第36届俄罗斯数学奥林匹克(九年级)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2010)08-0032-03

第36届俄罗斯数学奥林匹克于2010年4月25日—30日在俄罗斯南部度假胜地迈科普市举行.竞赛分九年级、十年级、十一年级进行,每个年级考两天,每天5小时考4道题.中国派出了由北京市6名中学生组成的代表队参加了此次竞赛,其中,4名学生参加了十年级的竞赛,2名学生参加了九年级的竞赛.6名同学全部获一等奖.

9.1. 将四种颜色共24支(每种颜色6支)铅笔分给6名同学,每名同学4支.已知无论怎样分配铅笔,一定存在n名同学使得他们拥有的$4n$支铅笔有四种颜色.求n的最小值.

9.2. 将100个互异实数分别放置在圆周上的不同地方.求证:一定存在相邻的四个数使得两端的两数之和大于中间的两数之和.

9.3. 过圆ω外一点O引圆ω的切线OA、OB(A、B是切点),C是劣弧$\overparen{AB}$上的一点,满足$AC\neq BC$,I是圆ω的圆心,直线AC与OB交于点D,直线BC与OA交于点E.求证:$\triangle ACE$、$\triangle BCD$、$\triangle OCI$的外心共线.

9.4. 厨房中有100个总重量为10 kg的苹果,每个苹果的重量不少于25 g.厨师希望将这些苹果切成每块不少于25 g的若干块后分给100名同学,每名同学分得100 g.求证:厨师能够达到他的目的.

9.5. 已知方程

---

4. 先证明这样的矩形不超过2 025个.

任取定100个整点.设O为所取定的100个整点中的一个,我们称以O为一个顶点,另外三个也取自这100个整点,且边均与两坐标轴平行或重合的矩形为"好的".

下证:至多有81个好的矩形.

事实上,过O作平行于两坐标轴的直线l_1、l_2,并设$l_1\setminus\{O\}$上有m个点取自所取定的100个整点,$l_2\setminus\{O\}$上有n个点取自所取定的100个整点,设点P为所取定的100个整点中的一个,且不在l_1和l_2上,则至多有一个好的矩形以P为其一个顶点.而这样的点至多有$99-m-n$个,且每一个好的矩形必有一个顶点为这样的点.于是,

(i)若$m+n\geqslant18$,则好的矩形至多有$99-m-n\leqslant81$个;

(ii)若$m+n\leqslant18$,考虑点对(R,Q),其中,$R\in l_1\setminus\{O\}$,$Q\in l_2\setminus\{O\}$,可知每一对(R,Q)至多形成一个好的矩形,故好的矩形的个数小于或等于

$$mn\leqslant m(18-m)\leqslant9\times9=81\text{ 个}.$$

综上,对所取定的100个整点中的任意一点O,以O为其一个顶点的好的矩形至多81个.于是,满足条件的矩形的个数小于或等于$\frac{81\times100}{4}=2\ 025$(这里除以4是因为每个矩形有4个顶点).

下面给出2 025个这样的矩形的例子.

设点集

$$A=\{(x,y)\mid1\leqslant x\leqslant10,1\leqslant y\leqslant10,x、y\in\mathbf{N}\}.$$

取点集A中的100个点,则恰好可以画出满足题设的2 025个矩形.

故最多能画出2 025个这样的矩形.

(郭 民 提供)

$$(x^2+20ax+10b)(x^2+20bx+10a)=0$$
没有实根,其中,a、b 是不同的实参数.

求证:$20(b-a)$不是整数.

9.6. 一天中,有 1 000 个戴着红或蓝帽子的小矮人两两都见面一次. 戴着红帽子的小矮人说假话,带着蓝帽子的小矮人说真话. 每个小矮人都可能变换自己帽子的颜色若干次(即红色变为蓝色,蓝色变为红色). 已知任意两个小矮人见面时都说对方戴着红帽子. 求这一天中帽子变换总次数的最小值.

9.7. 如果正整数 n 不能表示为 $n=\frac{x^2-1}{y^2-1}$ (x、$y>1$ 为正整数),则称其为"不幸数". 问:不幸数的个数是有限个还是无限个?

