a<b$，在 a、b 之间插入一个正数 k，使 a、k、b 成等比数列；在 a、b 之间插入两个正数 m、n，使 a、m、n、b 成等差数列. 则 $(k+1)^2$ 与 $(m+1)(n+1)$ 的大小关系为(　　).

(A) $(k+1)^2<(m+1)(n+1)$

(B) $(k+1)^2=(m+1)(n+1)$

(C) $(k+1)^2>(m+1)(n+1)$

(D)不确定

手的数量. 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{99}$.

将除第 1 所学校外的 2~99 号学校分为两组.

第一组是编号为 2,4,…, 98 的 49 所学校. 男选手总和设为 A_1，女选手总和设为 B_1.

第二组是编号为 3,5,…, 99 的 49 所学校. 男选手总和设为 A_2，女选手总和设为 B_2.

由 $x_{2k} \geqslant x_{2k+1}(k=1,2,\cdots,49)$ 得

$A_1 \geqslant A_2$.

由 $x_{2k-1} \geqslant x_{2k}(k=2,3,\cdots,49)$ 得

$A_2 \geqslant A_1-x_2 \geqslant A_1-x_1$.

因此，$A_2+x_1 \geqslant A_1$.

又在第一组与第二组的选手中，必有一组(设为 C)的女选手数量不小于两组参赛女选手总数量的一半，再将编号为 1 的学校加入到 C 组，所得的 50 所学校的男、女选手也都不小于男、女选手总数的一半.

(李延林　提供)

7. 设 z 为复数，i 为虚数单位. 若 $|z|=1$，$|\bar{z}+\mathrm{i}|=1$，则当 $(z+\mathrm{i})^n(n\in\mathbf{N}_+)$ 为实数时，$|z+\mathrm{i}|^n$ 的最小值为（　　）.

(A)$\sqrt{3}$　(B)3　(C)$2\sqrt{3}$　(D)$3\sqrt{3}$

8. 在多项式 $(a+b+c+d)^8$ 的展开式中，每一字母的指数均不为零的项共有（　　）项.

(A)35　(B)42　(C)45　(D)50

9. 如图 1，在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC，底面 ABC 是边长为 1 的正三角形，$PA=PC$，$\angle APC=90°$，M 是棱 BC 的中点. 则 AB 与 PM 间的距离为（　　）.

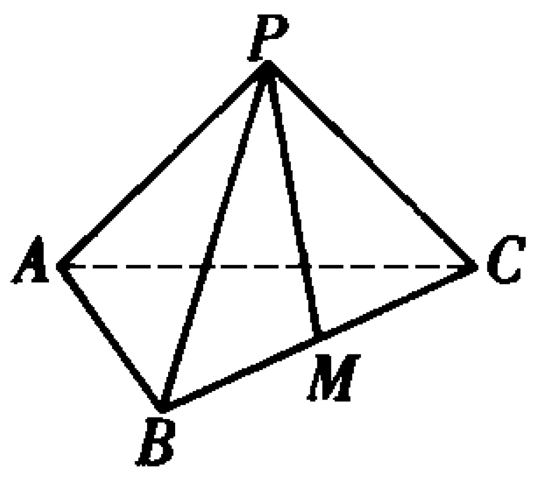

图 1

(A)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　(B)$\frac{1}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 某人从一层上到二层需跨 10 级台阶. 他一步可能跨 1 级台阶，称为一阶步，也可能跨 2 级台阶，称为二阶步，最多能跨 3 级台阶，称为三阶步. 从一层上到二层他总共跨了 6 步，而且任何相邻两步均不同阶. 则他从一层到二层可能的不同过程共有（　　）种.

(A)6　(B)8　(C)10　(D)12

二、填空题（每小题 6 分，共 24 分）

11. 已知函数

$$f(x)=ax^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}(a>0).$$

若在任何长度为 2 的闭区间上总存在两点 x_1、x_2，使 $|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{4}$ 成立，则 a 的最小值为______.

12. 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H. 若 $B(0,0)$，$C(2,0)$，且点 H 在圆

$$(x-1)^2+(y+1)^2=2$$

上移动，则动点 A 的轨迹为______.

13. 若函数 $f(x)=\ln\frac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}-x}$，则

$$\sum_{k=1}^{2\,010}f\left(\frac{k\mathrm{e}}{2\,011}\right)=\_\_\_\_\_\_.$$

14. 函数 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 的图像的对称中心为______.

三、解答题（共 66 分）

15.（12 分）如图 2，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PB=PC$，$\angle APB=\angle APC=90°$，$\angle BPC=60°$. 若此三棱锥的体积为定值 V，求点 P 到平面 ABC 距离的最大值.

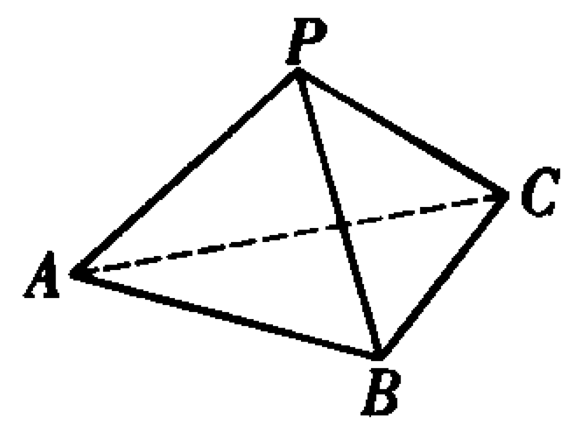

图 2

16.（12 分）已知 F_1、F_2 是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$$

的左、右焦点，弦 AB 经过点 F_2，且

$$|AF_2|=2|F_2B|,\tan\angle AF_1B=\frac{3}{4}.$$

(1) 求椭圆的离心率 e；

(2) 若 $\triangle F_1F_2B$ 的面积为 2，求椭圆的方程.

17.（12 分）已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x、y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<3$.

(1) $f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上是否为单调函数？并说明理由；

(2) 若 $f(6)=-9$，求 $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,010}\right)$.

18.（15 分）服装销售商甲和乙欲经销某品牌服装制造企业生产的服装. 该企业的设计部门在无任何有关甲和乙销售信息的情况下，随机地为他们提供了 n 种不同设计的款式，由甲和乙各自独立地选定自己认可的那些款式. 则至少有一个款式为甲和乙共同认可的概率为多少？

19.（15 分）某年级 n 位同学参加语文和

数学两门课的考试，每门课的考分从 0 到 100 分. 假如考试的结果没有两位同学的成绩是完全相同的(即至少有一门课的成绩不同). 另外，“甲比乙好”是指同学甲的语文和数学的考分均分别高于同学乙的语文和数学的考分. 试问：当 n 最小为何值时，必存在三位同学(设为甲、乙、丙)，有甲比乙好，乙比丙好.

参考答案

一、**1.** A.

事实上，

$$\begin{cases}S_m=\dfrac{m}{2}(a_1+a_m)>0,\\ S_{m+1}=\dfrac{m+1}{2}(a_1+a_{m+1})<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a_1+a_{m+1}<0<a_1+a_m$

$\Leftrightarrow -a_m<a_1<-a_{m+1}$.

所以，是充分必要条件.

2. D.

由 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+1)x+a$，得

$f'(x)=3x^2+2(a+1)x+(a+1)$.

由题设知 $f'(x)=0$ 一定有两个不相等的实数根.

从而，$\Delta=4(a+1)^2-12(a+1)>0$.

解得 $a>2$ 或 $a<-1$.

3. B.

由 $M=\{x\neq5\mid4(3-x)^2\leqslant(5-x)^2\}$

$=\{x\neq5\mid3x^2-14x+11\leqslant0\}$

$=\left\{x\,\middle|\,1\leqslant x\leqslant\dfrac{11}{3}\right\}$,

$N=\{x\mid1-\sqrt{1-c}\leqslant x\leqslant1+\sqrt{1-c}\}$,

且　$1-\sqrt{1-c}\leqslant1$,

得　$1+\sqrt{1-c}\geqslant\dfrac{11}{3}\Rightarrow c\leqslant-\dfrac{55}{9}$.

4. C.

设 $\tan\alpha=u$.

由 $\tan\beta=\dfrac{1}{2}\tan2\alpha=\dfrac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{u}{1-u^2}$，得

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{u}{1-u^2}-u}{1+u\cdot\dfrac{u}{1-u^2}}=u^3.$$

由 $u^3=-2\sqrt{2}$，得 $u=\tan\alpha=-\sqrt{2}$.

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. C.

设 α、β 为方程 $x^2+mx-36=0$ 的两根. 则 $\alpha\beta=-36$. 于是，

当 $|\alpha|=1,|\beta|=36$ 时，$m=\pm35$；

当 $|\alpha|=2,|\beta|=18$ 时，$m=\pm16$；

当 $|\alpha|=3,|\beta|=12$ 时，$m=\pm9$；

当 $|\alpha|=4,|\beta|=9$ 时，$m=\pm5$；

当 $|\alpha|=6,|\beta|=6$ 时，$m=0$.

故 $M=\{0\}\cup\{-5,5\}\cup\{-9,9\}\cup\{-16,16\}\cup\{-35,35\}$.

由条件(1)知 $A\neq\varnothing$.

由条件(2)知 A 是由一些成对的相反数所成之集.

所以，M 的 5 对相反数共能组成 2^5-1 个不同的非空集合 A.

6. A.

由 a、k、b 成等比数列知 $k^2=ab$. 则

$(k+1)^2=(\sqrt{ab}+1)^2<(a+1)(b+1)$.

由 a、m、n、b 成等差数列知

$a+b=m+n$，且 $b-a>n-m$.

由 $(m+1)+(n+1)=(a+1)+(b+1)$，知

$(m+1)(n+1)>(a+1)(b+1)$.

故 $(k+1)^2<(a+1)(b+1)$

$<(m+1)(n+1)$.

7. D.

设 $z=x+y\,\mathrm{i}(x、y\in\mathbf{R})$.

由 $|z|=1,|\bar{z}+\mathrm{i}|=1$,得

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x^2+(1-y)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\y=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

故 $z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,

$|z+\mathrm{i}|^n=\left|\sqrt{3}\left(\pm\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right|^n$

$=\left|\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{k\pi\mathrm{i}}{3}}\right|^n=(\sqrt{3})^n(k\in\{1,2\})$.

易见,使 $(z+\mathrm{i})^n$ 为实数时,n 的最小值为 3.

此时,$|z+\mathrm{i}|^n$ 的最小值为 $(\sqrt{3})^3=3\sqrt{3}$.

8. A.

设 $(a+b+c+d)^8$ 的展开式中任意一项为 $pa^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$.

若其每一字母的指数不为零,则

$x_i\geqslant1(i=1,2,3,4)$,且

$x_1+x_2+x_3+x_4=8$.

令 $u_i=x_i-1(i=1,2,3,4)$. 则

$u_1+u_2+u_3+u_4=4$.

因此,所求的项数为 $\mathrm{C}_7^3=35$.

9. A.

如图 3,作 $PO\perp AC$ 于点 O,则 O 是 AC 的中点. 联结 OM.

