空念数学杂志
2011 年 第 1 卷 第 1 期 9–32

2010年各国数学奥林匹克中不等式问题

作　者　Nirvanacs
摘　要　本文给出了2010年各国数学奥林匹克中不等式问题的参考解析．
关键词　数学奥林匹克　不等式

1. **(阿尔巴尼亚)** 设 a,b,c 为某三角形的三边长，对于不等式

$$a^3+b^3+c^3<k(a+b+c)(ab+bc+ca)\ .$$

(*a*) 证明 $k=1$ 时不等式成立．
(*b*) 求使得不等式恒成立的最小常数 k．

解答. 由于 a,b,c 为某三角形的三边长，所以

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b\ .$$

于是

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(ab+bc+ca)\\=&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc\\>&a^2\cdot a+b^2\cdot b+c^2\cdot c=a^3+b^3+c^3\ ,\end{aligned}$$

所以 $k=1$ 时不等式成立．

另外，令 $a=b=1,c\to 0^+$，此时 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\longrightarrow 1$，所以使得不等式恒成立的最小常数 $k\geqslant 1$，又 $k=1$ 时不等式成立，所以所求最小的 $k=1$. ■

2. **(希腊)** 已知 $x,y>0$，且 $x+y=2a$，求证：

$$x^3y^3(x^2+y^2)^2\leqslant 4a^{10}\ .$$

证明. 由均值不等式，有

$$4a^2=(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy\geqslant 2\sqrt{2xy(x^2+y^2)}\ ,$$

所以

$$xy(x^2+y^2)\leqslant 2a^4\ .$$

又因为 $4a^2=(x+y)^2\geqslant 4xy$，所以 $xy\leqslant a^2$. 于是

$$x^3y^3(x^2+y^2)^2=xy\cdot\big(xy(x^2+y^2)\big)^2\leqslant a^2\cdot(2a^4)^2=4a^{10}.$$

■

3. (印度) 已知 $a,b,c>0$，且 $ab+bc+ca\leqslant 3abc$. 求证：

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+3\leqslant\sqrt{2}(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}).$$

证明. 首先证明 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{2ab}{a+b}}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$. 事实上，这个不等式等价于 $2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\leqslant(a+b)^2$，而最后一个不等式我们在题 2 中已经证过这个结论.

同理 $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{2bc}{b+c}}\leqslant\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{\dfrac{c^2+a^2}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{2ca}{c+a}}\leqslant\sqrt{2(c+a)}$，因此要证明原不等式，只需要证明

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}\geqslant 3.$$

由*Holder*不等式得

$$\left(\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}\right)^2\left(\frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{c+a}{2ca}\right)\geqslant 3^3,$$

因此只需要证明 $\dfrac{a+b}{2ab}+\dfrac{b+c}{2bc}+\dfrac{c+a}{2ca}\leqslant 3$，这等价于 $ab+bc+ca\leqslant 3abc$. ■

注记. 此题是*2009*年*IMO*预选题. ■

4. (印度) 设 P 是 $\triangle ABC$ 的Brocard点，求证：

$$\left(\frac{AP}{BC}\right)^2+\left(\frac{BP}{CA}\right)^2+\left(\frac{CP}{AB}\right)^2\geqslant 1.$$

证明. 我们证明一个更强的命题，对 $\triangle ABC$ 所在的平面任一点 P，有

$$\frac{AP}{BC}\cdot\frac{BP}{CA}+\frac{BP}{CA}\cdot\frac{CP}{AB}+\frac{CP}{AB}\cdot\frac{AP}{BC}\geqslant 1.$$

为此引进复平面，设 A,B,C,P 对应复平面上点 z_1,z_2,z_3,z. 由于恒等式

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}=1.$$

所以恒有不等式

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|+\left|\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|+\left|\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right|\\ \geqslant&\left|\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right|=1\,.\end{aligned}$$