9.8. 给定锐角$\triangle ABC$ 满足中线 AM 的长大于边 AB 的长. 求证:可以将$\triangle ABC$ 分为三块拼成一个菱形.

参考答案

9.1. n 的最小值为 3.

首先证明:总有 3 名同学拥有的铅笔有 4 种颜色.

事实上,每种颜色的铅笔有 6 支,而每名同学拥有 4 支铅笔,故存在一名同学拥有至少两种颜色的铅笔. 显然,另外的任意一种颜色都至少有一名同学拥有.

故结论成立.

下面举例说明:存在一种分配方式使得任意两名同学至多拥有三种颜色的铅笔.

一名同学拥有 4 支第二种颜色的铅笔,一名同学拥有 4 支第三种颜色的铅笔,一名同学拥有 4 支第四种颜色的铅笔,一名同学拥有 2 支第一种颜色和 2 支第二种颜色的铅笔,一名同学拥有 2 支第一种颜色和 2 支第三种颜色的铅笔,一名同学拥有 2 支第一种颜色和 2 支第四种颜色的铅笔.

9.2. 反设结论不成立.

设圆周上 100 个实数依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$,$a_n=a_{n+100}$. 则

$$a_n+a_{n+3}\leqslant a_{n+1}+a_{n+2},$$

即 $a_{n+3}-a_{n+2}\leqslant a_{n+1}-a_n(n=1,2,\cdots,100)$.

由此得到

$a_{100}-a_{99}\leqslant a_{98}-a_{97}\leqslant\cdots\leqslant a_2-a_1\leqslant a_{100}-a_{99}$.

从而,$a_{2n}-a_{2n-1}=k(n=1,2,\cdots,50)$.

同理,$a_{2n+1}-a_{2n}=l(n=1,2,\cdots,50)$.

将这些等式相加得

$0=50k+50l$.

解得 $k=-l$.

则 $a_3-a_2=l=-k=a_1-a_2$.

故 $a_1=a_3$,矛盾.

9.3. 设 M 是$\triangle ACE$ 和$\triangle BCD$ 外接圆的第二个交点. 于是,只需证明$\triangle OCI$ 的外接圆也过 M(因为在这种情况下,三个外心都在 CM 的垂直平分线上).

令$\angle CAB=\alpha$,$\angle CBA=\beta$,不妨设 $\beta>\alpha$.

则$\angle OBE=\alpha$,$\angle DAE=\beta$.

在四边形 $OBIA$ 中,

$\angle OAI=\angle OBI=90^\circ$,

故它是圆内接四边形.

由此,$\angle OIA=\angle OBA=\alpha+\beta$.

故$\angle CIO=\angle CIA-\angle OIA$

$=2\angle CBA-(\alpha+\beta)=\beta-\alpha$.

由于四边形 $AECM$、$DBMC$ 都是圆内接四边形,于是,

$\angle BME=\angle BMC+\angle CME$

$=(180^\circ-\angle CDB)+\angle CAE$

$=\angle ODA+\angle DAO=180^\circ-\angle EOB$.

则四边形 $EOBM$ 也是圆内接四边形.

故$\angle CMO=\angle CME-\angle OME$

$=\angle CAE-\alpha=\beta-\alpha=\angle CIO$.

因此,O、C、I、M 四点共圆.

9.4. 称不小于 25 g 的苹果(块)为大的.

下面对 n 用数学归纳法证明:可以将总重为 $100n$ g 的 n 个大苹果分为若干个大块给 n 个人平分.

当 $n=1$ 时,结论显然成立.

下设 $n>1$.

设两个最重的苹果的重量分别为 a、b $(a\geqslant b)$. 则 $a+b\geqslant 200$.

将这两个最重的苹果用一个重量为

$$c=a+b-100\geqslant 100$$

的苹果替换得到 $n-1$ 个苹果. 由归纳法假设,可以将这 $n-1$ 个苹果分成若干个大块给 $n-1$ 个人平分. 不妨假设,这些大块的重量介于25 g 和 50 g 之间(因为对于重量大于50 g的块总可以将其一分为二). 假设后来替换上重量为 c 的苹果被切成了重量分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 的 k 块.