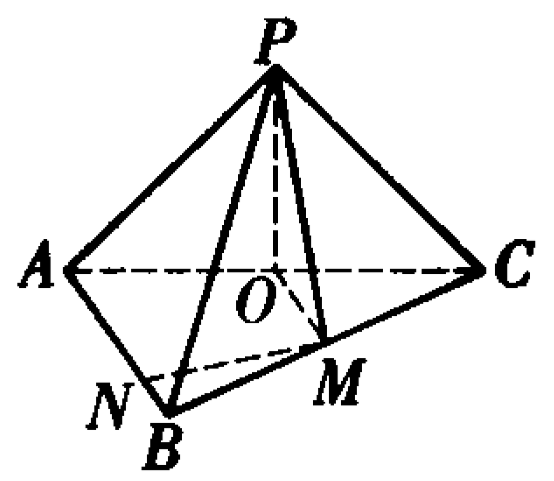

图 3

由 M 是 BC 的中点知 $OM//AB$.

过点 M 作 $MN\perp AB$ 于点 N.

易知,$MN=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

因为 $OM//AB$,所以,$MN\perp OM$.

又侧面 $PAC\perp$ 底面 ABC,$PO\perp AC$,则 $PO\perp$ 底面 ABC,$PO\perp MN$.

从而,$MN\perp$ 平面 POM,$MN\perp PM$.

故 MN 是 AB 和 PM 的公垂线.

【注】本题也可用向量法求解.

10. C.

按题意要求,不难验证这 6 步中不可能没有三阶步,也不可能有多于 1 个的三阶步. 因此,只能是 1 个三阶步,2 个二阶步,3 个一阶步.

为形象起见,以白、黑、红三种颜色的球来记录从一层到二层跨越 10 级台阶的过程:

白球表示一阶步,黑球表示二阶步,红球表示三阶步. 每一过程可表为 3 个白球、2 个黑球、1 个红球的一种同色球不相邻的排列.

下面分三种情形讨论.

(1)第 1、第 6 球均为白球,则两黑球必分别位于中间白球的两侧. 此时,共有 4 个黑白球之间的空位放置红球. 所以,此种情况共有 4 种可能的不同排列.

(2)第 1 球不是白球.

(i)若第 1 球为红球,则余下 5 球只有一种可能的排列;

(ii)若第 1 球为黑球,则余下 5 球因红、黑球的位置不同有两种不同的排列,此种情形共有 3 种不同排列.

(3)第 6 球不是白球,同(2),共有 3 种不同排列.

总之,按题意要求从一层到二层共有 $4+3+3=10$ 种可能的不同过程.

二、11. $\frac{1}{4}$.

在长度为 2 的闭区间 $\left[\frac{1}{4a}-1,\frac{1}{4a}+1\right]$ 上,有

$f_{\max}(x)=f\left(\frac{1}{4a}-1\right)$

$=f\left(\frac{1}{4a}+1\right)=a-\frac{1}{16a}-\frac{3}{4}$,

$f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{4a}\right)=-\frac{1}{16a}-\frac{3}{4}$.

故 $a=f_{\max}(x)-f_{\min}(x)\geqslant\frac{1}{4}$.

当 $a=\frac{1}{4}$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(x-1)^2-1.$$

下面证明:在任何长度为 2 的闭区间 $[t-1,t+1]$ 上总存在两点 x_1、x_2,使

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

当 $t\geqslant1$ 时,$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上是增函数.

令 $x_1=t$,$x_2=t+1$. 则

$$|f(x_1)-f(x_2)|=f(t+1)-f(t)$$
$$=\frac{1}{4}(2t-1)\geqslant\frac{1}{4}.$$

当 $t<1$ 时,$f(x)$ 在 $[t-1,t]$ 上是减函数.

令 $x_1=t-1$,$x_2=t$. 则

$$|f(x_1)-f(x_2)|=f(t-1)-f(t)$$
$$=\frac{1}{4}(3-2t)>\frac{1}{4}.$$

综上,a 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

12. 圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2(y\neq0)$ 和直线 $x=0(y\neq0)$ 或 $x=2(y\neq0)$.

设 $A(x,y)$,$H(x,y_1)$.

当 $x\neq0$,$x\neq2$ 时,

$$\frac{y_1}{x}\cdot\frac{y}{x-2}=-1,y_1=-\frac{x^2-2x}{y}.$$

因为点 H 在圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 上,所以,

$$(x-1)^2+\left(-\frac{x^2-2x}{y}+1\right)^2=2,$$

即 $(x^2-2x)(y^2-2y+x^2-2x)=0$.

又因为 $x\neq0$,$x\neq2$,所以,$x^2-2x\neq0$.

故 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

当 $x=0$ 或 2 时,只要 $y\neq0$,$\triangle ABC$ 都是直角三角形,其垂心为点 B 或 C,都在圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 上.

综上,动点 A 的轨迹为圆

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2(y\neq0)$$

和直线

$$x=0(y\neq0)\text{或}x=2(y\neq0).$$

13. 2 010.

注意到

$$f(x)+f(\mathrm{e}-x)$$
$$=\ln\left[\frac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}-x}\cdot\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-x)}{\mathrm{e}-(\mathrm{e}-x)}\right]=2.$$

故 $\sum\limits_{k=1}^{2\,010}f\left(\frac{k\mathrm{e}}{2\,011}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{1\,005}\left(f\left(\frac{k\mathrm{e}}{2\,011}\right)+f\left(\mathrm{e}-\frac{k\mathrm{e}}{2\,011}\right)\right)$$
$$=2\times1\,005=2\,010.$$

14. $\left(-\frac{2}{3},\frac{70}{27}\right)$.

设点 (a,b) 为函数 $f(x)$ 图像的对称中心. 则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$,即

$$2b=[(a+x)^3+(a-x)^3]+2[(a+x)^2+(a-x)^2]+6a+8,$$
$$b=a^3+3ax^2+2a^2+2x^2+3a+4$$
$$=(2+3a)x^2+a^3+2a^2+3a+4.$$

于是,应有

$$2+3a=0\Rightarrow a=-\frac{2}{3},$$
$$b=-\frac{8}{27}+\frac{8}{9}-2+4=\frac{70}{27}.$$

三、**15.** 如图 4,设 BC 的中点为 D,联结 AD、PD.

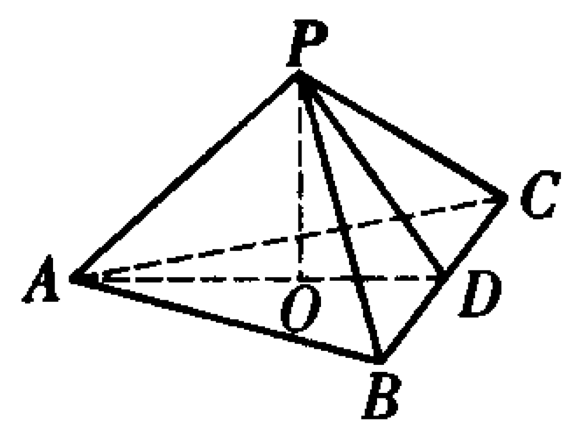

图 4

由对称性知

$BC\perp$ 平面 PAD,

平面 $PAD\perp$ 平面 ABC.

作 $PO\perp AD$,垂足为 O. 则

$PO\perp$ 平面 ABC.

设 $PO=h$,$\angle PAD=\alpha(0°<\alpha<90°)$. 则

$PA=\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

因为$\angle APB=\angle APC=90°$,所以,

$PA\perp$平面 PBC,$PA\perp PD$.

故 $PD=\dfrac{h}{\cos\alpha}$.

易知$\triangle PBC$ 是正三角形.

又因为 $PD\perp BC$,所以,

$BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}PD=\dfrac{2h}{\sqrt{3}\cos\alpha}$.

则 $V=\dfrac{1}{6}PA\cdot PD\cdot BC=\dfrac{h^3}{3\sqrt{3}\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}$.

故 $h^3=3\sqrt{3}V\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

注意到

$$\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)}$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

当且仅当 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,上式等号成立.

此时,h 取最大值 $\sqrt[3]{2V}$.

16. (1)设$|AF_2|=2|F_2B|=2k$.

由$|AF_1|+|AF_2|=2a$,

$|BF_1|+|BF_2|=2a$,

得　$|AF_1|=2a-2k,|BF_1|=2a-k$.

因为 $\tan\angle AF_1B=\dfrac{3}{4}$,所以,

$\cos\angle AF_1B=\dfrac{4}{5}$.

在$\triangle AF_1B$ 中,由余弦定理得

$|AB|^2=|AF_1|^2+|BF_1|^2-2|AF_1||BF_1|\cos\angle AF_1B$,

即　$(3k)^2=(2a-2k)^2+(2a-k)^2-$

$$2(2a-2k)(2a-k)\cdot\frac{4}{5}.$$

化简得$(a-3k)(2a+3k)=0$.

因为 $2a+3k>0$,所以,$a=3k$.

于是,$|AF_1|=2a-2k=4k$,$|AB|=3k$,

$|BF_1|=2a-k=5k$.

故$|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$.

因此,$\angle F_1AF_2=90°$.

在 Rt$\triangle AF_1F_2$ 中,设$|F_1F_2|=2c$. 则

$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$,

即　$(4k)^2+(2k)^2=4c^2$.

解得 $c=\sqrt{5}k$.

所以,$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(2)由$\dfrac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle F_1F_2B}}=\dfrac{|AF_2|}{|F_2B|}=2$,得

$S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|AF_1||AF_2|=2S_{\triangle F_1F_2B}=4$,

即　$\dfrac{1}{2}\times4k\times2k=4\Rightarrow k=1$.

所以,$a=3,c=\sqrt{5},b=\sqrt{a^2-c^2}=2$.

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

17. (1)对任意的 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则

$f(x_2)=f(x_1+(x_2-x_1))$

$=f(x_1)+f(x_2-x_1)-3$.

因 $x_2-x_1>0$,所以,$f(x_2-x_1)<3$,即

$f(x_2)<f(x_1)$.

从而,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为单调减函数.

(2)由$f(6)=f(2)+f(4)-3$

$=f(2)+(f(2)+f(2)-3)-3$

$=3f(2)-6=-9$,

得　$f(2)=-1$.

又由$f(2)=f(1)+f(1)-3$,得

$f(1)=1$.

对任意的 $a\in\mathbf{R}$,显然有

$f(a)=2f\left(\dfrac{a}{2}\right)-3\Rightarrow f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{f(a)+3}{2}$.

令 $a_1=f(1)=1$,

$$a_{n+1}=f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)+3}{2}=\frac{a_n+3}{2}.$$

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$. 则

$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}, b_1=a_2-a_1=1$.

从而，$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即

$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

故 $a_{n+1}=a_1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

所以，$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=a_{2011}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{2009}$.

18. 记 n 种款式的集合为 V，分别记甲和乙各自选中的款式的集合为 $P_甲$ 和 $P_乙$. 则

$P_甲\subseteq V, P_乙\subseteq V$.

把甲和乙的选择合称为一个选择方案，记为$(P_甲, P_乙)$.

先证明：任何一个选择方案$(P_甲, P_乙)$发生的概率为$\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

事实上，因设计部门关于甲和乙的销售情况无任何信息，所以，每一款式被甲或乙认可还是否定，他们的概率均为$\frac{1}{2}$.

若甲选中了 $k(k=0,1,\cdots,n)$ 个款式，同时也否定了其余 $n-k$ 个款式，则甲的这一选择发生的概率为

$\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

对于乙也完全一样.

又因为甲和乙的选择是独立进行的，所以，任一选择方案$(P_甲, P_乙)$发生的概率为

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

以 $\bar{P}$ 记所有 $P_甲\cap P_乙=\varnothing$ 的选择方案$(P_甲, P_乙)$发生的概率. 则所求的概率为

$P=1-\bar{P}$.

为计算 $\bar{P}$，需计算所有满足

$P_甲\cap P_乙=\varnothing$的选择方案的个数 S.

