南京大学2006年博士生入学考试分析学试题

第1-3题必做, 4-6题选两道作答.

1. 设 f 为测度空间 $(E, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的非负可积函数, $E_k = \{x \in E : f(x) \geqslant k\}$, $k \in \mathbb{N}$. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$.

2. 证明函数 $x \log(1+x)$ 为 $(-1, +\infty)$ 上的凸函数, 并证明若

$$\int_0^1 |f(x)| \log(1 + |f(x)|) \mathrm{d}x < \infty,$$

则 $f \in L^1([0,1])$.

3. T 为 Hilbert 空间 H 上的线性算子, 泛函 $\phi_T(x) = \langle Tx, x \rangle$. 证明 ϕ_T 连续当且仅当 T 连续.

4. 证明 $L^1([0,1])$ 中的序列 $\{f_n\}$ 弱收敛于 $f \in L^1([0,1])$ (赋范线性空间 X 中序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 若任给 $F \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$) 当且仅当 $\{||f_n||_1\}$ 有界且

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \mathrm{d}m = \int_E f \mathrm{d}m$$

对 $[0,1]$ 中任意可测集 E.

5. 设 $\{f_n\}$ 为 $L^p(\mathbb{R})$ 中的有界序列 (即 $||f_n||^p$ 有界), 且几乎处处逐点收敛于 f. 证明 $f \in L^p(\mathbb{R})$.

6. 设 $E = \{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $f \in C_c(\mathbb{R})$, 证明

$$\mu_f = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} f(a_n)$$

为 $\mathbb{R}$ 上的正则 Borel 正测度且这个测度的支集为 E 的闭包.

By Nirvanacs