第35届俄罗斯数学奥林匹克(十一年级)

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2010)01-0034-03

11.1. 在一个由若干个城市组成的国家中,其某些城市之间有道路相连,满足:

(1)所有道路互不相交;

(2)对任意两个城市都可以从一个城市出发沿道路走到另一个城市(中间可能通过其他城市).

已知在每个城市中都设置了一个里程表写有从这个城市出发开车途经所有城市所走过路程的最小值(同一城市可能经过几次).证明:任意两个城市里程表上的数字的比不超过$\frac{3}{2}$.

11.2. 设数列$a_1,a_2,\cdots$满足$a_1\in(1,2)$,且$a_{k+1}=a_k+\frac{k}{a_k}(k=1,2,\cdots)$.证明:至多存在一个正整数对$(i,j)(i<j)$,使得$a_i+a_j$为整数.

11.3. 在四面体$ABCD$中,所有的平面角都不是$90°$,$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的垂心共线.证明:四面体外接球球心与棱AB、AC、AD的中点共面.

11.4. 令S表示平面上满足$x^2+y^2\leqslant 10^{10}$的所有整点(x,y)组成的集合.甲乙两人(由甲开始)轮流依次指定S中的两两不同的点$A_1,A_2,\cdots$满足:$A_i(i=1,2,\cdots)$与A_{i+1}关于原点不对称,且$A_iA_{i+1}<A_{i+1}A_{i+2}$.一个人如果

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\leqslant 3(n-1)^2$.

依题意知,S中任意两点之间的距离互不相同,故$C_t^2\leqslant 3(n-1)^2$,即

$t^2-t\leqslant 6(n-1)^2$.

于是,$t\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+24(n-1)^2}<n\sqrt{6}$

(最后一个不等式等价于$1+24(n-1)^2<(2n\sqrt{6}-1)^2$,展开后移项即可得到).

另一方面,对S中的任意两点(x_i,y_i,z_i)、(x_j,y_j,z_j),考虑集合$\{a,b,c\}$(允许出现重复元素),其中,

$a=|x_i-x_j|,b=|y_i-y_j|,c=|z_i-z_j|$.

依题意知,所得的$\{a,b,c\}$两两不同,且$0\leqslant a$、b、$c\leqslant n-1$,a、b、c不全为0.于是,

$$C_t^2\leqslant C_n^3+2C_n^2+C_n^1-1. \quad ①$$

故$C_t^2<C_n^3+2C_n^2+C_n^1$.

解得$t<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$.

当$n\geqslant 3$时,有$t<(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}$.

事实上,只需证明:

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}\leqslant(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\leqslant\left[(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}}-\frac{1}{2}\right]^2,$$

展开后移项即可知此不等式在$n\geqslant 3$时成立.

于是,当$n\geqslant 3$时,总有

$$t\leqslant\min\left\{(n+2)\sqrt{\frac{n}{3}},n\sqrt{6}\right\}. \quad ②$$

而当$n=1$时,$t=1$;

当$n=2$时,由式①知$t\leqslant 3$.

此两种情况下,式②仍成立.

(郭 民 提供)

轮到他时,已无点可以指定,则称他失败.问:甲乙两人谁有必胜策略?

11.5. 已知 $1<a\leqslant b\leqslant c$. 证明:

$\log_a b+\log_b c+\log_c a$

$\leqslant\log_b a+\log_c b+\log_a c$.

11.6. 一个 10×10 的国际象棋棋盘上有 k 个车.棋盘上可以被某个车攻击的方格称为"危险的"(车本身所在的方格也称为危险的).如果去掉任意一个车后都至少有一个危险的方格变为不危险的,求 k 的最大可能值.

11.7. 在▱$ABCD$中,A_1、C_1分别是边 AB、BC 上的点,线段 AC_1、CA_1交于点 P,$\triangle AA_1P$ 和$\triangle CC_1P$ 的外接圆的第二个交点 Q 位于$\triangle ACD$ 的内部.证明:

$\angle PDA=\angle QBA$.