令 $s_0=0,s_d=c_1+c_2+\cdots+c_d(d=1,2,\cdots,k)$;令 t 为满足 $a-s_t\leqslant 75$ 的最小下标.

则从替换下来的重量为 a 的苹果切下重量分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_t$ 的块,从重量为 b 的苹果切下重量分别为 $c_{t+1},c_{t+2},\cdots,c_k$ 的块. 于是,前者剩下的重量为

$$a'=a-s_t=(a-s_{t-1})-c_t>75-c_t\geqslant 25,$$

故 $a'\in[25,75]$;

后者剩下的重量为

$$b'=100-a'\in[25,75].$$

这样将 $a'+b'=100$ 分给一名同学,剩下的按归纳法假设得到的分法分给另 $n-1$ 名同学.

9.5. 假设结论不真,不妨设 $b>a$. 则

$$b-a\geqslant\frac{1}{20}.$$

由于 $x^2+20bx+10a=0$ 没有实根,则有 $100b^2-10a<0$.

易得 $10b^2<a\leqslant b-\frac{1}{20}$,即

$$10b^2-b+\frac{1}{20}<0.$$

矛盾.

9.6. 显然,两个小矮人见面时都说对方戴着红帽子当且仅当他们戴着帽子的颜色不同.

于是,一天中,如果有三个小矮人始终没有改变他们帽子的颜色,则他们中有两个帽子的颜色相同,见面时不能都说对方戴着红帽子. 故至少有 998 个小矮人改变过帽子的颜色,帽子变换总次数大于或等于 998.

下面说明:998 次是可以达到的.

设小矮人 1,2,…,1 000. 开始时,1 戴蓝帽子,2,3,…,1 000 戴红帽子. 1 与 2,3,…,1 000见面后,2 将帽子颜色改为蓝色后与 3,4,…,1 000 见面,……999 将帽子颜色改为蓝色后与1 000 见面,共改变帽子的颜色 998 次.

9.7. 无限个.

事实上,可以证明:任意奇质数 p 的平方是不幸数.

反设 $n=p^2$ 不是不幸数. 则

$$(y^2-1)p^2=x^2-1. \quad ①$$

于是,$p\mid(x+1)$ 或 $p\mid(x-1)$.

若 $p\mid(x+1)$,由于 $x-1=(x+1)-2$ 不是 p 的倍数,故 $p^2\mid(x+1)$,即 $x=kp^2-1$.

代入式①得

$$y^2=\frac{x+1}{p^2}(x-1)+1$$

$$=k(kp^2-2)+1=k^2p^2-2k+1.$$

而 $(kp)^2>y^2=k^2p^2-2k+1>(kp-1)^2$,矛盾.

若 $p\mid(x-1)$,则

$$x=kp^2+1,y^2=k^2p^2+2k+1,$$

得 $(kp)^2<y^2<(kp+1)^2$,

矛盾.

9.8. 设 N 是 AC 的中点,K 是直线 MN 上一点满足 M 是 KN 的中点. 则$\triangle MNC$、$\triangle MKB$ 关于点 M 对称.

沿中位线 MN 将三角形切开后将$\triangle MNC$ 放到$\triangle MKB$ 的位置得到▱$ANKB$.

若 $AN=AB$,则四边形 $ANKB$ 是菱形.

若 $AN<AB$,考虑以点 A 为圆心、AB 为半径的圆. 注意到点 N 位于圆内,点 M 位于圆外,圆与线段 MN 交于一点 P,将$\triangle APN$ 从▱$ANKB$ 切下后平移使得 AN 与 BK 重合得到菱形.

若 $AN>AB$,由于$\triangle ABC$ 是锐角三角形,则点 C 向 AB 的投影 H 位于 A、B 之间. 又 N 是 AC 的中点,N 向 AB 的投影 T 是 AH 的中点,故 $BT>AT$. 进而得到 $BN>AN$.

考虑以点 B 为圆心、AN 为半径的圆. 注意到点 A 位于圆内,点 N 位于圆外,线段 AN 与圆交于一点 S,将$\triangle ABS$ 沿 BS 切下后平移使得边 AB 与 NK 重合得到菱形.

(李伟固 提供)