第 35届俄罗斯数学奥林匹克 (九年级)

第 35届俄罗斯数学奥林匹克于 2009年 4月 21日 —27日在俄罗斯南部的基斯洛沃茨克市举行. 竞赛分九年级、十年级、十一年级进行 ,每个年级考两天 ,每天 5小时考 4道题. 中国派出了由浙江省 6名中学生组成的代表队参加了此次竞赛 ,其中 , 4名高二学生参加了十年级的竞赛 , 2名高一学生参加了九年级的竞赛. 共获得两个一等奖、一个二等奖、两个三等奖.

9. 1. 一个最简分数等于分母分别为 600和 700的两个最简分数的和. 求这样的最简分数分母的最小可能值.

9. 2. 已知 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线 (点 D 位于线段 AC 上) ,且与 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 Γ 交于点 B、E,以线段 DE 为直径的圆 ω 交圆 Γ 于点 E、F. 证明:直线 BF 关于 BD 的对称直线含 $\triangle ABC$ 的一条中线.

9. 3. 给定正整数 $n(n>1)$. 整数 $a>n^2$ 满足对于每一个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$,集合 $\{a+1, a+2, \cdots, a+n\}$ 都包含数 n^2+i 的一个倍数. 证明: $a>n^4-n^3$.

9. 4. 正 100边形的每个顶点都覆盖着一块布. 已知恰有一块布下面藏有一枚硬币. 下面的行为称为一次操作:任选四块布检查它们下面是否藏有硬币 ,每次操作后 ,所选布放回原处 ,而硬币被偷偷地转移到与这次操作时其所处位置相邻的顶点处的布的下面. 求一定可以找到硬币的最少的操作次数.

9. 5. 实数 a、b、c 满足

$$\sum(a+b)=abc, \sum\left(a^3+b^3\right)=a^3b^3c^3.$$

证明: $abc=0$.

9. 6. 能否用 2 009种颜色将所有的正整数如下染色:

(1)每种颜色的数都有无穷多个;

(2)不存在三个两两不同色的正整数 a、b、c 满足 $a=bc$?

9. 7. 国际象棋棋盘的一条对角线上的八个方格称做“栅栏 ”. 车从棋盘上栅栏外的一个方格开始行走 ,且满足:

(1)棋盘上的任意方格至多停留一次;

(2)永远不在栅栏上的方格停留.

求车穿越栅栏次数的最大值.

9. 8. 给定具有相等面积的两个 $\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$,确定是否总可以利用圆规和直尺作出与 $\triangle A_1B_1C_1$ 全等的 $\triangle A_2B_2C_2$,满足 $AA_2 \parallel BB_2 \parallel CC_2$.

参 考 答 案

9. 1. $2^3\times 3\times 7=168$.

设两最简分数分别为 $\frac{a}{600}$、$\frac{b}{700}$. 则

$(a, 6)=(b, 7)=1$.

故其和 $\frac{7a+6b}{4\ 200}$ 的分子与 6、7互质.

由于 $4\ 200=2^3\times 3\times 7\times 5^2$,在约去公因数后其分母不小于 $2^3\times 3\times 7=168$.

另一方面 ,这样的分母可以得到

$$\frac{1}{600}+\frac{3}{700}=\frac{1}{168}.$$

9. 2. 不妨设 $AB<BC$. 令 M 是 AC 的中点 ,直线 BM、FM 与圆 Γ 的第二个交点分别为 F'、B'.

因为 $\angle ABE=\angle CBE$, E 为弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点 ,所以 ,点 E、M 都位于线段 AC 的垂直平分线 l 上. 于是 , $\angle EMD=90^{\circ}$.

故点 M 位于圆 ω 上. 则

$$\frac{1}{2}\overset{\frown}{B'CE}{}^{\circ}=\angle B'FE=\angle MFE$$

$$=\angle MDE=\angle CDE=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB}{}^{\circ}+\overset{\frown}{CE}{}^{\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB}{}^{\circ}+\overset{\frown}{AE}{}^{\circ}\right)=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAE}{}^{\circ}.$$

因此 ,点 B 和 B 关于 l 对称.

从而 ,点 F 和 F 关于 l 对称.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

故 $\overset{\frown}{FE}^{\circ}=\overset{\frown}{F'E}^{\circ}\Rightarrow\angle FBE=\angle F'BE$.

所以,BF和 BM 关于 BE对称.

9.3. 首先注意 $a+i(i=1,2,\cdots,n)$中任意两个的距离都不超过 $n-1$.

对每一个 $i(1\leq i\leq n)$,由条件知存在正整数 a_i,使得

$$a_i(n^2+i)\in\{a+1,a+2,\cdots,a+n\}.$$

显然,$a_1>1$.

如果 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$,则

$$a_n(n^2+n)-a_1(n^2+1)$$
$$\geq a_1(n-1)>n-1.$$

矛盾.

故存在 $i(1\leq i\leq n-1)$,使得 $a_i>a_{i+1}$.

