很抱歉, 我太粗心了, 应该是这样的. 先看二元, 不妨设$a>b$, 设$\frac{a}{b}=1+x$, 则$x>0$, 原不等式等价于

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}+\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-\frac{1+x}{x}}>2\mathrm{e}$$

等价于

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}+(1+x)^{\frac{1}{x}+1}>2e$$

利用一次均值不等式放缩, 只需要证明

$$(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}>e$$

这个的证明不难求导及利用熟知的结果$\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$即可.

再看n元时, 设$x_i=\ln\frac{a_{i-1}}{a_i}$, 则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$, 原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(e^{x_i})^{\frac{1}{e^{x_i}-1}}>ne \iff \sum_{i=1}^{n}e^{\frac{x_i}{e^{x_i}-1}}>ne$$

设$f(x)=e^{\frac{x}{e^x-1}}$, 当$x\neq 0$时; $f(x)=e$, 当$x=0$时. 可以验证$f(x)$在$x=0$处二阶可导, 且$f'(0)=-\frac{e}{2}$, $f''(0)=\frac{5e}{12}>0$. 如果我们能证明$f''(x)>0$恒成立且严格凸.

$$f'(x)=-\frac{e^{\frac{x}{e^x-1}}(e^x(x-1)+1)}{(e^x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^{\frac{x}{e^x-1}}(e^{2x}(x^2-2x+5)+e^x(x-4)+e^{3x}(x-2)+1)}{(e^x-1)^4}$$

要证当$x\neq 0$时有$f''(x)>0$, 只需证明

$$e^{2x}(x^2-2x+5)+e^x(x-4)+e^{3x}(x-2)+1>0$$

为此设$t=e^x$, 则$t>0$且$x=\ln t$, 下面考察函数

$$g(t)=t^2(\ln^2 t-2\ln t+5)+t(\ln t-4)+t^3(\ln t-2)+1$$

则

$$g'(t)=-3+8t-5t^2+(1-2t+3t^2)\ln t+2t\ln^2 t$$

$$g''(t)=6+\frac{1}{t}-7t+(2+6t)\ln t+2\ln^2 t$$

$$g^{(3)}(t)=\frac{2t(3t+2)\ln t-(t-1)^2}{t^2}$$

设$h(t)=2t(3t+2)\ln t-(t-1)^2$, 则

$$h'(t)=6+4t+4(1+3t)\ln t$$

$$h''(t)=4\left(\frac{1}{t}+3\ln t+4\right)$$

易证$h''(t)>0$. 于是$h'(t)$严格递增, 而当$t\longrightarrow 0^+$时, $h'(t)<0$, 当t足够大时, $h'(t)>0$, 所以$h'(t)$先小于0后大于0, 即$h(t)$先递减后递增. 因为$h(0^+)=-1$, $h(1)=0$, 所以$h(t)$在$(0,1)$上小于0, 在$(1,+\infty)$上大于0. 因此$g^{(3)}(t)$在$(0,1)$上小于0, 在$(1,+\infty)$上大于0. 于是$g''(t)$在$(0,1)$上递减, 在$(1,+\infty)$上递增, 而$g''(1)=0$, 所以$g''(t)\geq 0$恒成立, 因此$g'(t)$递增, 而$g'(1)=0$,

所以$g'(t)$在$(0,1)$上小于0, 在$(1,+\infty)$上大于0. 因此$g(t)$在$(0,1)$上递减, 在$(1,+\infty)$上递增, 而$g(1)=0$, 所以$g(t)\geq 0$恒成立, 且仅当$t=1$时$g(t)=0$, 从而当$x\neq 0$时, $f''(x)>0$. (上面的递推过程单调性都是严格的) 于是$f(x)$严格凸, 利用Jensen不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) = nf(0) = ne$$

又x_i都不为0, 且$f(x)$严格凸, 所以等号不成立, 即

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > ne$$