即 $\frac{AP}{BC}\cdot\frac{BP}{CA}+\frac{BP}{CA}\cdot\frac{CP}{AB}+\frac{CP}{AB}\cdot\frac{AP}{BC}\geqslant 1$. 于是

$$\left(\frac{AP}{BC}\right)^2+\left(\frac{BP}{CA}\right)^2+\left(\frac{CP}{AB}\right)^2\geqslant\frac{AP}{BC}\cdot\frac{BP}{CA}+\frac{BP}{CA}\cdot\frac{CP}{AB}+\frac{CP}{AB}\cdot\frac{AP}{BC}\geqslant 1.$$

■

5. **(伊朗)** 已知 $a,b,c>0$, 求证 :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\geqslant\frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

证明. 首先 , 由*Cauchy*不等式 , 我们有

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(a+b+c)^2}\right)(9+9+9+1)\geqslant\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

因此只需要证明

$$\frac{1}{28}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2\geqslant\frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2,$$

等价于证明

$$5\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)\geqslant 14\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right),$$

即

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c},$$

这个不等式由柯西不等式或者均值不等式都很容易得到 . ■

注记. 这个题目可以推广到 n 维 , 即已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$, 求证 :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}+\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}\geqslant\frac{n^3+1}{(n^2+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^2.$$

■

6. **(伊朗)** 已知 $x, y, z > 0$, 且 $xy + yz + zx = 1$. 求证 :

$$3 - \sqrt{3} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant (x + y + z)^2 .$$

证明. 由均值不等式 $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + zx) = 3$, 所以 $x + y + z \geqslant \sqrt{3}$, 因此只需要证明

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z \geqslant (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) ,$$

移项配方得

$$\frac{(x-y)^2}{y} + \frac{(y-z)^2}{z} + \frac{(z-x)^2}{x} \geqslant \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) . \tag{1}$$

(a) 如果 x, y, z 都不大于 2 , 那么不等式 (1) 显然成立 .
(b) 如果 x, y, z 中有一者大于 2 , 不妨设为 x , 那么 y, z 都小于 $\frac{1}{2}$, 此时

$$\begin{aligned}\frac{(x-y)^2}{y} + \frac{(y-z)^2}{z} + \frac{(z-x)^2}{x} &\geqslant 2(x-y)^2 + 2(y-z)^2 \\ &\geqslant (x-y)^2 + (y-z)^2 + \frac{1}{2} \cdot (z-x)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right) ,\end{aligned}$$

其中用到 $(x-y)^2 + (y-z)^2 \geqslant \frac{1}{2}(z-x)^2$, 因此此时 (1) 仍然成立 .

综上 , 不等式得证 . ■

7. **(保加利亚)** 设正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 求证 :

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 3 .$$

证明. 由均值不等式有

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2} \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot 3abc(a + b + c)} .\end{aligned}$$

利用条件 $a + b + c = 3$, 即得 $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leqslant 3$. ■

8. (韩国) 任意给定一个三角形 ABC，P,Q,R 是三角形 ABC 内切圆分别在边 BC,CA,AB 的切点．设 T 是三角形 ABC 的面积，L 是其周长，求证：

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3+\left(\frac{BC}{QR}\right)^3+\left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L^2}{T}.$$

证明. 原不等式转化为

$$\sum\left(\sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\right)^{-1} \geqslant \frac{32}{\sqrt{3}}\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A\sin B\sin C}.$$

由均值不等式有

$$\sum\left(\sin^3\frac{A}{2}\sin^3\frac{B}{2}\right)^{-1} \geqslant 3\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)^{-1}.$$

所以只需要证

$$3\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}\right)^{-1} \geqslant \frac{32}{\sqrt{3}}\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{\sin A\sin B\sin C}. \tag{2}$$

注意到

$$\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\sin A\sin B\sin C = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

所以 (2) 等价于 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \geqslant \sin A\sin B\sin C$，显然成立． ■