则 $n-1\geq a_i(n^2+i)-a_{i+1}(n^2+i+1)$

$$\geq a_i(n^2+i)-(a_i-1)(n^2+i+1)$$
$$=n^2+i+1-a_i,$$

得 $a_i\geq n^2-n+i+2>n^2-n$.

故 $a_i(n^2+i)>(n^2-n)(n^2+1)$

$$=n^4-n^3+n^2-n,$$
$$a\geq a_i(n^2+i)-n$$
$$>n^4-n^3+n^2-2n\geq n^4-n^3.$$

9.4. 33次.

不妨设正 100边形被放置在一个可转动的水平圆桌上,且从中心向一顶点所引向量指向正北.将初始位置的多边形各顶点所在的方位从正北开始依逆时针方向依次定义为 $0,1,\cdots,99$.每操作一次且硬币被转移后,圆桌将自动按顺时针方向转动$\frac{2\pi}{100}$.这样硬币所处位置不变,或者按顺时针方向转动两个方位.因此,硬币所处方位的奇偶性在每次圆桌自动旋转后都保持不变.

如果某一时刻一个方位不可能有硬币,则该方位称作"空的".否则,称为"非空的".

显然,初始时刻,空方位的个数为 0.

于是,每次操作使得空方位的个数至多增加 4.

连续的几个奇(偶)空方位构成奇(偶)空方位区间.

如果一个奇(偶)空方位区间不是一个奇(偶)空方位区间的真子集,则该区间称为"最大的".

由于硬币被转移,在圆桌旋转后的时刻,每个最大奇(偶)空方位区间的逆时针方向的端点都将变成非空的.这表明,在整个寻找硬币的过程中,只有在下面情况下,硬币的被转移不会带来非空方位的增加:当所有奇(偶)方位都是空的,而同时所有偶(奇)方位都是非空的(这种情况最多遇到一次).在所有其他情况下,这次操作前的空方位数至多比上次操作前的空方位数多 3.这样,经 32次操作后的空方位数最多为 $31\times3+4=97$,这不能保证找到硬币.

下面说明:在至多 33次操作下可以找到硬币.

首先检查 0、2、4、6处.

如果找到硬币,问题已解决;

如果没有,则在桌子旋转后,0、2、4为空方位(以下总是假定在前 32次操作中没有找到硬币).

一般地,如果在桌子旋转后,已知 $0,2,\cdots,2s$为空方位,则接下来的操作检查 $2s+2$、$2s+4$、$2s+6$、$2s+8$.

经过硬币转移和桌子转动后,$0,2,\cdots,2s+6$为空方位.这样,经 16次操作及桌子转动后,得到 48个空方位,即 $0,2,\cdots,94$.

第 17次操作检查 96、98、1、3.

在桌子转动后,得到 51个空方位,即 $0,1,2,4,6,\cdots,98$.接下来依次检查 $3,5,7,9;9,11,13,15;\cdots$.

在第 32次操作及桌子转动后,得到 96个空方位,即 $0,1,2,\cdots,91,92,94,96,98$.

第 33次操作我们检查最后四个方位 93、95、97、99,必然找到硬币.

9.5. 首先注意,对任意的实数 x、y,有

$$x^2-xy+y^2\geq|xy|.$$

当且仅当 $x=y$时,上式等号成立.

若 $abc\neq0$,则两式相除得

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$
$$=a^2b^2c^2=|ab|\cdot|bc|\cdot|ac|.$$

上式左边每个括号都是正的,而右边对应的每个绝对值也都为正,故有 $a=b=c$.

于是,$8a^3=a^3\Rightarrow a=0$.矛盾.

9.6. 能.

取 2 008个质数 $p_1,p_2,\cdots,p_{2008}$,且

$$p_1<p_2<\cdots<p_{2008}.$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

构造正整数集合的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_{2\,009}$ 如下:A_1 表示所有 p_1 的倍数所组成的集合;A_2 表示所有 p_2 的倍数且不是 p_1 的倍数所组成的集合;……$A_{2\,008}$表示所有 $p_{2\,008}$的倍数且不是 $p_1, p_2, \cdots, p_{2\,007}$的倍数所组成的集合;$A_{2\,009}$表示所有其余正整数组成的集合. 则 $A_1, A_2, \cdots, A_{2\,009}$两两不交且并为全体正整数.

对任意的 $x \in A_k, y \in A_n\ (k < n)$,有 $xy \in A_k$. 故每个集合 A_i 各染上一种颜色就满足要求.

9.7. 47次.

将位于第 i行第 j列的方格记作 (i, j). 设栅栏所占的八个方格为 $(i, i)\ (i = 1, 2, \cdots, 8)$. 将非栅栏方格分为 A、B、C、D四类:

$$A = \{(i, j) \mid 2 \leq j + 1 \leq i \leq 4\} \cup \{(i, j) \mid 5 \leq j \leq i - 1 \leq 7\},$$
$$B = \{(i, j) \mid 2 \leq i + 1 \leq j \leq 4\} \cup \{(i, j) \mid 5 \leq i \leq j - 1 \leq 7\},$$
$$C = \{(i, j) \mid 5 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 4\},$$
$$D = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq 4, 5 \leq j \leq 8\}.$$

由于车每次穿越栅栏的前后两次停留至少有一次是在 A类或 B类的方格中,A类和 B类的每个方格至多贡献两次穿越. 而 A类和 B类共有 24个方格,故至多完成 48次穿越.

