竞赛之窗

第 51 届 IMO

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2010)09-0017-04

第一天

1. 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得等式

$$f([x]y)=f(x)[f(y)] \quad ①$$

对所有的 $x、y\in\mathbf{R}$ 成立（$[z]$ 表示不超过实数 z 的最大整数）．（法国　供题）

2. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外接圆为 Γ，直线 AI 交圆 Γ 于另一点 D．设 E 是弧 $\overparen{BDC}$ 上的一点，F 是边 BC 上的一点，使得

$$\angle BAF=\angle CAE<\frac{1}{2}\angle BAC.$$

设 G 是线段 IF 的中点．证明：直线 DG 与 EI 的交点在圆 Γ 上．（中国香港　供题）

3. 求所有的函数 $g:\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$，使得对所有的 $m、n\in\mathbf{N}_+$，$(g(m)+n)(m+g(n))$ 是一个完全平方数．（美国　供题）

第二天

4. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内的一点，直线 AP、BP、CP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆 Γ 的另一个交点分别为 $K、L、M$，圆 Γ 在点 C 处的切线与直线 AB 交于点 S．若 $SC=SP$，证明：$MK=ML$．

（波兰　供题）

5. 有六个盒子 $B_1、B_2、B_3、B_4、B_5、B_6$，开始时每个盒子中都恰好有1枚硬币．每次可以任选如下两种方式之一对它们进行操作：

(1) 选取一个至少有1枚硬币的盒子 B_j $(1\leqslant j\leqslant 5)$，从盒子 B_j 中取走1枚硬币，并在盒子 B_{j+1} 中加入2枚硬币．

(2) 选取一个至少有1枚硬币的盒子 B_k $(1\leqslant k\leqslant 4)$，从 B_k 中取走1枚硬币，并且交换盒子 B_{k+1}（可能是空盒）与盒子 B_{k+2}（可能是空盒）中的所有硬币．

问：是否能进行若干次上述操作，使盒子 $B_1、B_2、B_3、B_4、B_5$ 中没有硬币，而盒子 B_6 中恰好有 $2010^{2010^{2010}}$ 枚硬币（注：$a^{b^c}=a^{(b^c)}$）．

（荷兰　供题）

6. 设 $a_1,a_2,\cdots$ 是一个正实数数列．假设存在某个固定的正整数 s，使得对所有的 $n>s$，有 $a_n=\max\{a_k+a_{n-k}\mid 1\leqslant k\leqslant n-1\}$．证明：存在正整数 $l(l\leqslant s)$ 和 N，使得对所有的 $n\geqslant N$，都有 $a_n=a_l+a_{n-l}$．（伊朗　供题）

参考答案

第一天

1. $f(x)=c$（常数），其中，$c=0$ 或 $1\leqslant c<2$．

令 $x=0$ 代入式①得

$$f(0)=f(0)[f(y)] \quad ②$$

对所有 $y\in\mathbf{R}$ 成立．

于是，有如下两种情形．

(1) 当 $f(0)\neq 0$ 时，由式②知 $[f(y)]=1$ 对所有 $y\in\mathbf{R}$ 成立．

从而，式① $\Leftrightarrow f([x]y)=f(x)$．

令 $y=0$，得 $f(x)=f(0)=c\neq 0$．

由 $[f(y)]=1=[c]$，知 $1\leqslant c<2$．

(2) 当 $f(0)=0$ 时，若存在 $0<\alpha<1$，使得 $f(\alpha)\neq 0$，令 $x=\alpha$ 代入式①得

$$0=f(0)=f(\alpha)[f(y)]$$

对所有 $y\in\mathbf{R}$ 成立．

于是，$[f(y)]=0$ 对所有 $y\in\mathbf{R}$ 成立．

令 $x=1$ 代入式①得 $f(y)=0$ 对所有 $y\in\mathbf{R}$ 成立，这与 $f(\alpha)\neq 0$ 矛盾．

所以，$f(\alpha)=0(0\leqslant\alpha<1)$.

对于任意实数 z，存在整数 N，使得

$\alpha=\frac{z}{N}\in[0,1)$.

由式①有

$f(z)=f([N]\alpha)=f(N)[f(\alpha)]=0$

对所有 $z\in\mathbf{R}$ 成立.

经检验，$f(x)=c$（常数），其中，$c=0$ 或 $1\leqslant c<2$满足题设.

2. 如图 1，设直线 AD 与 BC 交于点 H，射线 DG 与 AF 交于点 K，射线 DG 与射线 EI 交于点 T. 联结 CE.