9. (葡萄牙) 证明：对任意的三角形都存在某两边长 a,b，满足

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

证明. 不妨设三边长为 x,y,z 满足 $x\leqslant y\leqslant z$，设 $k=\min\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{y}\right)$．显然 $k\geqslant 1$，因此只要证明 $k<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$．由假设，有 $y\geqslant kx, z\geqslant ky$；而在三角形中有 $z-y<x$，所以 $ky-y<x$，因此 $(k-1)kx<x$．即 $(k-1)k<1$，解得 $k<\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$． ■

10. (越南) 已知 $a,b,c>0$，$16(a+b+c)\geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$．求证：

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3 \leqslant \frac{8}{9}.$$

证明. 由均值不等式

$$a+b+\sqrt{2a+2c}=(a+b)+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}\,,$$

于是

$$\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3\leqslant\frac{2}{27(a+b)(a+c)}\,,$$

同理可得

$$\left(\frac{1}{b+c+\sqrt{2b+2a}}\right)^3\leqslant\frac{2}{27(b+c)(b+a)}\,,\left(\frac{1}{c+a+\sqrt{2c+2b}}\right)^3\leqslant\frac{2}{27(c+a)(c+b)}\,.$$

于是只需要证明

$$\sum_{cyc}\frac{2}{27(a+b)(a+c)}\leqslant\frac{8}{9}\,,$$

这等价于

$$6(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant a+b+c\,,$$

即

$$6abc\left(\sum a\right)\left(\sum ab\right)\geqslant abc\sum a+6a^2b^2c^2\,. \tag{3}$$

注意到 $16(a+b+c)\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，即 $16abc\sum a\geqslant\sum ab$，于是

$$16abc\sum a\left(\sum ab\right)\geqslant\left(\sum ab\right)^2\geqslant 3abc\sum a\,, \tag{4}$$

另外由均值不等式可得

$$2abc\sum a\sum ab\geqslant 18a^2b^2c^2\,, \tag{5}$$

因此由 (4)(5) 相加再除以 3 即得 (3)．

于是不等式得证，等号成立当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{4}$． ■

11. **(印尼)** 已知 $a,b,c\geqslant 0$ 和 $x,y,z>0$ 且 $a+b+c=x+y+z$，求证：

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geqslant a+b+c\,.$$

证明. 由均值不等式有

$$\frac{a^3}{x^2}+x+x \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2}\cdot x\cdot x}=3a\,,$$
$$\frac{b^3}{y^2}+y+y \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{y^2}\cdot y\cdot y}=3b\,,$$
$$\frac{c^3}{z^2}+z+z \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{z^2}\cdot z\cdot z}=3c\,.$$

上述三式相加, 即得

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}+2(x+y+z)\geqslant 3(a+b+c)\,.$$

由于 $a+b+c=x+y+z$，所以 $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geqslant a+b+c$． ■

12. **(印尼)** 实系数多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有 3 个正实根，且 $f(0)<0$．求证：$2b^3+9a^2d-7abc\leqslant 0$．

证明. 设 $f(x)$ 的三个正实根为 p,q,r，那么 $f(x)=a(x-p)(x-q)(x-r)$．由 $f(0)=-apqr<0$，可知 $a>0$．由Vieta定理 $p+q+r=-\frac{b}{a}$，$pq+qr+rp=\frac{c}{a}$，$pqr=-\frac{d}{a}$．由于 $a>0$，原不等式等价于

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^3+9\frac{d}{a}-7\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\leqslant 0\,. \tag{6}$$

将Vieta定理得到的三个式子代入，不等式 (6) 转化为

$$-2(p+q+r)^3-9pqr+7(p+q+r)(pq+qr+rp)\leqslant 0,$$

即 $(p+q)(p-q)^2+(q+r)(q-r)^2+(r+p)(r-p)^2\geqslant 0$，显然成立. ■

注记. 2008年中国女子数学奥林匹克的第二题，由朱华伟先生提供． ■

13. **(哈萨克斯坦)** 实数 A 给定，求最大的实数 M 使得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{A}{x+y}\geqslant\frac{M}{\sqrt{xy}}$$