按 $P_甲\cup P_乙$ 所含元素的个数$|P_甲\cup P_乙|$进行分类.

若$|P_甲\cup P_乙|=i(i=0,1,\cdots,n,)$，则 $P_甲$ 是这一 i 元集合中的任一子集，相应的 $P_乙$ 即为其补集.

于是，当$|P_甲\cup P_乙|=i$ 时，所有可能的选择方案数为 $2^i\mathrm{C}_n^i$.

从而，由加法原理可知，当 $P_甲\cap P_乙\neq\varnothing$ 时，所有可能的选择方案数为

$$S=\sum_{i=0}^{n}2^i\mathrm{C}_n^i=(1+2)^n=3^n.$$

故 $\bar{P}=\left(\frac{1}{4}\right)^n\times 3^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n, P=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

19. 建立平面直角坐标系 xOy.

若一位同学的成绩语文为 i 分，数学为 j 分，令其对应平面上的整点(i, j)，称为“成绩点”. 于是，n 位同学的考试结果映射到平面上是在

$0\leqslant x\leqslant 100, 0\leqslant y\leqslant 100$

范围内的 n 个成绩点.

考虑平面上 201 条直线：

$y=x\pm b(b=0,1,\cdots,100)$.

若一条直线上有三个成绩点，即表示存在三位同学甲、乙、丙，有甲比乙好，乙比丙好.

显然，直线 $y=x+100$ 和 $y=x-100$ 每条至多只能有一个成绩点；直线 $y=x+99$ 和 $y=x-99$ 每条至多只能有两个成绩点.

因为 $2\times(201-2)+1\times 2=400$，所以，当 $n>400$ 时，必有一条直线有三个成绩点.

从而，n 的最小值 $n_0\leqslant 401$.

令集合

$S=\{(i, j)\mid i=0,1; j=0,1,\cdots,100\}$;

$T=\{(i, j)\mid i=0,1,\cdots,100; j=0,1\}$.

显然，$|S\cup T|=400$，且在 $S\cup T$ 中不存在三个成绩点在同一条直线上.

故 $n_0\geqslant 401$.

从而，$n_0=401$.

（方祖耀　提供）

2010年全国高中数学联赛江苏赛区复赛

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2011)03-0035-04

第一试

一、填空题（每小题8分，共64分）

1. 已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足

$$a_n=2^{\frac{2n+3}{5}},b_n=\frac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)(n\in\mathbf{N}_+).$$

则数列$\{b_n\}$的通项公式是______.

2. 已知点$M(0,2)$、$N(-3,6)$到直线l的距离分别为1、4. 则满足条件的直线l的条数是______.

3. 设函数$f(x)=ax^2+x$，已知

$$f(3)<f(4),$$

且当$n\geqslant8$，$n\in\mathbf{N}_+$时，$f(n)>f(n+1)$恒成立. 则实数a的取值范围是______.

4. 如图1，已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是边长为3的正方体，P、Q、R分别是棱AB、AD、AA_1上的点，$AP=AQ=AR=1$. 则四面体C_1PQR的体积为______.

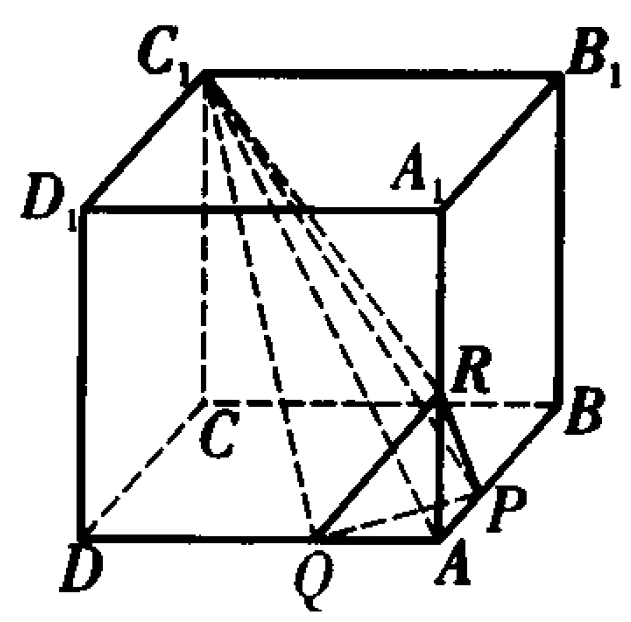

图1

5. 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}(n\in\mathbf{N}_+).$$

记$T_n=a_1a_2\cdots a_n$. 则$T_{2010}=$______.

6. 骰子是一个立方体，六个面上分别刻有1、2、3、4、5、6. 现有质地均匀的骰子10只. 一次掷4只、3只骰子，分别得出各只骰子正面朝上的点数之和为6的概率的比为______.

7. 在$\triangle ABC$中，已知

$$BC=5,AC=4,\cos(A-B)=\frac{7}{8}.$$

则$\cos C=$______.

8. 在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y^2=2x$的焦点为F. 设M是抛物线上的动点. 则$\frac{MO}{MF}$的最大值为______.

二、（16分）如图2，P是半圆$\odot O$：$x^2+y^2=1(y\geqslant0)$上位于x轴上方的任意一点，A、B是直径的两个端点，以AB为一边作正方形$ABCD$，PC、PD分别与AB交于点E、F. 求证：BE、EF、FA成等比数列.

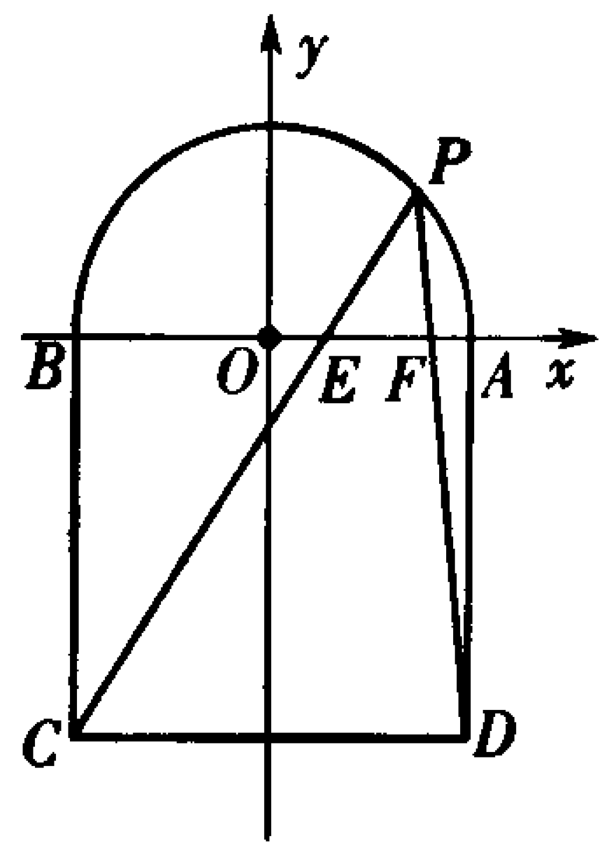

图2

三、（20分）设实数a、m满足

$$a\leqslant1,0<m\leqslant2\sqrt{3},$$

函数$f(x)=\frac{amx-mx^2}{a+a(1-a)^2m^2}(x\in(0,a))$. 若存在$a$、$m$、$x$，使$f(x)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，求所有的实数$x$的值.

四、（20分）在数列$\{a_n\}$中，已知

$$a_1\in(1,2),$$

$$a_{n+1}=a_n^3-3a_n^2+3a_n(n\in\mathbf{N}_+).$$

求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})(a_{k+2}-1)<\frac{1}{4}$.

加试

一、(40分)已知$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别切边AC、AB于点E、F，M为线段EF上一点. 证明：$\triangle MAB$与$\triangle MAC$面积相等的充分必要条件是$MI\perp BC$.

二、(40分)将凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的边与对角线染上红、蓝两色之一，使得没有三边均为蓝色的三角形. 对$k=1,2,\cdots,n$，记b_k是由顶点A_k引出的蓝色边的条数. 求证：

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant\frac{n^2}{2}.$$

三、(50分)设正整数无穷数列$\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$满足

$$a_4=4, a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=1(n\geqslant2).$$

求$\{a_n\}$的通项公式.

四、(50分)设p是一个质数，$p\equiv3\pmod 4$；设x、y是整数，满足

$$p\left|\left(x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2\right)\right..$$

求证：存在整数u、v，使得

$$x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2=p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right).$$

参考答案

第一试

1. $b_n=\frac{n+4}{5}$.

由$a_n=2^{\frac{2n+3}{5}}$，得

$$a_1a_2\cdots a_n=2^{\frac{2(1+2+\cdots+n)+3n}{5}}=2^{\frac{n(n+4)}{5}}.$$

故$b_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+4)}{5}=\frac{n+4}{5}$.

2. 3.

易得$MN=5$.

则半径为1的$\odot M$与半径为4的$\odot N$外切. 故满足条件的直线l有3条.

3. $\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{17}\right)$.

因为当$n\geqslant8$时，$f(n)>f(n+1)$恒成立，所以，$a<0$，且$-\frac{1}{2a}<\frac{17}{2}$. 解得$a<-\frac{1}{17}$.

又因为$f(3)<f(4)$，所以，$-\frac{1}{2a}>\frac{7}{2}$.

解得$a>-\frac{1}{7}$.

因此，$a\in\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{17}\right)$.

4. $\frac{4}{3}$.

显然，$AC_1\perp$面PQR.

因为$AP=AQ=AR=1$，所以，

$PQ=QR=RP=\sqrt{2}$.

又$AC_1=3\sqrt{3}$，

$V_{A-PQR}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1^2\times1=\frac{1}{6}$，

$$V_{C_1-PQR}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\times3\sqrt{3}-V_{A-PQR}=\frac{4}{3}.$$

5. -6.

易得$a_1=2, a_2=-3, a_3=-\frac{1}{2}, a_4=\frac{1}{3}$,

$a_1a_2a_3a_4=1$.

又$a_5=2=a_1$，由归纳法易知

$a_{n+4}=a_n(n\in\mathbf{N}_+)$.

故$T_{2010}=T_{4\times502+2}=a_1a_2=-6$.

6. $6:1$.

掷三只骰子掷出6点的情况为

1,1,4;1,2,3;2,2,2.

共$3+3!+1=10$种，其概率为$\frac{10}{6^3}$.

掷四只骰子掷出6点的情况为

1,1,1,3;1,1,2,2.

共$4+C_4^2=10$种，其概率为$\frac{10}{6^4}$.

故概率的比为$\frac{10}{6^3}:\frac{10}{6^4}=6:1$.

7. $\frac{11}{16}$.

由 $BC>AC$,得$\angle A>\angle B$.

如图 3,作 AD 使$\angle BAD=\angle B$. 则

$\angle DAC$

$=\angle A-\angle B$.

设 $AD=BD=x$.

则 $DC=5-x$.

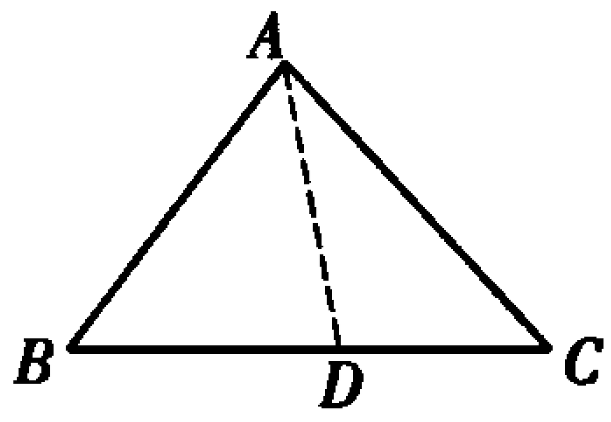

图3

在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理得 $x=3$.

