# 复旦大学2010年实分析竞赛试题参考解答

作 者 张祖锦
摘 要 本文给出了复旦大学 2010 年实分析竞赛试题参考解答
关键词 复旦大学 实分析 竞赛试题

1. 设 $f$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 上的实函数, 若有常数 $M > 0$ 使得对任何有限个两两不同的实数 $x_1, \cdots, x_n$ 都有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| \leq M$. 证明: $\{x;\ f(x) \neq 0\}$ 是至多可数的.

   **解答.** 首先说明对 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x;\ f(x) > 1/n\}$ 是有限集 (个数不超过 $n([M]+1)$). 若不然,

$$\sum_{x\in A_n} f(x) > \frac{1}{n}\sum_{n\in A_n} 1 > \frac{1}{n}\cdot n([M]+1) > M,$$

   这是一个矛盾.

   其次, 同上论述, $B_n = \{x;\ f(x) < -1/n\}$ 也是有限集. 于是

$$\{x;\ f(x) \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$$

   是至多可数的. ■

2. 设$E$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 上的 *Lebesgue* 可测集, 且 $\boldsymbol{m}(E) < \infty$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E e^{inx} dx = 0.$$

   这里 $\boldsymbol{m}$ 表示 *Lebesgue* 测度.

   **解答.** 由 $\boldsymbol{m}(E) < \infty$ 知 $\chi_E \in L^1(\mathbb{R})$, 而所证即为标准的 *Riemann – Lebesgue* 引理. ■

3. 设 $f$ 是 $[0,1]$ 上实的 *Lebesgue* 可测函数, 并且 $\mathbb{Z}$ 是整数集. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |\cos f(x)|^n\, dx = \boldsymbol{m}\left(f^{-1}(\pi\mathbb{Z})\right).$$

**证明.** 注意到 $|\cos f(x)|^n \leq 1$ 及

$$|\cos f(x)|^n \overset{a.e.}{\to} \chi_{f^{-1}(\pi\mathbb{Z})},$$

我们由 Lebesgue 控制收敛定理得到结论. ■

4. 对 $\sigma$-有限的测度空间 $(X, \Sigma, \mu)$, 设 $f$ 是 $X$ 上的非负可测函数, 记

$$\mu(f > t) = \mu\{x;\ f(x) > t\}.$$

证明:

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(f > t)\, dt.$$

**证明.** 由 Fubini 定理,

$$\int_X f d\mu = \int_X \int_0^f dt d\mu = \int_0^\infty \int_X \chi_{f>t} d\mu dt = \int_0^\infty \mu(f > t) dt.$$

■