称 A、D类方格之间的穿越为 AD型,B、C类方格之间的穿越为 BC型.

如果恰完成了 48次穿越,则每一个 A类或 B类方格都对应两次穿越. 这说明,每次穿越前后的两次停留都恰有一次位于 C类或 D类方格,且每一次车在 $A(B)$类方格中的停留前后的运动都是 $AD(BC)$型穿越. 由于从 $C(D)$类方格出发不经过穿越无法到达 $D(C)$类方格,车只能完成一种类型的穿越,故至多 24次穿越. 矛盾.

因此,得到车至多完成 47次穿越.

例子如下:

$(8, 2)\xrightarrow{1}(1, 2)\xrightarrow{2}(7, 2)\xrightarrow{3}(7, 8)\xrightarrow{4}$
$(7, 3)\xrightarrow{5}(1, 3)\xrightarrow{6}(8, 3)\xrightarrow{7}(2, 3)\xrightarrow{8}$
$(6, 3)\xrightarrow{9}(6, 8)\xrightarrow{10}(6, 2)\xrightarrow{11}(6, 7)\xrightarrow{12}$
$(6, 4)\xrightarrow{13}(1, 4)\xrightarrow{14}(8, 4)\xrightarrow{15}(2, 4)\xrightarrow{16}$
$(7, 4)\xrightarrow{17}(3, 4)\xrightarrow{18}(5, 4)\xrightarrow{19}(5, 8)\xrightarrow{20}$
$(5, 3)\xrightarrow{21}(5, 7)\xrightarrow{22}(5, 2)\xrightarrow{23}(5, 6)\xrightarrow{24}$
$(8, 6)\xrightarrow{25}(1, 6)\xrightarrow{26}(7, 6)\xrightarrow{27}(2, 6)\xrightarrow{28}$
$(2, 1)\xrightarrow{29}(2, 7)\xrightarrow{30}(8, 7)\xrightarrow{31}(3, 7)\xrightarrow{32}$
$(3, 1)\xrightarrow{33}(3, 6)\xrightarrow{34}(3, 2)\xrightarrow{35}(3, 5)\xrightarrow{36}$
$(8, 5)\xrightarrow{37}(2, 5)\xrightarrow{38}(7, 5)\xrightarrow{39}(1, 5)\xrightarrow{40}$
$(6, 5)\xrightarrow{41}(4, 5)\xrightarrow{42}(4, 1)\xrightarrow{43}(4, 6)\xrightarrow{44}$
$(4, 2)\xrightarrow{45}(4, 7)\xrightarrow{46}(4, 3)\xrightarrow{47}(4, 8)$.

9.8. 总可以.

如果 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$,则平移 $\triangle ABC$ 即可. 下设它们不全等,不妨设 $AB < A_1B_1$.

作 $\triangle A'B'C'$使得 $A'B'$与 $\triangle ABC$不交,且
$AB \parallel A'B'$, $A'B' = A_1B_1$,
$B'C' = B_1C_1$, $C'A' = C_1A_1$.

则四边形 $ABB'A'$是梯形.

令 M、N 分别为 AA'、BB' 的中点, P 是 AA'和 BB'的交点. 以 PC为直径作圆 ω.

因为 $AB < A_1B_1 = A'B'$,

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle A'B'C'}$,

点 C到 AB的距离大于到 $A'B'$的距离,所以,点 P和 C位于 MN的异侧. 因此,圆 ω与 MN相交. 设 K是一个交点.

作 PK分别交 AB、$A'B'$于点 X、Y. 则

$$\frac{AX}{XB} = \frac{A'Y}{YB'},$$

故 $S_{\triangle XBC} = S_{\triangle YB'C'}$, $XK = KY$, $\angle PKC = 90°$.

于是,CK是线段 XY的垂直平分线,有 $CX = CY$.

在射线 XC上取点 Z,使得 $XC = CZ$. 作分别与 $\triangle A'C'Y$和 $\triangle B'C'Y$全等的 $\triangle A_2CZ$和 $\triangle B_2CZ$. 则

$$\triangle A_2B_2C \cong \triangle A'B'C' \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

因为 $CX = CZ$, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_2B_2C}$, $S_{\triangle XBC} = S_{\triangle ZB_2C}$,所以, $S_{\triangle XAC} = S_{\triangle ZA_2C}$,点 A和 A_2到 XZ的距离相等,点 B和 B_2到 XZ的距离也相等. 故 $AA_2 \parallel XZ \parallel BB_2$.

最后,将 $\triangle A_2B_2C$沿 AA_2方向平移一下即可.

(李伟固　提供)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net