南京大学2008年博士生入学考试分析学试题

第1-7题任选五道作答.

1. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间, 设 $1 \leqslant p < \infty,\ 0 < r < p$. 证明映射

$$\Phi : L^p(\mu) \to L^{\frac{p}{r}}(\mu),\ f \mapsto |f|^r$$

   是连续的. (注意这里 Φ 不是线性映射!)

2. 考虑 $C([0,1])$ 上的两个范数 $||\cdot||_\infty$ 和 $||\cdot||_1$, 证明恒等映射 $I : (C([0,1]), ||\cdot||_\infty) \to (C([0,1]), ||\cdot||_1)$ 是连续满射, 但不是开映射. 并请解释其与开映射定理是否矛盾?

3. 设 f 为 $[0,1]$ 上的非负 Lebesgue 可测函数满足

$$m(\{x : f(x) \geqslant t\}) < \frac{1}{1+t^2},\ \ t > 0.$$

   试决定 $p \in [1, \infty)$ 使得 $f \in L^p([0,1])$, 并请给出使得 $f \notin L^p([0,1])$ 的 p 的最小值.

4. 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 中的标准正交函数系, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^x f_n(t) \mathrm{d}t \right|^2 \leqslant x,\ \ \forall x \in [0,1],$$

   并且上式的等号成立当且仅当 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可张成 $L^2([0,1])$ 的稠密子空间.

5. 设对每一区间 I, f 为 I 上的绝对连续函数, 且 f 和 f' 均含于 $L^1(\mathbb{R})$. 证明 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f' \mathrm{d}m = 0$ 且当 $|x| \to \infty$ 时, $f(x) \to 0$.

6. $L^2(\mu)$ 中的序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于范数有界, 证明 $f_n/n \to 0$, a.e., 当 $n \to \infty$ 时.

7. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 Borel 可测的, 证明函数 $f(x+y)$ 作为 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的函数是 $m \times m$ 可测的, 其中 m 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度.

By Nirvanacs