空念数学杂志
2011 年 第 1 卷 第 1 期 4–6

2009年北京大学保送生考试试题参考解答

作　者　Nirvanacs
摘　要　本文给出了2009年北京大学保送生考试数学试题的参考解答
关键词　保送　数学

1. 圆内接四边形 $ABCD$，$AB=1$，$BC=2$，$CD=3$，$DA=4$，求四边形 $ABCD$ 外接圆半径.

解答. 由 $\angle ABC+\angle ADC=\pi$ 及余弦定理有

$$\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}+\frac{AD^2+DC^2-CA^2}{2AD\cdot DC}=\cos\angle ABC+\cos\angle ADC=0\,.$$

代入数值得 $AC=\sqrt{\frac{55}{7}}$，所以

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}=-\frac{5}{7}\quad\Longrightarrow\quad\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{24}}{7}\,,$$

因此由正弦定理可得四边形 $ABCD$ 外接圆半径

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{2310}}{24}\,.$$

■

2. 已知一正无穷等差数列中有 3 项：13，25，41. 求证: 2009 为该数列中某一项.

证明. 设 $a_n=a_0+nd$ 为满足题意的数列，那么 $d\geqslant 0$. 否则当 n 足够大时 a_n 会变成负数. 令 13，25，41 分别为这数列的 k_1,k_2,k_3 项，因此有

$$13=a_0+k_1d\,,\tag{1}$$

$$25=a_0+k_2d\,,\tag{2}$$

$$41=a_0+k_3d\,,\tag{3}$$

由 (1)(2)(3) 知 $(k_3+k_1-2k_2)d=4$. 又 $d\geqslant 0$，所以 $k_3+k_1-2k_2$ 为正整数，于是由

$$2009=41+4\times 492=41+492(k_3+k_1-2k_2)d$$

知 2009 为该数列中某一项. ■

3. 是否存在实数 x，使得 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 都是有理数.

解答. 不存在. 反设存在这样的实数 x，那么令

$$p=\tan x+\sqrt{3}\,,\quad q=\cot x+\sqrt{3}\,,$$

其中 p，q 为有理数.
于是 $(p-\sqrt{3})(q-\sqrt{3})=\tan x\cot x=1$，得

$$(p+q)\sqrt{3}=pq+2\,.$$

由于 $p+q$，$pq+2$ 为有理数，因此只能是 $p+q=0$，$pq+2=0$，解得

$$|p|=|q|=\sqrt{2}\,,$$

这与 p，q 为有理数矛盾，因此不存在这样的实数 x. ■

4. 对任意的实数 x，恒成立 $a\cos x+b\cos 2x\geqslant -1$，求 $a+b$ 的最大值.

解答. 令 $t=\cos x$，问题转化为:
对任意的 $t\in[-1,1]$，都有 $f(t)=2bt^2+at+1-b\geqslant 0$，求 $a+b$ 的最大值.
令 $a=\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$，此时

$$f(t)=\frac{4}{3}t^2+\frac{4}{3}t+\frac{1}{3}=\frac{4(t+1)^2}{3}\geqslant 0\,,\quad a+b=2\,,$$

下面我们证明 $a+b\leqslant 2$，那么 $a+b$ 的最大值为 2.
令 $t=1,0,-1$，得

$$1-b\geqslant 0\,,\quad a+b\geqslant -1\,,\quad a-b\leqslant 1\,,$$

显然有 $a\leqslant b+1\leqslant 2$.
(a)如果 $b\leqslant 0$，此时显然有 $a+b\leqslant 0+2=2$.
(b)如果 $0<b\leqslant 1$. 当 $a\leqslant 0$ 时，显然有 $a+b\leqslant 1<2$.
当 $a>0$ 时. 如果 $a\geqslant 4b$，此时利用线性规划可以轻松求得 $a+b\leqslant\dfrac{5}{3}$. 如果 $a\leqslant 4b$，此时 $f(t)$ 的对称轴 $-1\leqslant x=-\dfrac{a}{4b}<0$，因此 $f\left(\dfrac{-a}{4b}\right)\geqslant 0$，即

$$2b\left(\frac{-a}{4b}\right)^2+a\left(\frac{-a}{4b}\right)+1-b\geqslant 0\quad\Longleftrightarrow\quad a^2+8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 2\,.\qquad(4)$$

由柯西不等式

$$\left(a^2+8\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\geqslant\left(a+b-\frac{1}{2}\right)^2 , \tag{5}$$

综合 (4)(5) 知

$$a+b-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}\quad\Longrightarrow\quad a+b\leqslant 2 .$$

综上所述, $a+b$ 的最大值为 2 . ■

5. 有 333 人考试, 一共做对了 1000 道题. 做对 3 道及以下为不及格, 做对 6 道及以上为优秀, 不是所有人做对的题得数量的奇偶性相同. 问不及格和优秀的人数哪个多?

解答. 不及格的人数多. 设不及格的人数为 a , 优秀的人数为 b , 那么做对 4 道或者 5 道的人数为 $333-a-b$, 所以至少做对了 $6b+4(333-a-b)$ 道题, 有

$$6b+3(333-a-b)\leqslant 1000 ,$$

解得 $b\leqslant a$.
如果 $a=b$, 此时显然 $a=b<167$, 那么由

$$6b+4(333-a-b)\leqslant 1000 ,$$

得到 $a=b\geqslant 166$, 因此 $a=b=166$. 此时全体优秀的人做对了至少 $6\times 166=996$ 道题, 全体不是优秀也不是不及格的人做对了至少 $4\times(333-166-166)=4$ 道题, 而 $966+4=1000$, 因此只能是 166 人做对 6 道题, 1 人做对 4 道题, 166 人做对 0 道题. 这与不是所有人做对的题得数量的奇偶性相同矛盾, 因此 $a\neq b$.
综上所述, $a>b$ 即不及格的人数多于优秀的人数. ■