兰州大学 2011 年高等代数考研试题

一、 (1) $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充要条件是对任意的 $g(x),h(x)\in P[x]$，由 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 必能推出 $f(x)\mid g(x)$ 或 $f(x)\mid h(x)$。

(2) 证明：$x^n+2 \quad (n\geq 2)$ 在整数域上是不可约。

二、

(1) 证明：$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix} = |A|z-\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_i y_j$$

(2) 求 $$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}$$ 的值。

三、 设矩阵 A 是 $m\times n$ 矩阵，矩阵 B 是 $n\times s$ 矩阵。证明：

$$rank(AB)\geq rank(A)+rank(B)-n。$$

四、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维欧式空间 V 中的一组向量，而

$$\Delta=\begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$$

证明：当且仅当 $|\Delta|\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

五、 $f(x)$ 是 m 维线性空间 U 到 n 维线性空间 V 的线性映射。求证：

$$\dim(f(U))=m-\dim(f^{-1}(0)\cap U).$$

六、 $f(\lambda)$ 是矩阵 A 的特征多项式，$f(\lambda)$ 可写成一次因式乘积的形式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\gamma_1}(\lambda-\lambda_2)^{\gamma_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\gamma_s}$$

求证： $P^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$。(参见 05 年 7 题)

七、 1 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&a\end{pmatrix}$ 的二重特征根。求 a 的值和正交矩阵 T 使 T^TAT 为对角矩阵。