再由余弦定理得 $\cos C=\frac{11}{16}$.

8. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

设点 $M(x,y)$. 则

$$\left(\frac{MO}{MF}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4x^2+8x}{4x^2+4x+1}$$

$$=1+\frac{4x-1}{4x^2+4x+1}.$$

令 $4x-1=t$.

当 $t\leqslant 0$ 时,$\frac{MO}{MF}\leqslant 1$.

当 $t>0$ 时,有

$$\left(\frac{MO}{MF}\right)^2=1+\frac{4}{t+6+\frac{9}{t}}$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},$$

且当 $t=3$,即 $x=1$ 时,上式等号成立.

所以,$\frac{MO}{MF}$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

此时,点 $M(1,\pm\sqrt{2})$.

二、设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$C(-1,-2)$,$D(1,-2)$,$E(x_1,0)$,$F(x_2,0)$.

由 P、E、C 三点共线得

$$\frac{\sin\alpha+2}{\cos\alpha+1}=\frac{2}{x_1+1}.$$

从而,$x_1=\frac{2(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+2}-1$.

同理,$x_2=\frac{2(\cos\alpha-1)}{\sin\alpha+2}+1$.

所以,$BE=x_1+1=\frac{2(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+2}$,

$$EF=x_2-x_1=\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha+2},$$

$$FA=\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha+2}.$$

则 $BE\cdot FA=\frac{2(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+2}\cdot\frac{2(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha+2}$

$$=\frac{4\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+2)^2}=EF^2.$$

因此,BE、EF、FA 成等比数列.

三、当 $x\in(0,a)$时,

$amx-mx^2$

$$=-m\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{ma^2}{4}\leqslant\frac{ma^2}{4}.$$

当且仅当 $x=\frac{a}{2}$时,上式等号成立.

故$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{amx-mx^2}{a+a(1-a)^2m^2}$

$$\leqslant\frac{\frac{a^2}{4}m}{a+a(1-a)^2m^2}$$

$$=\frac{am}{4[1+(1-a)^2m^2]}$$

$$\leqslant\frac{am}{4}\leqslant\frac{m}{4}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

当且仅当 $x=\frac{a}{2}$及 $a=1$,$m=2\sqrt{3}$时,等号成立.

因此,$x=\frac{1}{2}$.

四、由 $a_{n+1}=a_n^3-3a_n^2+3a_n$,得

$a_{n+1}-1=(a_n-1)^3$.

令 $b_n=a_n-1$. 有

$0<b_1<1$,$b_{n+1}=b_n^3<b_n$,$0<b_n<1$.

则$(a_k-a_{k+1})(a_{k+2}-1)$

$=(b_k-b_{k+1})b_{k+2}$

$=(b_k-b_{k+1})b_{k+1}^3$

$<\frac{1}{4}(b_k-b_{k+1})(b_k^3+b_k^2b_{k+1}+b_kb_{k+1}^2+b_{k+1}^3)$

$$=\frac{1}{4}(b_k^4-b_{k+1}^4).$$

故$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})(a_{k+2}-1)$

$$<\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(b_k^4-b_{k+1}^4)$$

$$=\frac{1}{4}(b_1^4-b_{n+1}^4)<\frac{1}{4}b_1^4<\frac{1}{4}.$$

加　试

一、如图4，过点 M 作 $MP\perp AC$、$MQ\perp AB$，垂足分别为 P、Q. 设$\odot I$ 切边 BC 于点 D. 则

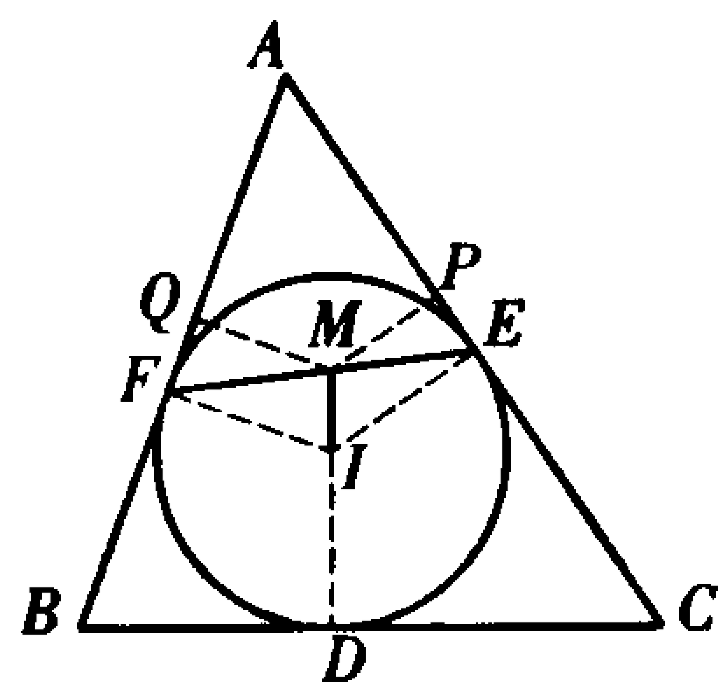

图4

$ID\perp BC$,

$IF\perp AB$,

$IE\perp AC$.

显然，$\mathrm{Rt}\triangle QFM\backsim\mathrm{Rt}\triangle PEM$.

于是，$\frac{MQ}{MP}=\frac{MF}{ME}$.

又$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MAC}}=\frac{MQ}{MP}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{AB}{AC}$，则

$$S_{\triangle MAB}=S_{\triangle MAC}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{ME}{MF}. \qquad ①$$

从而，问题转化为证明：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{ME}{MF}\Leftrightarrow MI\perp BC.$$

充分性.

由 $MI\perp BC$，知点 M 在直线 ID 上.

因为 B、D、I、F 四点共圆，所以，

$\angle MIF=\angle DBF$，$\angle MIE=\angle ECD$.

又 $IE=IF$，则由正弦定理得

$$\frac{MF}{\sin\angle MIF}=\frac{FI}{\sin\angle IMF}$$

$$=\frac{IE}{\sin(\pi-\angle IMF)}=\frac{ME}{\sin\angle MIE},$$

即 $$\frac{ME}{MF}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{AB}{AC}.$$

必要性.

设直线 ID 与 EF 交于点 M'. 由上述证明可知$\frac{M'E}{M'F}=\frac{AB}{AC}=\frac{ME}{MF}$.

从而，点 M 与 M' 重合.

二、不妨设 $b=\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，并且由点 A 向 $A_1,A_2,\cdots,A_b$ 引出 b 条蓝色边. 则 $A_1,A_2,\cdots,A_b$ 之间无蓝色边，$A_1,A_2,\cdots,A_b$ 以外的 $n-b$ 个点，每点至多引出 b 条蓝色边.

因此，蓝色边总数小于或等于

$$(n-b)b\leqslant\left[\frac{(n-b)+b}{2}\right]^2=\frac{n^2}{4}.$$

故 $b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant 2\times\frac{n^2}{4}=\frac{n^2}{2}$.

三、由已知得$\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

若有某个 n，使$\frac{a_{n-1}}{a_n}\geqslant 1$，则 $a_n>a_{n+1}$.

从而，$a_{n-1}\geqslant a_n>a_{n+1}>a_{n+2}>\cdots$，这显然不可能（因为$\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$是正整数无穷数列）.

因此，数列$\{a_n\}$中的项是严格递增的.

由 $a_4=4$ 可知，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$.

于是，由$\{a_n\}$的递推公式及数学归纳法知 $a_n=n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

四、由条件知 $p\mid[(2x-y)^2+py^2]$. 则 $p\mid(2x-y)^2$.

又 p 是质数，故 $p\mid(2x-y)$.

设 $2x-y=pk$. 则

$$x^2-xy+\frac{p+1}{4}y^2$$

$$=\frac{1}{4}[py^2+(2x-y)^2]$$

$$=\frac{1}{4}[(2x-pk)^2p+p^2k^2]$$

$$=\frac{p}{4}[(2x-pk+k-k)^2+pk^2]$$

$$=\frac{p}{4}[(2u-v)^2+pv^2]\left(u=x-\frac{k(p-1)}{2},v=k\right)$$

$$=p\left(u^2-uv+\frac{p+1}{4}v^2\right).$$

（王掌西　提供）

●课外训练●

数学奥林匹克初中训练题(139)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)03－0039－03

第一试

一、选择题(每小题 7 分,共 42 分)

1. 有一列数为 1,1,5,13,25,41,…,按此规律排列,第 101 个数为(　　).

(A)19 801　(B)19 802

(C)19 901　(D)19 902

2. 已知 AD 是$\triangle ABC$ 的高(在形内). 给出下列四个条件:

①$AB+BD=AC+CD$;

②$AB-BD=AC-CD$;

③$AB\cdot BD=AC\cdot CD$;

④$AB:BD=AC:CD$.

一定能得到 $AB=AC$ 的有(　　)个.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

3. 方程 $abc=2(a+b+c)$ 的正整数解共有(　　)组.

(A)3　(B)6　(C)12　(D)15

4. 已知直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$,过点 $P(1,1)$ 作 $PQ\perp l$,Q 为垂足. 则直线 PQ 的解析式为(　　).

(A)$y=-\frac{1}{2}x+3$　(B)$y=-\frac{1}{2}x+4$

(C)$y=-2x+3$　(D)$y=-2x+4$

5. 若 $n\leqslant 2\,011$,则使 $1+17n$ 是完全平方数的正整数 n 有(　　)个.

(A)20　(B)22　(C)24　(D)26

6. 在$\triangle ABC$ 中,已知

$$\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{4}{\tan\frac{B}{2}},\text{且 } b=4.$$

则 $a+c=$(　　).

(A)5　(B)6　(C)7　(D)8

二、填空题(每小题 7 分,共 28 分)

1. 按图 1 的程序进行运算.

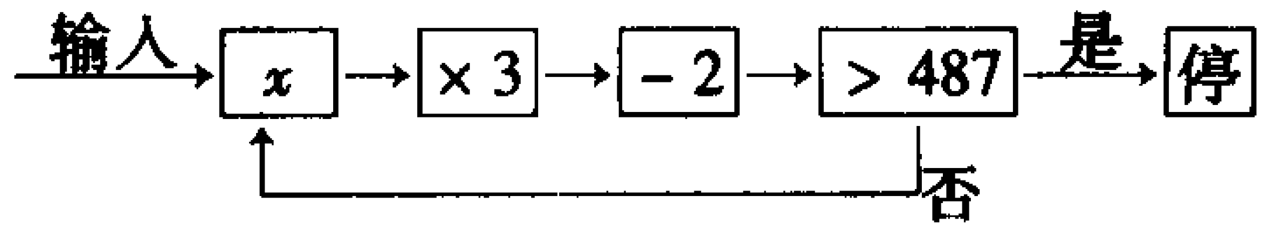

图 1

规定:程序运行到"结果是否大于 487"为一次运算. 若运算进行 4 次才停止,则 x 的取值范围是______.

2. 在四边形 $ABCD$ 中,已知 $AB=BC=CD$,且$\angle A=80°$,$\angle D=40°$. 则$\angle B$ 度数为______.

3. 已知函数

$$y=(x-m)(x-n)-1\ (m<n),$$

且 a、$b\ (a<b)$是方程

$$(x-m)(x-n)-1=0$$

的两根. 则实数 a、b、m、n 的大小可能情况是______(用"<"号连接).