11.8. 同10.8.

参考答案

11.1. 考虑一条途经所有城市的最短的路线 l.设 l 的起点、终点分别为 A、B,长度为 N.则在城市 A、B 的里程表上的数字为 N.令 C 是另外任意的城市.则城市 C 在 l 上.故城市 C 沿 l 到城市 A 和 B 之一的长度不大于$\frac{N}{2}$(不妨设到城市 A).从城市 C 出发沿 l 到城市 A,然后沿 l 到城市 B 总长度不大于$\frac{3N}{2}$且通过所有城市,这表明,城市 C 里程表上的数字不大于$\frac{3N}{2}$,也不小于 N(因为 N 是所有连接路线长度的最小值).

11.2. 令 $b_k=a_k-k$. 则

$$b_{k+1}=b_k-1+\frac{k}{k+b_k}=b_k\left(1-\frac{1}{k+b_k}\right).$$

由 $b_1>0$,得 $b_k>0$,且 $b_{k+1}<b_k$.

特别地,有 $b_k\leqslant b_1<1$.

注意到 $b_2=a_1+\frac{1}{a_1}-2$ 关于 $a_1\in(1,2)$ 递增.故

$$0<b_2<2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}.$$

由此知当 $k\geqslant2$ 时,$b_k\leqslant b_2<\frac{1}{2}$.

如果 a_k+a_j 为整数,则 b_k+b_j 也为整数.因此,它们之一(不妨设 b_k)不小于$\frac{1}{2}$.这表明,$k=1$,$b_j=1-b_1$.但由数列$\{b_n\}$的单调性得到那样的 j 至多一项.

11.3. 设 AB_1、AC_1、AD_1 分别是$\triangle ACD$、$\triangle ABD$、$\triangle ABC$ 的高.则三个三角形的垂心分别在 AB_1、AC_1、AD_1 上且不与顶点 A 重合.

由于它们位于一条直线 l 上,故 AB_1、AC_1、AD_1 在含点 A 和 l 的平面 α 上,点 B_1、C_1、D_1 位于平面 α 和平面 BCD 的交线上.

令 A'是点 A 在平面 BCD 上的投影.则由三垂线定理知点 B_1、C_1、D_1 分别是 A'在 CD、BD、BC 上的投影.这表明,点 A'、C、B_1、D_1 位于以 $A'C$ 为直径的一个圆周上,点 A'、D、B_1、C_1 位于以 $A'D$ 为直径的一个圆周上.故

$$\begin{aligned}&\angle\langle BC,A'C\rangle=\angle\langle D_1C,A'C\rangle\\&=\angle\langle D_1B_1,A'B_1\rangle=\angle\langle C_1B_1,A'B_1\rangle\\&=\angle\langle C_1D,A'D\rangle=\angle\langle BD,A'D\rangle,\end{aligned}$$

其中,$\angle\langle a,b\rangle$表示直线 a 逆时针方向到直线 b 的夹角,它在 $\bmod\ \pi$下唯一确定.

由$\angle\langle BC,A'C\rangle=\angle\langle BD,A'D\rangle$,知点 A' 位于$\triangle BCD$ 的外接圆上,当然也位于四面体 $ABCD$ 的外接球 S 上.S 的球心 O 位于 AA'的垂直平分面β上.

显然,AB、AC、AD 的中点也位于平面β上(因为$\triangle ABA'$、$\triangle ACA'$、$\triangle ADA'$都是直角三角形).

11.4. 甲有必胜策略.

对一个更一般的集合 S 证明命题:如果 S 是一个包含原点且在绕原点旋转 $90°$ 的变换下保持不变的有限点集,则甲有必胜策略.

设集合 S 由 n 个点组成.

对 n 用归纳法证明加强命题.

事实上,若 $n=1$,则 S 只含原点一个点. 甲首先指定原点,则乙无点可选. 甲获胜.