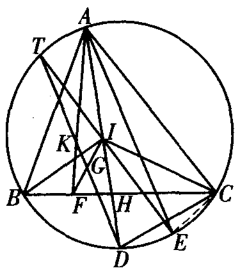

图 1

注意到

$\angle DIC$

$=\angle IAC+\angle ICA$

$=\angle BCD+\angle ICB=\angle ICD$.

所以，$ID=DC$.

由$\angle ADC=\angle ABC=\angle ABH$，

$\angle DAC=\angle BAH$

得 $\triangle DAC\backsim\triangle BAH$.

故$\frac{AB+BH}{AH}=\frac{AD+DC}{AC}=\frac{AD+ID}{AC}$.

由$\angle ABI=\angle HBI\Rightarrow\frac{AB}{AI}=\frac{BH}{HI}$

$\Rightarrow\frac{AB+BH}{AH}=\frac{AB}{AI}$.

故 $AB\cdot AC=AI(AD+ID)$.

由$\angle ABF=\angle ABC=\angle AEC$，

$\angle BAF=\angle EAC$

得 $\triangle ABF\backsim\triangle AEC$.

故 $AE\cdot AF=AB\cdot AC=AI(AD+ID)$. ①

对$\triangle AFI$ 与截线 KGD 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AK}{KF}\cdot\frac{FG}{GI}\cdot\frac{ID}{DA}=1.$$

注意到

$$FG=GI\Rightarrow\frac{AK}{KF}=\frac{DA}{DI}\Rightarrow\frac{AK}{AF}=\frac{DA}{DA+DI}. \quad ②$$

①×②得 $AK\cdot AE=DA\cdot AI$，即$\frac{AK}{AD}=\frac{AI}{AE}$.

又$\angle KAD=\angle IAE$，则

$\triangle KAD\backsim\triangle IAE\Rightarrow\angle KDA=\angle IEA$.

因此，$\angle TDA=\angle TEA$.

故 A、T、D、E 四点共圆，点 T 在圆 Γ 上，即 DG 与 EI 的延长线交于圆 Γ 上一点.

3. $g(n)=n+c$，其中，常数 c 是非负整数.

首先，函数 $g(n)=n+c$ 满足题意（因为此时

$(g(m)+n)(m+g(n))=(n+m+c)^2$

是一个平方数）.

先证明一个引理.

引理 若质数 p 整除 $g(k)-g(l)$，k、l 是正整数，则 $p\mid(k-l)$.

证明 事实上，若 $p^2\mid(g(k)-g(l))$，令 $g(l)=g(k)+p^2a$，其中，a 是某个整数.

取一个整数 $d>\max\{g(k),g(l)\}$，且 d 不能被 p 整除.

令 $n=pd-g(k)$. 则

$n+g(k)=pd$.

故 $n+g(l)=pd+(g(l)-g(k))$

$=p(d+pa)$

能被 p 整除，但不能被 p^2整除.

由题设知，$(g(k)+n)(g(n)+k)$ 和 $(g(l)+n)(g(n)+l)$ 都是平方数. 所以，它们能被质数 p 整除，就能被 p^2 整除. 于是，

$p\mid(g(n)+k)$，$p\mid(g(n)+l)$.

故 $p\mid[(g(n)+k)-(g(n)+l)]$，

即 $p\mid(k-l)$.

若 $p\parallel(g(k)-g(l))$，取同样的整数 d，令 $n=p^3d-g(k)$. 则正整数

$g(k)+n=p^3d$

能被 p^3整除，但不能被 p^4整除，正整数

$g(l)+n=p^3d+(g(l)-g(k))$

能被 p 整除，但不能被 p^2 整除. 于是，由题

设知

$p\mid(g(n)+k),p\mid(g(n)+l)$.

故 $p\mid[(g(n)+k)-(g(n)+l)]$,

即 $p\mid(k-l)$.

回到原题.

若存在正整数 k、l,使得 $g(k)=g(l)$,则由引理知 $k-l$ 能被任意质数 p 整除.

从而,$k-l=0$,即 $k=l$. 故 g 是单射.

考虑数 $g(k)$ 和 $g(k+1)$.

因为 $(k+1)-k=1$,所以,由引理知 $g(k+1)-g(k)$ 不能被任意一个质数整除.

故 $|g(k+1)-g(k)|=1$.

设 $g(2)-g(1)=q(|q|=1)$. 则由数学归纳法易知

$g(n)=g(1)+(n-1)q$.