4. 在$\triangle ABC$ 中,点 D、E 分别在边 AB、AC 上,BE 与 CD 交于点 O. 则$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$与$\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle BOC}}$的大小关系是______(填"相等"或"不相等").

第二试

一、(20 分)已知实数 x、y、z 满足

$$\frac{y}{x-y}=\frac{x}{y+z}, \quad ①$$

$$z^2=x(y+z)-y(x-y). \quad ②$$

求$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$的值.

二、(25 分)在圆内接四边形 $ABCD$ 中,已知$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CD}>1$. 求证:过点 A、C 作圆的两条切线与直线 BD 三线共点.

三、(25 分)已知 a、b 是整数,且满足

$a-b$ 是质数，ab 是完全平方数. 若 $a\geqslant 2\,011$，求 a 的最小值.

参考答案

第一试

一、**1.** A.

计算相邻两个数的差，可知第 n 个数为

$$1+4\times1+4\times2+\cdots+4(n-2)$$
$$=1+4[1+2+\cdots+(n-2)]$$
$$=1+4\times\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$
$$=1+2(n-1)(n-2).$$

故第 101 个数为

$$1+2(101-1)(101-2)=19\,801.$$

2. D.

如图 2，令

$AB=c,AC=b,$

$BD=x,CD=y.$

则 $c^2-x^2=b^2-y^2$. ①

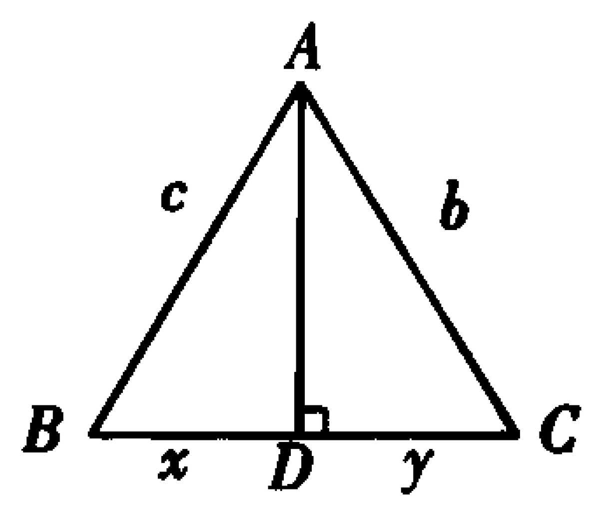

图 2

分解得

$$(c+x)(c-x)=(b+y)(b-y).$$

(1) 若 $c+x=b+y$，则 $c-x=b-y$.

两式相加得 $2c=2b\Rightarrow c=b$.

(2) 若 $c-x=b-y$，同理，$c=b$.

(3) 若 $cx=by$，则 $y=\frac{cx}{b}$，代入式①得

$$c^2-b^2=x^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)$$
$$\Rightarrow(c+b)(c-b)(b^2+x^2)=0\Rightarrow c=b.$$

(4) 若 $c:x=b:y$，则 $y=\frac{bx}{c}$，代入式①同理可得 $c=b$.

综上，四个条件均可得到 $AB=AC$.

3. D.

注意到原方程关于 $a、b、c$ 对称.

不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$. 则 $a+b\leqslant 2c$.

代入原方程得 $2<ab\leqslant 6$.

当 $ab=3$ 时，得

$(a,b,c)=(1,3,8)$；

当 $ab=4$ 时，得

$(a,b,c)=(1,4,5),(2,2,4)$；

当 $ab=5$ 时，得

$(a,b,c)=(1,5,4)$（舍去）；

当 $ab=6$ 时，c 不为正整数.

综上，当 $a\leqslant b\leqslant c$ 时，原方程有三组正整数解

$(a,b,c)=(1,3,8),(1,4,5),(2,2,5)$.

故原方程的正整数解共有

$2\times6+3=15$（组）.

4. C.

设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+b$.

由 $PQ\perp l$，知 $k=-2$.

将 $P(1,1)$ 代入得 $b=3$.

故直线 PQ 的解析式为 $y=-2x+3$.

5. A.

设 $1+17n=a^2$（a 为正整数）. 则

$$n=\frac{a^2-1}{17}=\frac{(a+1)(a-1)}{17}.$$

因为 n 为正整数，17 为质数，所以，

$a+1=17b$ 或 $a-1=17c$（$b、c$ 为正整数）.

(1) 当 $a+1=17b$ 时，

$$n=\frac{a^2-1}{17}=17b^2-2b\leqslant 2\,011.$$

因为 b 是正整数，所以，$1\leqslant b\leqslant 10$.

此时，有 10 个正整数使 $1+17n$ 是完全平方数.

(2) 当 $a-1=17c$ 时，

$$n=\frac{a^2-1}{17}=17c^2+2c\leqslant 2\,011.$$

同理，有 10 个正整数使 $1+17n$ 是完全平方数.

综上，符合条件的正整数 n 有 20 个.

6. B.

如图 3，设 $\triangle ABC$ 内切圆为 $\odot I$，半径为 r，$\odot I$ 与边 $BC、CA、AB$ 分别切于点 $D、E、F$，联结 $IA、IB、IC、ID、IE、IF$.

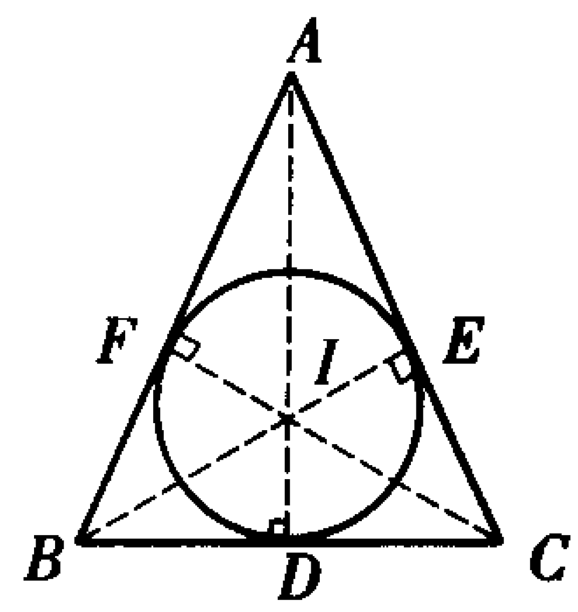

图 3

由切线长定理得

$AF=p-a, BD=p-b, CE=p-c,$

其中，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

在 Rt$\triangle AIF$ 中，$\tan\angle IAF=\frac{IF}{AF}$，即

$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$.

同理，$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$，$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$.

代入已知等式得

$\frac{p-a}{r}+\frac{p-c}{r}=\frac{4(p-b)}{r}$.

故 $a+c=\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\times4=6$.

二、**1.** $7<x\leqslant19$.

前 4 次运算的结果分别为

$3x-2, 3(3x-2)-2=9x-8,$

$3(9x-8)-2=27x-26,$

$3(27x-26)-2=81x-80.$

由已知得

$\begin{cases}27x-26\leqslant487,\\81x-80>487.\end{cases}$

解得 $7<x\leqslant19$.

2. $80°$.

如图 4，作 $BO \perp\!\!\!\!= CD$，联结 AO、DO.

则四边形 $BCDO$ 是菱形. 于是，

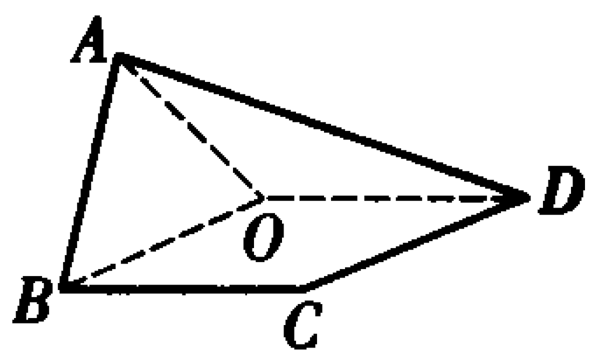

图 4

$OB=OD=BC=AB$.

由$\angle ABC+\angle C=360°-\angle BAD-\angle ADC=240°$，

$\angle OBD+\angle C=180°$，

得 $\angle ABO=240°-180°=60°$.

因此，$\triangle ABO$ 是等边三角形.

则$\angle ODA=\angle OAD=\angle BAD-\angle BAO=20°$，

$\angle OBC=\angle ODC=ADC-\angle ODA=20°$.

故$\angle ABC=\angle ABO+\angle OBC=80°$.

3. $a<m<n<b$.

如图 5，函数 $y=(x-m)(x-n)-1$ 是二次函数，它的图像是一条开口向上的抛物线，与 x 轴两交点分别为$(a,0)$、$(b,0)$.

当 $x=m$ 或 $x=n$ 时，$y=-1<0$.

故 $a<m<n<b$.

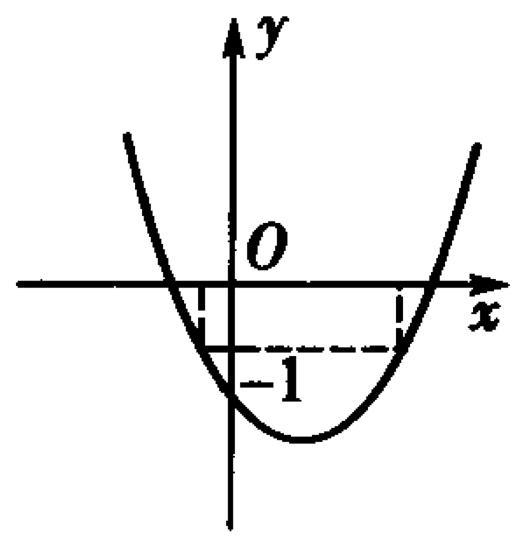

图 5

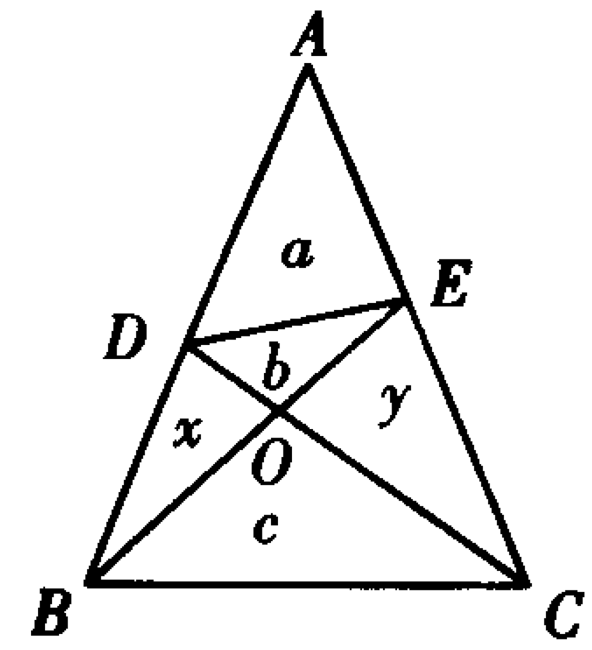

图 6

4. 相等.

如图 6，设

$S_{\triangle ADE}=a, S_{\triangle DOE}=b, S_{\triangle BOC}=c,$

$S_{\triangle BOD}=x, S_{\triangle COE}=y.$

由$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle DOE}}=\frac{BO}{OE}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle COE}}$，得

$\frac{x}{b}=\frac{c}{y}\Rightarrow xy=bc.$ ①

由$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{BD}{AD}=\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}}$，得

$\frac{b+x}{a}=\frac{c+x}{a+b+y}$

$\Rightarrow b(x+y)+xy=ac-ab-b^2.$ ②

由式①、②解得

$x+y=\frac{ac-ab-b^2-bc}{b}$.

