空念数学杂志
2011 年 第 1 卷 第 1 期 7–8

2007年北京大学保送生考试试题参考解答

作　者　Nirvanacs
摘　要　本文给出了2007年北京大学保送生考试数学试题的参考解答
关键词　保送　数学

1. 设 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|$, 求 $f(0)+f(1)+\cdots+f(50)$ 的值 .

解答. 因为 $x^2-53x+196=(x-4)(x-49)$, 所以当 $4\leqslant x\leqslant 49$ 时 ,

$f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|=x^2-53x+196-(x^2-53x+196)=0$.

所以

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(50)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(50)=1052\,.$$

■

2. 证明 : 对任意实数 k , 方程 $x^2+y^2-2kx-(6+2k)y-2k-31=0$ 过两定点 .

证明. 将之化成关于 k 的一次函数 , 即

$$-(2x+2y+2)k+x^2+y^2-6y-31=0\,.$$

解方程

$$\begin{cases} 2x+2y+2=0 \\ x^2+y^2-6y-31=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=-6 \\ y=5 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

于是对任意实数 k , 方程 $x^2+y^2-2kx-(6+2k)y-2k-31=0$ 恒过 $(-6,5)$, $(2,-3)$ 两点 . ■

3. 解方程组

$$\begin{cases} xy=2x+y-1 \\ xz=3x+4z-8 \\ yz=3y+2z-8 \end{cases}$$

解答. 方程组等价于

$$\begin{cases}(x-1)(y-2)=1\\(x-4)(z-3)=4\\(y-2)(z-3)=-2\end{cases}$$

因此

$$4=(x-1)(y-2)(x-4)(z-3)=-2(x-1)(x-4)\,,$$

解得 $x=2\,,\,3$.

当 $x=2$ 时，解得 $y=3$，$z=1$. 当 $x=3$ 时，解得 $y=\dfrac{5}{2}$，$z=-1$. 所以方程组有两组解

$$\begin{cases}x=2\\y=3\\z=1\end{cases}\qquad \text{或} \qquad \begin{cases}x=3\\y=\dfrac{5}{2}\\z=-1\end{cases}$$

■

4. 长方体的三边长 a，b，c，满足 $a>b>c$. P 和 Q 是长方体最远的两个点. 求沿长方体表面从 P 到 Q 的最短路程的长度.

解答. 设与 P 相邻的三个面为 K_1,K_2,K_3 称之为第一类的，与 Q 相邻的三个面为 Z_1,Z_2,Z_3 称之为第二类的. 对于一条 P 到 Q 的路线，如果可以选择两个面 K_i,Z_j 使得这条路线都包含在这两个面中，那么称这条路线能被两个面覆盖. 假设一条 P 到 Q 的路线 S 不能被两个面覆盖，那么至少需要两个同一类的面，不妨设为第一类的面才能覆盖，这意味着 $\mathcal{S}$ 上存在两个点 A,B 在第一类面上，却不能被同一个第一类面覆盖. 设 $\mathcal{S}$ 从 P 开始先过 A 再过 B，那么用直线 PB 代替 $\mathcal{S}$ 上 P 到 B 的那段曲线，这样得到的新的路线比 $\mathcal{S}$. 这是因为两点直接直线最短，而等号成立将推出 A 在线段 PB 上，与假设矛盾. 因此不能被两个面覆盖的路线不可能取最小值. 下面只需要考虑能被两个面覆盖的路线，此时两面必有公共边，否则这样的两面平行无法覆盖一条完整的路线. 将其中一个平面沿公共边旋转 $90°$，使得与另一平面共面，利用两点之间线段最短，可求得有三种最短距离

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}\quad,\sqrt{b^2+(c+a)^2}\quad,\sqrt{c^2+(a+b)^2}$$

由题意 $a>b>c$ 易知三者最小值为 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$. ■