设 $n>1$,且假设命题对一切小于 n 的值都成立. 由于 S 在旋转 $90°$下保持不变,故

$n\geqslant5$.

考虑 S 中任意关于原点不对称的两个点所连线段. 设这些线段长度的最大值为 d,并设长度为 d 的线段为 $A_1B_1,A_2B_2,\cdots,A_mB_m$ (A_i、B_j 不一定两两不同).

先指出原点 O 一定不是 A_i、B_j 中的点. 如不然,设 $OA=d$. 点 A 绕原点旋转 $90°$得点 B. 由条件 $B\in S$,但 $AB=\sqrt{2}OA=\sqrt{2}d>d$,矛盾.

令 $S'=S\setminus\bigcup\limits_{i,j}\{A_i,B_j\}$. 则 S'包含原点且在旋转 $90°$下保持不变.

下面指出:若某人先选择了 S'外的点(如 A_i),则另一人可选择 B_i. 由于 A_iB_i 已经是最长的了,接下去的人已无点可选,即先选 S'以外的人失败.

由于 $|S'|<|S|=n$,及归纳假设,甲在 S'中有必胜的策略. 这样,从一开始甲就按其在 S'中必胜策略选点. 如果乙始终在 S'中选点的话,由归纳假设,甲将获胜. 如果在某一步,乙在 S'外选点,则由前面讨论,也是甲获胜.

11.5. 令 $x=\log_a b,y=\log_b c$. 则原不等式变为

$$x+y+\frac{1}{xy}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy.$$

上式通分整理得

$$\frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}\geqslant0.$$

因为 x、$y\geqslant1$,所以,上式显然成立.

11.6. $k_{\max}=16$.

考虑棋盘上有满足题设的 k 个车. 有两种情况需要考虑.

(1)每行(列)都有车.

此时,所有方格都是危险的. 如果有一行(列)至少有两个车,则去掉其中一个车后,所有的方格仍然都是危险的. 矛盾.

故每行(列)都只有一个车. 则 $k=10$.

(2)至少有一行和一列没有车.

对于每个车,在其所在的行(或列)中只有它一个车(否则,去掉这个车后不减少危险方格的个数). 将这个车对应这个行(或列). 如果所有车共对应了 9 行(或列),则 $k=9$;如果所有车对应的总行数和总列数都不大于 8,则 $k\leqslant8+8=16$.

$k=16$ 的例子.

16 个车所在方格为

$(1,i)$、$(i,1)$ $(i=3,4,\cdots,10)$.

去掉方格$(1,i)$中的车后,方格$(2,i)$由危险变为不危险;去掉方格$(i,1)$中的车后,方格$(i,2)$由危险变为不危险.

11.7. 令圆 ω_A、ω_C 分别表示$\triangle AA_1P$、$\triangle CC_1P$的外接圆,射线 AQ、CQ 分别交边 CD、AD 于点 C_2、A_2.

由 $AB/\!/CD$ 及 A、A_1、P、Q 四点共圆得

$$\angle PCC_2=180°-\angle AA_1P$$
$$=\angle AQP=180°-\angle PQC_2.$$

故 C、P、Q、C_2 四点共圆.

于是,点 C_2 位于圆 ω_C 上.

同理,点 A_2 位于圆 ω_A 上.

进一步,由于 A、A_1、P、A_2 四点共圆及 $AB/\!/CD$,有

$$\angle A_2PC=180°-\angle A_1PA_2$$
$$=\angle A_1AA_2=180°-\angle A_2DC,$$

即 A_2、P、C、D 四点共圆. 则

$$\angle PDA=\angle PDA_2=\angle PCA_2=\angle PCQ.$$

同理,B、A_1、Q、C 四点共圆,有

$$\angle QBA=\angle QCA_1=\angle PCQ.$$

故$\angle PDA=\angle PCQ=\angle QBA$.

11.8. 同 10.8.

(李伟固　提供)