若 $q=-1$,则对 $n\geqslant g(1)+1$,有 $g(n)\leqslant 0$,矛盾. 所以,$q=1$.

故 $g(n)=n+(g(1)-1)$ 对所有 $n\in\mathbf{N}$ 都成立,其中,$g(1)-1\geqslant 0$.

令 $g(1)-1=c$(常数). 故 $g(n)=n+c$,其中,常数 c 是非负整数.

第 二 天

4. 不妨设 $CA>CB$. 则点 S 在射线 AB 上.

如图2,设直线 SP 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 E、F.

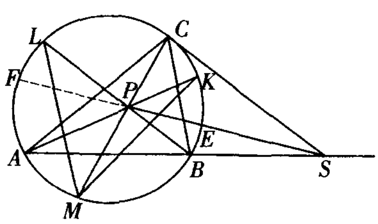

图2

由题设及圆幂定理得

$SP^2=SC^2=SB\cdot SA$.

则 $\dfrac{SP}{SB}=\dfrac{SA}{SP}\Rightarrow\triangle PSA\backsim\triangle BSP$

$\Rightarrow\angle SAP=\angle BPS$.

注意到 $2\angle BPS=\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{LF}$,

$2\angle SAP=\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EK}$.

所以,$\overset{\frown}{LF}=\overset{\frown}{EK}$. ①

由 $\angle SPC=\angle SCP$,得

$\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{MF}=\overset{\frown}{EC}+\overset{\frown}{EM}$.

所以,$\overset{\frown}{MF}=\overset{\frown}{EM}$. ②

由式①、②得

$\overset{\frown}{MFL}=\overset{\frown}{MF}+\overset{\frown}{FL}=\overset{\frown}{ME}+\overset{\frown}{EK}=\overset{\frown}{MEK}$.

因此,$MK=ML$.

5. 答案是肯定的.

令 $A=2\,010^{2\,010^{2\,010}}$.

将盒子 $B_i,B_{i+1},\cdots,B_{i+k}$ 中的硬币数 $b_i,b_{i+1},\cdots,b_{i+k}$ 通过若干次操作变为硬币数 $b_i',b_{i+1}',\cdots,b_{i+k}'$,用

$(b_i,b_{i+1},\cdots,b_{i+k})\to(b_i',b_{i+1}',\cdots,b_{i+k}')$

表示. 于是,要通过若干次操作,使得

$(1,1,1,1,1,1)\to(0,0,0,0,0,A)$.

先证明两个引理.

引理1 对每个正整数 a,有

$(a,0,0)\to(0,2^a,0)$.

证明 对正整数 $k(k\leqslant a)$ 用数学归纳法证明:$(a,0,0)\to(a-k,2^k,0)$.

因 $(a,0,0)\to(a-1,2,0)=(a-1,2^1,0)$,所以,当 $k=1$ 时,命题成立.

假设命题对 $k<a$ 成立. 则

$(a-k,2^k,0)\to(a-k,2^k-1,2)\to\cdots$

$\to(a-k,0,2^{k+1})\to(a-k-1,2^{k+1},0)$.

故 $(a,0,0)\to(a-k,2^k,0)$

$\to(a-k-1,2^{k+1},0)$,

即命题对 $k+1(\leqslant a)$ 也成立.

引理2 对每个正整数 a,有

$(a,0,0,0)\to(0,P_a,0,0)$,

其中,$P_n=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$($n$ 个2),n 是正整数.

证明 对正整数 $k(k\leqslant a)$ 用数学归纳法证明:$(a,0,0,0)\to(a-k,P_k,0,0)$.

由操作方式(1)有

$(a,0,0,0)\to(a-1,2,0,0)=(a-1,P_1,0,0)$.

故当 $k=1$ 时,命题成立.

假设命题对 $k<a$ 成立. 则

$(a-k,P_k,0,0)$

$\to(a-k,0,2^{P_k},0)=(a-k,0,P_{k+1},0)$

$\to(a-k-1,P_{k+1},0,0)$.

故 $(a,0,0,0)\to(a-k,P_k,0,0)$

$\to(a-k-1,P_{k+1},0,0)$,

即命题对 $k+1(\leqslant a)$ 也成立.

回到原题.

