南京大学2005年博士生入学考试分析学试题

第1-5题选三道, 6-7题选一道, 8-9题选一道作答.

1. $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别为自然数集和实数集. 对 $X = \mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$, μ 为 X 上的计数测度. 试依定义描述两种情形下的 Lebesgue 积分.

2. 设 $1 \leqslant p < r < \infty$, μ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度. $X = L^p(\mathbb{R}, \mu) \cap L^r(\mathbb{R}, \mu)$, $||\cdot|| = ||\cdot||_p + ||\cdot||_r$. 证明 $(X, ||\cdot||)$ 是 Banach 空间.

3. 设 X 为具有有限非零项的实数序列组成的向量空间, 并赋予 l_1 范数. 证明 X 不是 Banach 空间.

4. f, g 为测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的正可测函数, $0 < t < r < m < \infty$. 证明下面的不等式
$$\left(\int fg^r \mathrm{d}\mu\right)^{m-t} \leqslant \left(\int fg^t \mathrm{d}\mu\right)^{m-r} \left(\int fg^m \mathrm{d}\mu\right)^{r-t},$$
若上式右端的积分有限.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdot, \alpha_n$ 为正实数且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdot + \alpha_n = 1$. 对正可积函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in L^1$, 证明
$$\int (f_1^{\alpha_1} \cdot f_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot f_n^{\alpha_n}) \mathrm{d}\mu \leqslant ||f_1||_1^{\alpha_1} \cdot ||f_2||_1^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot ||f_n||_1^{\alpha_n}.$$

6. 设 F 为满足 $\sup\limits_n n|x_n|$ 的实数列 $\{x_n\}$ 的全体[1]. 下面两个命题
(a) F 为 l^2 的线性子空间;
(b) $F \cap l^2$ 在 l^2 中为闭集,
如果正确请证明, 不正确也请说明理由.

7. H 为 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 为标准正交基, $T : H \to H$, $T(e_n) = \dfrac{e_n}{n}$. 证明 T 连续但不是开映射, 也不是满射, 但 T 的值域在 H 中稠密.

8. 设 $\{f_n\}$ 为 Hilbert 空间的标准正交基. 试问对怎样的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 级数
$$\sum_n \frac{1}{(1+n^2)^\alpha} f_n$$
在 H 中收敛.

[1]怀疑漏东西了

9. 设 X 是 $Banach$ 空间, $T : X \to l^\infty$ 为一线性算子. 对 $n \in \mathbb{N}$, f_n 为 X 上的线性泛函 $f_n x = (Tx)_n$. 证明 T 有界当且仅当所有的 f_n 有界.

By Nirvanacs