因此，$S_{\triangle ABC}=a+b+c+(x+y)=\frac{ac}{b}$.

故$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=a\cdot\frac{b}{ac}=\frac{b}{c}=\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle BOC}}$.

第 二 试

一、由式①得 $y^2-x^2=-y(x+z)$.

由式②得 $z^2=xz+y^2$.

则 $\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\frac{z^2-y(x+z)}{2yz}$

$=\frac{xz+y^2-y(x+z)}{2yz}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-y}{y}\cdot\frac{z-y}{z}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y+z}{x}\cdot\frac{z-y}{z}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2-y^2}{xz}=\frac{1}{2}$.

数学奥林匹克高中训练题(139)

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)03－0042－04

第一试

一、填空题(每小题8分,共64分)

1. 已知 $f(x)=-\log_3(x^2-ax-a)$ 在 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上单调递增. 则 a 的取值范围是______.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{12-3x}$ 的值域为______.

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面正方形的对角线中存在异面直线. 若其中两条异面直线的距离为1,则正方体的体积为______.

4. 已知数列 $\{x_n\}$:

$1,3,3,3,5,5,5,5,5,\cdots$

由全体正奇数自小到大排列而成,且每个奇数 $k(k=1,3,5,\cdots)$ 连续出现 k 次. 若这个数列的通项公式为 $x_n=a[\sqrt{bn+c}]+d$,则 $a+b+c+d=$______($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数).

5. 已知方程 $x+8y+8z=n(n\in\mathbf{N})$ 有666组正整数解 (x,y,z). 则 n 的最大值是______.

6. $\sum\limits_{i=0}^{50}\sum\limits_{j=0}^{50}\mathrm{C}_{50}^{i}\mathrm{C}_{50}^{j}$ 除以31的余数是______.

二、如图7,过 A、C 作圆的切线与直线 BD 分别交于点 P、Q. 易知

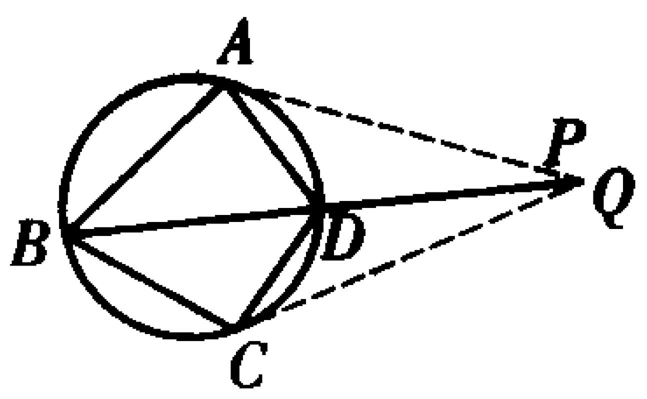

图7

$\triangle ABP\backsim\triangle DAP$.

则 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PA}{PD}$.

故 $\dfrac{AB^2}{AD^2}=\dfrac{PB}{PA}\cdot\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PB}{PD}$.

同理,由 $\triangle CBQ\backsim\triangle DCQ$,得

$\dfrac{BC^2}{CD^2}=\dfrac{QB}{QD}$.

因为 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{BD}$,所以,

$\dfrac{PB}{PD}=\dfrac{QB}{QD}\Rightarrow\dfrac{PB-PD}{PD}=\dfrac{QB-QD}{QD}$

$\Rightarrow\dfrac{BD}{PD}=\dfrac{BD}{QD}\Rightarrow PD=QD$.

因此,点 P 与 Q 重合.

故命题得证.

三、设 $a-b=m$(m 是质数),$ab=n^2$(n 为正整数).

由 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

$\Rightarrow(2a-m)^2-4n^2=m^2$

$\Rightarrow(2a-m+2n)(2a-m-2n)=m^2\times1$.

因为 $2a-m+2n$ 与 $2a-m-2n$ 都是正整数,且 $2a-m+2n>2a-m-2n$(m 为质数),所以,

$2a-m+2n=m^2,2a-m-2n=1$.

解得 $a=\dfrac{(m+1)^2}{4},n=\dfrac{m^2-1}{4}$.

于是,$b=a-m=\dfrac{(m-1)^2}{4}$.

又 $a\geqslant2\,011$,即 $\dfrac{(m+1)^2}{4}\geqslant2\,011$.

考虑到 m 是质数,解得 $m\geqslant89$.

此时,$a\geqslant\dfrac{(89+1)^2}{4}=2\,025$.

当 $a=2\,025$ 时,

$m=89,b=1\,936,n=1\,980$.

因此,a 的最小值为2 025.

(李　明　李玉新　安徽省五河县第三中学,233300)

7. 将质因子只有 2、3、5、7 中的一个、二个、三个或四个的全体排成数列 $n_1,n_2,\cdots$. 则 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=$______.

8. 半径为 1 的球的内接圆锥的最大体积是______.

二、解答题(共 56 分)

9. (16 分)设 a、b、c 是正实数. 证明:

$$\sum\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

其中,"$\sum$"为轮换对称和.

10. (20 分)已知

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1,\ f(2x)-f(x)=x^2$$

对任意实数 x 成立. 求 $f(x)$ 的解析式.

11. (20 分)以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 上一点 $A(0,1)$ 为直角顶点的内接等腰 Rt$\triangle ABC$ 有几个?

加 试

一、(40 分)已知 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,P 是三角形内一点,满足

$$\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB.$$

求证:$AP\geqslant AI$,当且仅当点 P 与 I 重合时,上式等号成立.

二、(40 分)设 $n\in\mathbf{N}_+$,已知 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使对任意 i、$j\in\{1,2,\cdots,n\}$,有 $x_ix_j\leqslant t^{|i-j|}(t\in(0,1))$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i<\frac{1}{1-\sqrt{t}}.$$

三、(50 分)试确定所有的正整数 $n(n\geqslant 2)$,使得 $\mathrm{C}_n^1,\mathrm{C}_n^2,\cdots,\mathrm{C}_n^{n-1}$ 中存在质数.

四、对 7×7 方格表中的小方格进行染色,使得每个被染色的小方格满足:与其相邻的小方格中最多只有一个被染色,其中两个小方格相邻是指它们有一条公共边. 问:最多可以给多少个小方格染色?

参考答案

第一试

一、1. $2-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

因 $y=\log_3(x^2-ax-a)$ 在 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上单调递减,所以,

$$\begin{cases}x_0=\frac{a}{2}\geqslant 1-\sqrt{3},\\(1-\sqrt{3})^2-a(1-\sqrt{3})-a\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $2-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

2. $[1,2]$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 $3\leqslant x\leqslant 4$,所以,$0\leqslant x-3\leqslant 1$.

令 $x-3=\sin^2\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 则

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{x-3}+\sqrt{3(4-x)}\\&=\sin\theta+\sqrt{3(1-\sin^2\theta)}\\&=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

因为 $\frac{\pi}{3}\leqslant\theta+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,所以,

$$1\leqslant 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2.$$

3. 1 或 $3\sqrt{3}$.

设正方体的棱长为 x.

若异面直线 AC 与 B_1D_1 的距离为 1,则 $x=1$.

从而,正方体的体积为 1.

若异面直线 AC 与 BC_1 的距离为 1,则 $\frac{\sqrt{3}}{3}x=1,x=\sqrt{3}$.

从而,正方体的体积为 $3\sqrt{3}$.

4. 3.

当 $k^2+1\leqslant n\leqslant(k+1)^2$ 时,

$x_n=2k+1,k=[\sqrt{n-1}]$,

所以,$x_n=2[\sqrt{n-1}]+1$.

于是,$(a,b,c,d)=(2,1,-1,1)$.

故 $a+b+c+d=3$.

5. 304.

当 $m>1(m\in\mathbf{N})$ 时,$y+z=m$ 有 $m-1$

组正整数解. 从而,原方程也就有 $m-1$ 组正整数解.

由 $1+2+\cdots+(m-1)=666$,解得

$m=37$ 或 -36(舍).

所以,$1+8\times37\leqslant n\leqslant8+8\times37=304$.

6. 1.

原式 $=\sum\limits_{i=0}^{50}\mathrm{C}_{50}^{i}\cdot\sum\limits_{j=0}^{50}\mathrm{C}_{50}^{j}=(2^{50})^2=2^{100}$.

而 $2^5\equiv1(\bmod 31)$,故

原式 $=2^{100}\equiv1(\bmod 31)$.

因此,余数是 1.

7. $\frac{27}{8}$.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=\left(\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)\left(\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)\left(\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{5^k}\right)\left(\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{7^k}\right)-1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}-1$$

$$=\frac{27}{8}.$$

8. $\frac{32\pi}{81}$.

设内接圆锥底面半径长为 r,高为 h.

为求体积最大值,由对称性,显然应该取 $h\geqslant1$,则 $h=1+\sqrt{1-r^2}$.

故 $V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}r^2(1+\sqrt{1-r^2})$.

令 $d=\sqrt{1-r^2}\geqslant0$. 则

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}(1-d^2)(1+d)$$

$$=\frac{\pi}{6}(1+d)(1+d)(2-2d)$$

$$\leqslant\frac{\pi}{6}\left[\frac{(1+d)+(1+d)+(2-2d)}{3}\right]^3$$

$$=\frac{32\pi}{81}.$$

当且仅当 $1+d=2-2d\Rightarrow d=\frac{1}{3}, r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时,上式等号成立.

二、**9.** 注意到

$$\sum\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}=\sum\sqrt{\frac{b}{b+c}\cdot\frac{a}{c+a}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)$$

$$=\frac{3}{2}.$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,上式等号成立.

10. 当 $x\neq0$ 时,

$$f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{x^2}{2^{2k}}(k=1,2,\cdots,n).$$

将这 n 个等式相加得

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=x^2\cdot\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}.$$

令 $n\to\infty$,知 $f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)=1$.

上式右边 $=\frac{x^2}{3}$.

故 $f(x)=1+\frac{x^2}{3}(x\neq0)$.

又 $f(0)=1$ 也满足条件,因此,

$$f(x)=1+\frac{x^2}{3}.$$

11. 设 $l_{AB}:y=kx+1(k>0)$.

代入椭圆方程得

$(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$.

所以,$x_B=\frac{-2a^2k}{1+a^2k^2}$,

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_A-x_B|$$

$$=\frac{2a^2k\sqrt{1+k^2}}{1+a^2k^2}.$$

同理,$|AC|=\frac{2a^2\sqrt{1+k^2}}{k^2+a^2}$.

由 $|AB|=|AC|$,得

$k^3-a^2k^2+a^2k-1=0$,

即 $(k-1)[k^2+(1-a^2)k+1]=0$.

第二个因式中

$\Delta=(1-a^2)^2-4=(a^2-3)(a^2+1)$.

故当 $a^2>3$ 时,方程有两个正根且均不为 1;当 $a^2=3$ 时,方程有二重根 1;当 $a^2<3$ 时,方程无实根.

综上,当 $a^2>3$ 时,满足条件的三角形有 3 个;当 $a^2\leqslant3$ 且 $a^2\neq1$ 时,满足条件的三角

形有 1 个.

加　试

一、如图 1,易知

$\angle PBC+\angle PCB$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=\angle IBC+\angle ICB$.

故$\angle BPC$

$=\angle BIC$.