注意到

$(1,1,1,1,1,1)\to(1,1,1,1,0,3)$

$\to(1,1,1,0,3,0)\to(1,1,0,3,0,0)$

$\to(1,0,3,0,0,0)\to(0,3,0,0,0,0)$

$\to(0,0,P_3,0,0,0)=(0,0,16,0,0,0)$

$\to(0,0,0,P_{16},0,0)$.

而 $A=2\,010^{2\,010^{2\,010}}<(2^{11})^{2\,010^{2\,010}}$

$=2^{11\times2\,010^{2\,010}}<2^{2\,010^{2\,011}}<2^{(2^{11})^{2\,011}}$

$=2^{2^{11\times2\,011}}<2^{2^{2^{15}}}<P_{16}$,

则盒子 B_4 中的硬币数大于 A.

又 $(0,0,0,P_{16},0,0)\to(0,0,0,P_{16}-1,0,0)$

$\to(0,0,0,P_{16}-2,0,0)\to\cdots\to\left(0,0,0,\frac{A}{4},0,0\right)$,

故 $\left(0,0,0,\frac{A}{4},0,0\right)\to\cdots\to\left(0,0,0,0,\frac{A}{2},0\right)$

$\to\cdots\to(0,0,0,0,0,A)$.

6. 由题设知,对每个 $n>s$,a_n 能表示为

$a_n=a_{j_1}+a_{j_2}(j_1、j_2<n,j_1+j_2=n)$.

若 $j_1>s$,可以继续把 a_{j_1} 表示成数列的两项的和. 如此下去,可以把 a_n 表示为

$a_n=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$, ①

其中,$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant s,i_1+i_2+\cdots+i_k=n$.

记 $m=\max\left\{\frac{a_i}{i}\,\middle|\,1\leqslant i\leqslant s\right\}$,且设某个固定的正整数 $l\leqslant s$ 使得 $m=\frac{a_l}{l}$.

构造数列 $\{b_n\}$:

$b_n=a_n-mn(n=1,2,\cdots)$. ②

则 $b_l=0$.

当 $n\leqslant s$ 时,由 m 的定义知 $b_n\leqslant0$.

当 $n>s$ 时,

$b_n=a_n-mn$

$=\max\{a_k+a_{n-k}\mid1\leqslant k\leqslant n-1\}-mn$

$=\max\{b_k+b_{n-k}+mn\mid1\leqslant k\leqslant n-1\}-mn$

$=\max\{b_k+b_{n-k}\mid1\leqslant k\leqslant n-1\}\leqslant0$.

所以,$b_n\leqslant0(n=1,2,\cdots)$,且当 $n>s$ 时,

$b_n=\max\{b_k+b_{n-k}\mid1\leqslant k\leqslant n-1\}$.

若 $b_k=0(k=1,2,\cdots,s)$,则对所有正整数 n,$b_n=0$. 于是,$a_n=mn(n=1,2,\cdots)$.

从而,命题得证.

否则,令

$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}|b_i|$,

$\varepsilon=\min\{|b_i|\mid1\leqslant i\leqslant s,b_i<0\}$.

于是,当 $n>s$ 时,有

$b_n=\max\{b_k+b_{n-k}\mid1\leqslant k\leqslant n-1\}$

$\geqslant b_l+b_{n-l}=b_{n-l}$.

所以,$0\geqslant b_n\geqslant b_{n-l}\geqslant\cdots\geqslant-M$.

对于数列 $\{b_n\}$,由式①、②知,每个 b_n 属于集合

$T=\{b_{i_1}+b_{i_2}+\cdots+b_{i_k}\mid1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant s\}\cap[-M,0]$,

而 T 是一个有限集.

事实上,对于任意 $x\in T$,令

$x=b_{i_1}+b_{i_2}+\cdots+b_{i_k}(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant s)$.

则 b_{i_j} 中至多有 $\frac{M}{\varepsilon}$ 个非零项(否则,$x<\frac{M}{\varepsilon}(-\varepsilon)=-M$).

故 x 有有限个这样的和的表示方式.

因此,对每一个 $t=1,2,\cdots,l$,数列

$b_{s+t},b_{s+t+l},b_{s+t+2l},\cdots$

是递增的且取有限个值.

所以,从某个下标开始是常数.

于是,数列 $\{b_n\}$ 从某个下标 N 开始是以 l 为周期的周期数列,即

$b_n=b_{n-l}=b_l+b_{n-l}(n>N+l)$.

故 $a_n=b_n+mn$

$=(b_l+ml)+[b_{n-l}+m(n-l)]$

$=a_l+a_{n-l}(n>N+l)$.

(熊　斌　提供)