深度解析 2011 年湖南理科数学压轴题

华东师范大学数学系 (上海,200241) 马文杰
陕西师范大学数学科学学院 (西安,710062) 罗增儒

2011 年湖南理科数学第 22 题(即压轴题)集函数、导数、数列于一体,是一道既具有一定的基础性与综合性,又具有一定的创新性的好题. 本文给出该题几种简洁、易懂的解法,供大家在教学中借鉴. 原题如下:

已知函数 $f(x) = x^3, g(x) = x + \sqrt{x}$

(Ⅰ)求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数,并说明理由;

(Ⅱ)设数列满足 $\{a_n\}(n \in N^*)$ 满足 $a_1 = a(a > 0), f(a_{n+1}) = g(a_n)$,证明:存在常数 M,使得对于任意的 $n \in N^*$,都有 $a_n \leq M$.

解析:(Ⅰ)由 $h(x) = x^3 - x - \sqrt{x}$ 知,$x \in [0, +\infty)$,而 $h(0) = 0$,且 $h(1) = -1 < 0, h(2) = 6 - \sqrt{2} > 0$,则 $x = 0$ 为 $h(x)$ 的一个零点,且 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点,因此 $h(x)$ 至少有两个零点

解析一:$h(x) = x(x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}})$,记 $\phi(x) = x^2 - 1 - x^{-\frac{1}{2}}$,则 $\phi'(x) = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$\phi'(x) > 0$,因此 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点,综上可知,有且只有两个零点.

解析二:$h(x) = x^2(x - x^{-1} - x^{-\frac{3}{2}})$,记 $\phi(x) = x - x^{-1} - x^{-\frac{3}{2}}$,则 $\phi'(x) = 1 + x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$\phi'(x) > 0$,因此 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点,综上可知,$h(x)$ 有且只有两个零点.

解析三:$h(x) = x^3(1 - x^{-2} - x^{-\frac{5}{2}})$,记 $\phi(x) = 1 - x^{-2} - x^{-\frac{5}{2}}$,则 $\phi'(x) = 2x^{-3} + \frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$\phi(x) > 0$,因此 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点,综上可知,$h(x)$ 有且只有两个零点.

解析四:更一般的 $h(x) = x^a(x^{3-a} - x^{1-a} - x^{\frac{1}{2}-a}), (1 \leq a \leq 3)$ 记 $\phi(x) = x^{3-a} - x^{1-a} - x^{\frac{1}{2}-a}$,则 $\phi'(x) = (3-a)x^{2-a} - (1-a)x^{-a} - (\frac{1}{2} - a)x^{-\frac{1}{2}-a}$.

当 $\in (0, +\infty)$ 时,$\phi'(x) > 0$,因此 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $\phi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内至多只有一个零点. 因此 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内也至多只有一个零点,综上可知,有且只有两个零点.

注:(1)解析四把解析一至解析三统一到一起,更具有一般性,至此,我们利用解析四可以根据不同的需要变换出形式不同而本质相同的一系列解法;(2)我们认为解析四在一定程度上揭示了函数 $h(x) = x^3 - x - \sqrt{x}$ 的本质结构特征.

(Ⅱ)证明(用数学归纳法)取足够大的正数 $M(M \geq \sqrt{2})$ $\because a_1 = a(a > 0)$ 为一固定的正数

$\therefore$ 当 $n = 1$ 时,$a_1 = a \leq M$ 成立

假设当 $n = k$ 时 $a_k \leq M$,那么当 $n = k + 1$ 时,$a_{k+1}{}^3 = a_k + \sqrt{a_k} \leq M + \sqrt{M}$

$\therefore a_{k+1} \leq \sqrt[3]{M + \sqrt{M}}$

由 $\sqrt[3]{M + \sqrt{M}} \leq M$ 平方整理得 $1 \leq M(M^2 - 1)^2$ $(*)$

而由 $M \geq \sqrt{2}$ 知 $(*)$ 式明显成立.

$\therefore n = k + 1$ 时 $a_{k+1} \leq M$.

综上可知存在常数 M,使得对于任意的 $n \in N^*$,都有 $a_n \leq M$.

注:(1)第(Ⅱ)问参考答案的证明是构造性的,但证明过程比较突兀、曲折.(尤其对高中生而言,可能既不易想到,也不易理解),而本文对第(Ⅱ)问的解答则十分简洁,也易于理解;(2)存在常数 M,使得对于任意的 $n \in N^*$,都有 $a_n \leq M$,表明数列 $\{a_n\}$ 是有界数列.