从而,P、B、C、I 四点共圆.

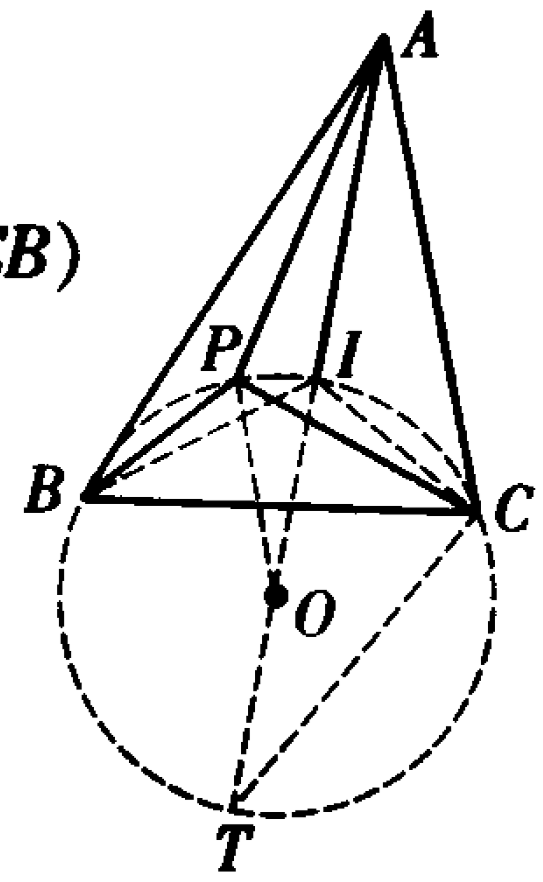

图 1

由内外角平分线互相垂直,知 B、C、I 与射线 AI 上的旁切圆圆心 T 四点共圆,且 IT 是该圆的直径,IT 的中点 O 是圆心.

因为 A、I、T 三点共线($\angle BAC$ 的平分线),且点 P 在圆周上,所以,

$AP+PO\geqslant AO=AI+IO$,$PO=IO$.

故 $AP\geqslant AI$.

当且仅当 P 为线段 AO 与圆周的交点,即点 P 与 I 重合时,上式等号成立.

二、用数学归纳法证明:$x_1,x_2,\cdots,x_n$中的数分别不超过 $1,\sqrt{t},\cdots,(\sqrt{t})^{n-1}$中的数.

当 $n=1$ 时,令 $i=j=1$,知 $x_1^2\leqslant 1$.

故 $x_1\leqslant 1=(\sqrt{t})^{1-1}$,结论成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立,则当 $n=k+1$ 时,$x_1x_{k+1}\leqslant t^k$.

若 $x_{k+1}\leqslant x_1$,则

$x_{k+1}\leqslant(\sqrt{t})^k=(\sqrt{t})^{k+1-1}$.

由归纳假设 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 中的数分别不超过 $1,\sqrt{t},\cdots,(\sqrt{t})^{k-1}$ 中的数,故结论成立.

若 $x_1<x_{k+1}$,则

$x_1<(\sqrt{t})^k=(\sqrt{t})^{k+1-1}$.

由归纳假设 $x_2,x_3,\cdots,x_{k+1}$ 中的数分别不超过 $1,\sqrt{t},\cdots,(\sqrt{t})^{k-1}$ 中的数,故结论成立.

因此,当 $n=k+1$ 时,结论成立.

综上,结论成立.

则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{t})^{i-1}$

$=\frac{1-(\sqrt{t})^n}{1-\sqrt{t}}<\frac{1}{1-\sqrt{t}}$.

三、首先,由 $C_p^1=p$,知所有的质数 p 满足条件.

其次证明:所有的合数都不满足条件,即对于合数 n,$C_n^k(1\leqslant k\leqslant n-1)$是合数.

(1)若$(n,k)=1$,由 $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$是整数,得 $k\mid C_{n-1}^{k-1}$.

又 n 是合数,故 C_n^k是合数.

(2)若$(n,k)=d\neq 1$,设

$n=n_1d$,$k=k_1d$.

则 $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}=\frac{n_1}{k_1}C_{n-1}^{k-1}$,且

$(n_1,k_1)=1(n_1>1)$.

因为 C_n^k是整数,所以,$k_1\mid C_{n-1}^{k-1}$,且

$C_{n-1}^{k-1}\geqslant n-1\geqslant k=k_1d$.

从而,$\frac{C_{n-1}^{k-1}}{k_1}\geqslant d>1$.

因此,C_n^k是合数.

由(1)、(2)知 C_n^k是合数.

综上,当且仅当 n 为质数时,$C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1}$中存在质数.

四、最多给 26 个小方格染色.

如图 2 的染色满足条件.

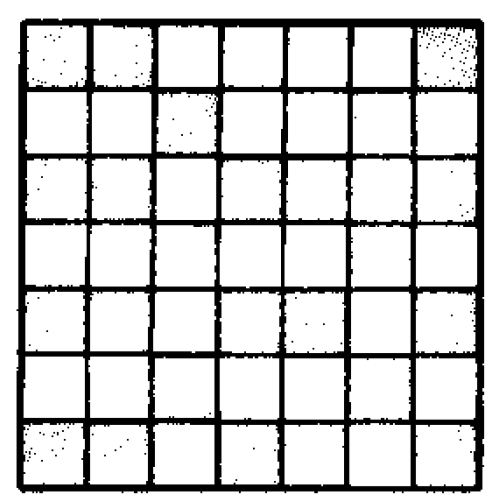

图 2

下面证明:最多可给 26 个小方格染色.

首先,由题意可知,对于任何 2×2 方格表最多将其中的两个小方格染色;对于 3×3 方格表最多可以将其中的 5 个小方格染色,使其满足条件.

其次,对于 5×5 方格表,是在 3×3 方格表的基础上增加了宽度为 2 的“镶边”(如图 3),而镶边最多可以划分成 4 个 2×2 的方格表,其中右下角的两个方格中,一个被重复使用,一个没有使用,于是,最多可以增加染色

数学奥林匹克问题

本期问题

初 293 已知方程

$$x^3-(2a+11)x^2+(a^2+11a+28)x-28a=0$$

的所有根都是正整数. 求 a 的值及方程的根.

初 294 问:是否存在满足条件的正整数 b,使得 2 011 可以在 b 进制下写成$\overline{xyz}$,且

$$x+y+z=2+0+1+1.$$

高 293 求

$$c_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]\ (n\in\mathbf{N})$$

中质因子 7 的幂次.

高 294 设 a、b、c、$m\in\mathbf{R}_+$. 试证:

$$\frac{a^{m+2}}{a+b}+\frac{b^{m+2}}{b+c}+\frac{c^{m+2}}{c+a}\geqslant\frac{1}{2}(a^{m+1}+b^{m+1}+c^{m+1}).$$

上期问题解答

初 291 设锐角$\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD、BE、CF,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的平分线分别与 EF、FD、DE 交于点 A'、B'、C'. 证明:

$$S_{\triangle A'B'C'}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle DEF}.$$

证明 先证明下面的代数不等式.

设 x、y、z 均为正数. 则有

$$\frac{xy}{(x+z)(y+z)}+\frac{yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{zx}{(z+y)(x+y)}\geqslant\frac{3}{4},\qquad ①$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,上式等号成立.

事实上,

$$\text{式①}\Leftrightarrow4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)]\geqslant3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geqslant6xyz$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}-\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}-\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2\geqslant0.$$

上式显然成立,故式①成立,当且仅当 $x=y=z$ 时,式①等号成立.

下面证明原不等式.

格 9 个,且增加 9 个染色格时,必须是右下角的方格被染色,而重复使用的格没有被染色,即 5×5 的方格表最多被染色 14 个,且染色 14 个格时右下角的方格被染色.

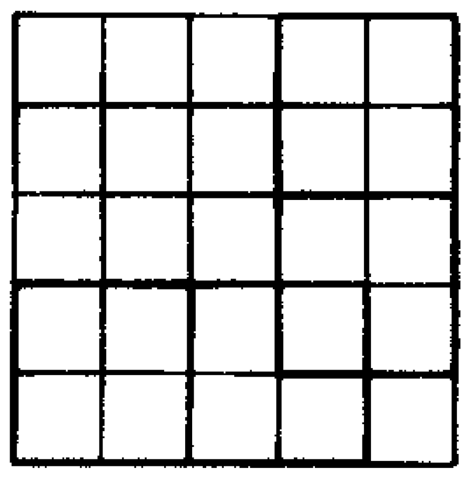

图 3

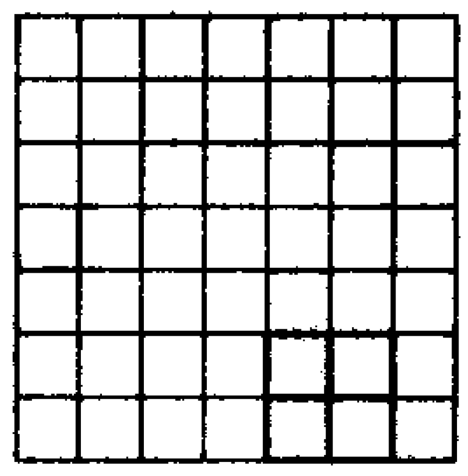

图 4

最后,7×7 方格表是在 5×5 方格表基础上增加了宽度为 2 的镶边(如图 4).

同理,最多可以增加 13 个染色格,且增加 13 个染色格时,必须是右下角的方格被染色,而重复使用的格没有被染色,即最多可以染色 27 个格. 此时,不妨设最后一行 、倒数第二列的方格未染色(否则,倒数第二行最后一列的方格未染色),则由前面的分析可知,倒数后两行、倒数第三列的两个方格被染色,矛盾.

故最多可以染色 26 个方格.

综上所述,最多给 26 个小方格染色.

(张 雷 辽宁省沈阳市东北育才学校,110001)

如图 1，设 $\triangle ABC$ 的边 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$.

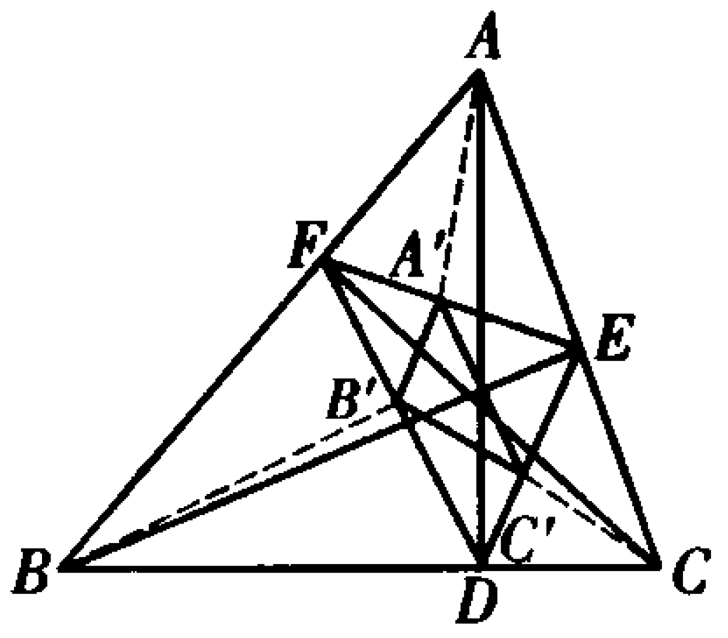

图 1

在 $\triangle AEF$ 中，由角平分线定理知

$$\frac{FA'}{A'E}=\frac{FA}{AE}=\frac{b\cos A}{c\cos A}=\frac{b}{c}.$$

同理，$\dfrac{FB'}{B'D}=\dfrac{FB}{BD}=\dfrac{a}{c}$.

