南京大学2007年博士生入学考试分析学试题

第1-3题任选两道, 4-5题选一道, 6-8题选两道作答.

1. 求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{x}{n^2}+\frac{\cos x}{n^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

请写出过程及理由.

2. 请构造一个 $[0,1]$ 上的连续函数序列 f_n, 使得 $0 \leqslant f_n \leqslant 1$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

但是对任意的 $x \in [0,1]$, $f_n(x)$ 不收敛.

3. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$. 证明当 $\delta \to 1$ 时, 若 $f_\delta(x) = f(\delta x)$, 则 $f_\delta \xrightarrow{L^1} f$.

4. 设 f 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 证明 f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$$\bigvee_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 与 g 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 设

$$B = \int_{[0,1]\times[0,1]} (f(x)g(y)-g(x)f(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

6. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 对 $\forall\alpha > 0$, 设 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}$. 证明

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^\infty m(E_\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

其中 m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度.

7. 证明 Hilbert 空间中的正交序列必弱收敛于 0.(Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称作弱收敛于 $x \in X$ 是指对 X 上的任意有界线性泛函 F, $F(x_n)$ 收敛到 $F(x)$.) 考虑 $L^p([0,1],m)$, 其中 m 为 Lebesgue 测度, $1 \leqslant p < \infty$. 证明 $f_n(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\pi x} \in L^p([0,1],m)$ 弱收敛于 0.

8. 设 μ 为一正测度. 对任意的 $\phi \in L^\infty(\mu)$, 定义

$$(M_\phi f)(x) = \phi(x) f(x).\ \forall f \in L^2(\mu).$$

证明 M_ϕ 对所有的 $\phi \in L^\infty(\mu)$ 为 $L^2(\mu)$ 到 $L^2(\mu)$ 的有界线性映射, 且 $||M_\phi|| \leqslant ||\phi||_\infty$.

对什么样的测度 μ, $||M_\phi|| = ||\phi||_\infty, \forall \phi \in L^\infty(\mu)$? 何时 M_ϕ 为 $L^2(\mu)$ 到 $L^2(\mu)$ 的线性同构?

By Nirvanacs