

2007年北京大学保送生考试试题参考解答

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2007年北京大学保送生考试数学试题的参考解答

关键词 保送 数学

1. 设 $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$, 求 $f(0) + f(1) + \cdots + f(50)$ 的值.

解答. 因为 $x^2 - 53x + 196 = (x - 4)(x - 49)$, 所以当 $4 \leq x \leq 49$ 时,

$$f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196| = x^2 - 53x + 196 - (x^2 - 53x + 196) = 0.$$

所以

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(50) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(50) = 1052.$$



2. 证明: 对任意实数 k , 方程 $x^2 + y^2 - 2kx - (6 + 2k)y - 2k - 31 = 0$ 过两定点.

证明. 将之化成关于 k 的一次函数, 即

$$-(2x + 2y + 2)k + x^2 + y^2 - 6y - 31 = 0.$$

解方程

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 31 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

于是对任意实数 k , 方程 $x^2 + y^2 - 2kx - (6 + 2k)y - 2k - 31 = 0$ 恒过 $(-6, 5)$, $(2, -3)$ 两点.



3. 解方程组

$$\begin{cases} xy = 2x + y - 1 \\ xz = 3x + 4z - 8 \\ yz = 3y + 2z - 8 \end{cases}$$

解答. 方程组等价于

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 1 \\ (x-4)(z-3) = 4 \\ (y-2)(z-3) = -2 \end{cases}$$

因此

$$4 = (x-1)(y-2)(x-4)(z-3) = -2(x-1)(x-4),$$

解得 $x = 2, 3$.

当 $x = 2$ 时, 解得 $y = 3, z = 1$. 当 $x = 3$ 时, 解得 $y = \frac{5}{2}, z = -1$. 所以方程组有两组解

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

■

4. 长方体的三边长 a, b, c , 满足 $a > b > c$. P 和 Q 是长方体最远的两个点. 求沿长方体表面从 P 到 Q 的最短路程的长度.

解答. 设与 P 相邻的三个面为 K_1, K_2, K_3 称之为第一类的, 与 Q 相邻的三个面为 Z_1, Z_2, Z_3 称之为第二类的. 对于一条 P 到 Q 的路线, 如果可以选择两个面 K_i, Z_j 使得这条路线都包含在这两个面中, 那么称这条路线能被两个面覆盖. 假设一条 P 到 Q 的路线 S 不能被两个面覆盖, 那么至少需要两个同一类的面, 不妨设为第一类的面才能覆盖, 这意味着 S 上存在两个点 A, B 在第一类面上, 却不能被同一个第一类面覆盖. 设 S 从 P 开始先过 A 再过 B , 那么用直线 PB 代替 S 上 P 到 B 的那段曲线, 这样得到的新的路线比 S 短. 这是因为两点直接直线最短, 而等号成立将推出 A 在线段 PB 上, 与假设矛盾. 因此不能被两个面覆盖的路线不可能取最小值. 下面只需要考虑能被两个面覆盖的路线, 此时两面必有公共边, 否则这样的两面平行无法覆盖一条完整的路线. 将其中一个平面沿公共边旋转 90° , 使得与另一平面共面, 利用两点之间线段最短, 可求得有三种最短距离

$$\sqrt{a^2 + (b+c)^2}, \sqrt{b^2 + (c+a)^2}, \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

由题意 $a > b > c$ 易知三者最小值为 $\sqrt{a^2 + (b+c)^2}$.

■