故 $\dfrac{S_{\triangle A'FB'}}{S_{\triangle DEF}}=\dfrac{ab}{(a+c)(b+c)}$.

同理，$\dfrac{S_{\triangle B'DC'}}{S_{\triangle DEF}}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$，

$$\frac{S_{\triangle C'EA'}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{ca}{(b+c)(a+b)}.$$

则 $S_{\triangle A'FB'}+S_{\triangle B'DC'}+S_{\triangle C'EA'}$

$$=\left[\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\right]S_{\triangle DEF}.$$

在不等式①中令 $x=a,y=b,z=c$，得

$$S_{\triangle A'FB'}+S_{\triangle B'DC'}+S_{\triangle C'EA'}\geqslant\frac{3}{4}S_{\triangle DEF}.$$

故 $S_{\triangle A'B'C'}$

$$=S_{\triangle DEF}-(S_{\triangle A'FB'}+S_{\triangle B'DC'}+S_{\triangle C'EA'})$$

$$\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle DEF}.$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，上式等号成立.

（苏化明　合肥工业大学数学系，230009）

初 292　求 $\sqrt[3]{\underbrace{23+\sqrt[3]{23+\cdots+\sqrt[3]{23}}}_{n\text{个}}}\ (n\geqslant1)$ 的整数部分.

解　设

$$a_n=\sqrt[3]{\underbrace{23+\sqrt[3]{23+\cdots+\sqrt[3]{23}}}_{n\text{个}}}\ (n\in\mathbf{N}_+).$$

则 $2<\sqrt[3]{23}=a_1<3$，$a_{n+1}=\sqrt[3]{23+a_n}$.

用数学归纳法易证

$2<a_n<3\ (n\in\mathbf{N}_+)$.

事实上，

$a_{n+1}=\sqrt[3]{23+a_n}<\sqrt[3]{23+3}<3$，

$a_n>\sqrt[3]{23}>2$.

故 $\sqrt[3]{\underbrace{23+\sqrt[3]{23+\cdots+\sqrt[3]{23}}}_{n\text{个}}}\ (n\in\mathbf{N}_+)$ 的整数部分为 2.

（娄姗姗　天津师范大学《中等数学》编辑部，300074）

高 291　如图 2，$\angle XOY<90^\circ$，$\triangle ABC$ 的顶点 A 在 OY 上、边 BC 在 OX 上，且 $AB=AC$，BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高线，$\odot M$ 是 $\triangle AOB$ 的内切圆、半径为 m，$\odot N$ 是 $\triangle AOC$ 的旁切圆、半径为 n. $\triangle ABC$、$\triangle AEF$ 的外接圆半径为 R、r. 求证：$R+r=m+n$.

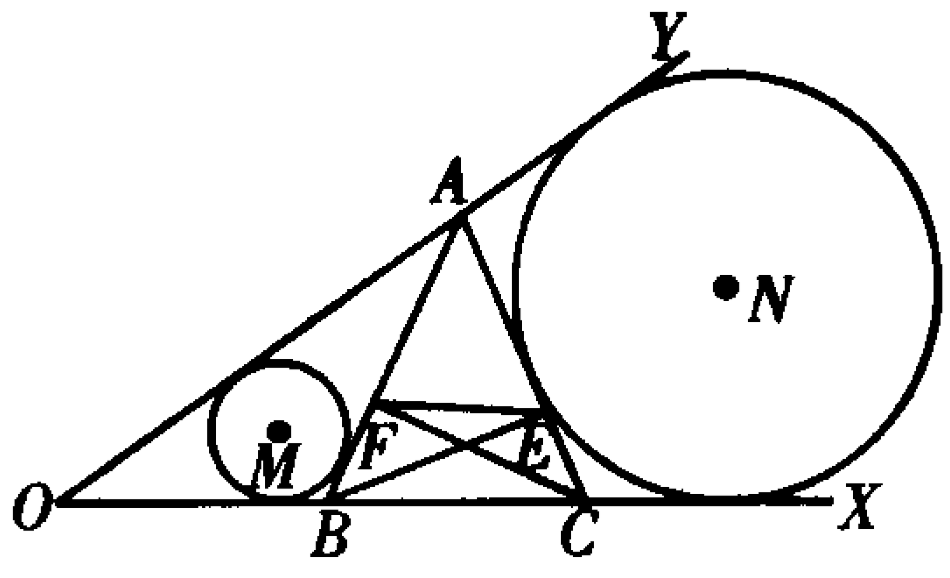

图 2

证明　显然，O、M、N 三点共线.

如图 3，作高 AD.

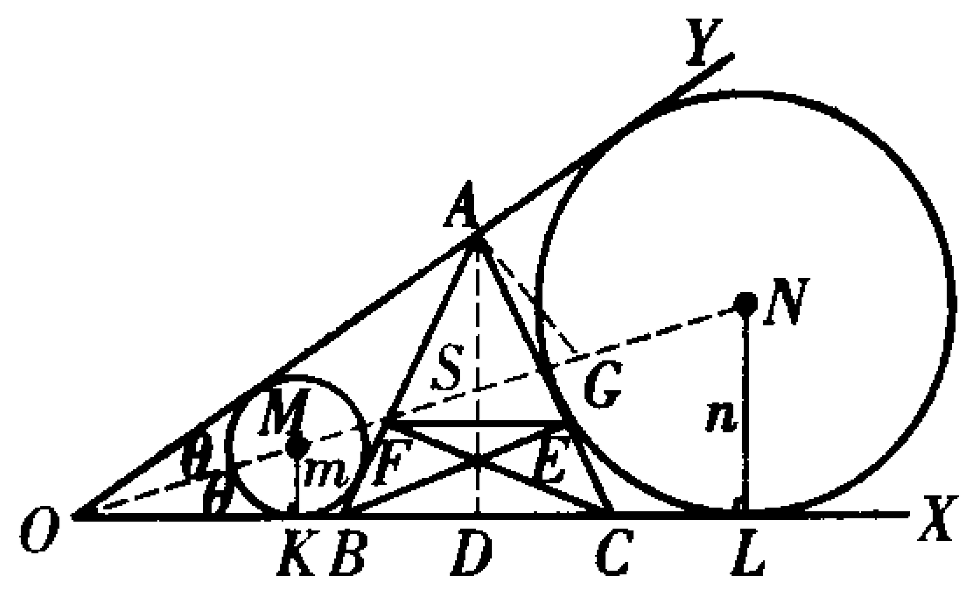

图 3

则 $BD=DC=\dfrac{1}{2}BC$.

记 $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$.

由 $\angle BEC=90^\circ=\angle BFC$，知 B、C、E、F 四点共圆. 从而，$\angle AEF=\angle ABC$.

所以，$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$.

易知 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}=\cos2\alpha$，$EF=BC\cos2\alpha$.

因为 $2R=\dfrac{BC}{\sin2\alpha}$，$2r=\dfrac{EF}{\sin2\alpha}$，所以，

$$2(R+r)=\frac{BC+BC\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$=BC\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=BC\cdot\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=2DC\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2DC\cot\alpha.$$

故 $R+r=DC\cot\alpha=AD.$ ①

设 $\angle XOY=2\theta$,设 AD 与 ON 交于点 S,作 $AG\perp OY$,点 G 在 ON 上. 易证

$\angle AGO=90°-\theta=\angle OSD=\angle ASG.$

从而,$AS=AG.$

又 $m=MK=OK\tan\theta$

$=\frac{1}{2}(OA+OB-AB)\tan\theta,$

$n=NL=OL\tan\theta$

$=\frac{1}{2}(OA+OC+AC)\tan\theta.$

注意到 $AB=AC,OB+OC=2OD$,则

$m+n=\frac{1}{2}(2OA+2OD)\tan\theta$

$=OA\tan\theta+OD\tan\theta$

$=AG+SD=AS+SD=AD.$ ②

由式①、②得 $R+r=m+n.$

(黄全福 安徽省怀宁县江镇中学,246003)

高292 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上,且 $PD/\!/AB$,$PE/\!/BC$,$PF/\!/CA$,记 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEF$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_0. 求证:$S_1S_2S_3\leqslant\frac{8}{27}S_0^3$,等号成立当且仅当 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

证明 如图4,延长 AP、BP、CP 分别与对边交于点 M、N、G.

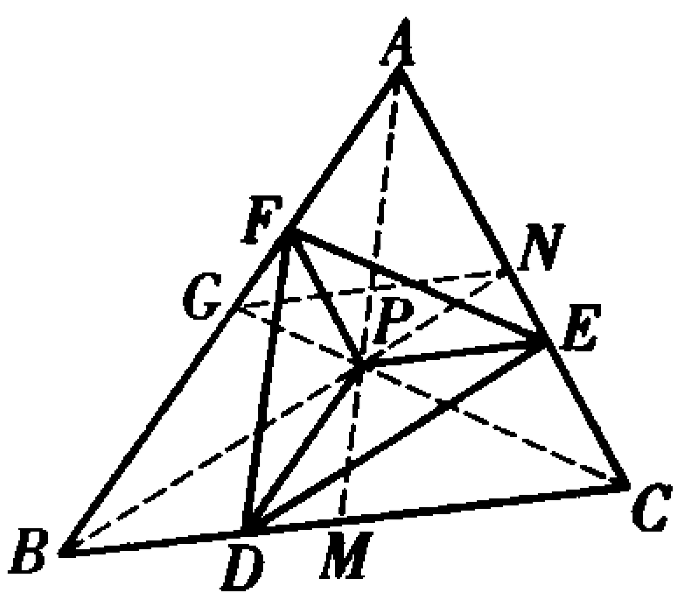

图4

不失一般性,记 $\triangle ABC$ 的面积为1,并设

$\frac{BD}{BC}=x,$

$\frac{CE}{CA}=y,\frac{AF}{AB}=z.$

由 $PD/\!/AB$,得

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{GP}{GC}=\frac{BD}{BC}=x.$$

同理,由 $PE/\!/BC$,$PF/\!/CA$,得

$$\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}}=y,\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}}=z.$$

故 $x+y+z=\frac{S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle ABC}}=1.$

而 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=z(1-y)$,即

$S_1=z(1-y).$

同理,$S_2=x(1-z)$,$S_3=y(1-x).$

则 $S_1S_2S_3\leqslant\frac{8}{27}S_0^3$

$\Leftrightarrow xyz(1-x)(1-y)(1-z)$

$\leqslant\frac{8}{27}[1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)]^3$

$\Leftrightarrow xyz(1-x)(1-y)(1-z)$

$\leqslant\frac{8}{27}[xy+yz+zx]^3$

$\Leftrightarrow xyz(x+y)(y+z)(z+x)$

$\leqslant\frac{1}{27}(2xy+2yz+2zx)^3$

$\Leftrightarrow(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$\leqslant\frac{1}{27}[(xy+yz)+(yz+zx)+(zx+xy)]^3.$

由三元均值不等式易得上式.

当且仅当 $xy+yz=yz+zx=zx+xy$,即 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时,上式等号成立.

所以,当等号成立时,有

$\frac{PN}{PB}=\frac{PG}{PC}=\frac{1}{2}$,即 $GN/\!/BC$.

因此,$\frac{AG}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{GN}{BC}=\frac{1}{2}$.

于是,原不等式等号成立当且仅当 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

(沈 毅 四川省成都七中初中,610041)