南京大学2009年博士生入学考试分析学试题

第1-3题任选两道, 第4-7题任选三道作答.

1. 设 f 和 g 为 $\mathbb{R}$ 上的非负 Lebesgue 可测函数. 定义 $A_y = \{x : f(x) \geqslant y\}$, $h(y) = \int_{A_y} g(x)\mathrm{d}x$. 证明:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} h(y)\mathrm{d}y.$$

2. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为有限测度空间, 可测函数序列 $\{f_n\} \subset L^2(\mu)$ 有界. 证明若 f_n 依测度 μ 收敛于 f, 则 $\int f_n \mathrm{d}\mu \to \int f \mathrm{d}\mu$.

3. 设 $f \in L^1([0,1])$, $0 < c < 1$, 且对任意可测集 $E \subset [0,1]$, $m(E) = c$ 都有 $\int_E f(t)\mathrm{d}t = 0$, 其中 m 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 证明 $f \equiv 0,\ \text{a.e. } [m]$.

4. 证明集合

$$K = \{f \in C([0,1]) : |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^{\alpha}, f(0) = 0\}$$

为 $C([0,1])$ 中紧集, 其中 $0 < \alpha < 1$.

5. 设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 证明对 (关于 Lebesgue 测度) 几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 任给 $\varepsilon > 0$, 集合 $\{y : |f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ 密度为 0.

6. 设 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为复数序列, 定义函数 S_n 及 K_n 如下:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ K_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_n(x).$$

证明若序列 $\{K_n\}$ 在 $L^p((-\pi,\pi))$ 中有界, $1 < p \leqslant \infty$, 则存在 $f \in L^p((-\pi,\pi))$ 使得

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

7. 设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Banach 空间 X 的闭子空间序列, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 亦为 X 的闭子空间. 证明存在某 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $Y = X_{n_0}$.

By Nirvanacs