对 $x,y>0$ 恒成立．

解答. 由于不等式两边都是齐次的，所以不妨设 $xy=1$，$x+y=t$，那么由均值不等式有 $t=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=2$．问题转化为，对于给定的实数 A，求最大的 M，使得对任意的 $t\geqslant 2$ 都有 $t+\dfrac{A}{t}\geqslant M$．

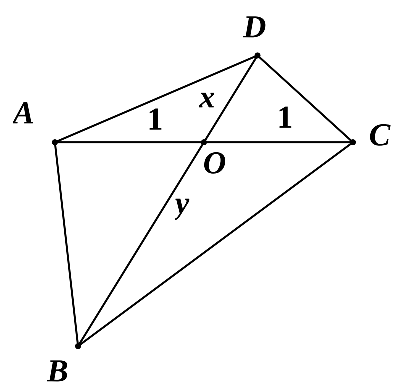
设 $f(x)=x+\dfrac{A}{x}$，那么有 $f'(x)=1-\dfrac{A}{x^2}$．

(a) 当 $A\leqslant 4$ 时，此时对$t\geqslant 2$，恒有 $f'(t)=1-\dfrac{A}{t^2}\geqslant 1-\dfrac{4}{t^2}\geqslant 0$．因此，此时 $f(t)$ 在 $t\geqslant 2$ 的最小值为 $f(2)=2+\dfrac{A}{2}$，从而，M 的最大值为 $2+\dfrac{A}{2}$．

(b) 当$A>4$时，此时易得 $f(t)$ 在 $\left[2,\sqrt{A}\right)$ 上递减，在 $\left[\sqrt{A},+\infty\right)$ 上递增，所以 $f(t)$ 在 $t\geqslant 2$ 的最小值为 $f\left(\sqrt{A}\right)=2\sqrt{A}$，从而，$M$ 的最大值为 $2\sqrt{A}$． ■

14. (哈萨克斯坦) 已知 $x,y\geqslant 0$，求证：

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geqslant 2(x+y)\,.$$



证明. 如图所示，设 $AO=OC=1$，$OD=x$，$OB=y$，$\angle AOD=120^\circ$，那么由余弦定理

$$AD=\sqrt{x^2+x+1}\,,\quad CD=\sqrt{x^2-x+1}\,,$$
$$AB=\sqrt{y^2-y+1}\,,\quad CB=\sqrt{y^2+y+1}\,.$$

由Ptolemy不等式，我们有

$$AD\times BC+CD\times BA\geqslant AC\times BD\,,$$

即

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geqslant 2(x+y).$$

■

15. **(瑞士)** 已知 $x,y,z>0$，且 $xyz=1$，求证：

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geqslant x+y+z\,.$$

证明. 首先，由均值不等式有

$$x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}=3\,.$$

其次，由均值不等式有

$$\begin{aligned}\frac{(x+y-1)^2}{z}+z\geqslant 2(x+y-1)\,,\\ \frac{(y+z-1)^2}{x}+x\geqslant 2(y+z-1)\,,\\ \frac{(z+x-1)^2}{y}+y\geqslant 2(z+x-1)\,.\end{aligned}$$

将上面三个式子相加，利用 $x+y+z\geqslant 3$，得

$$\begin{aligned}&\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}+x+y+z\\ \geqslant&2(x+y-1)+2(y+z-1)+2(z+x-1)\\ =&2(x+y+z)+2(x+y+z-3)\\ \geqslant&2(x+y+z)\,.\end{aligned}$$

即

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geqslant x+y+z.$$

■

16. **(土耳其)** 已知 $a,b,c>0$，求证：

$$\sum_{cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\leqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\,.$$

证明. 先证明

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\leqslant\frac{a^2+b^2}{a+b}\,,\tag{7}$$

事实上，由于

$$
\begin{aligned}
&(a^2-ab+b^2)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\\
\leqslant&\left(\frac{(a^2-ab+b^2)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{3}\right)^3\\
\leqslant&\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3
\end{aligned}
$$

知 (7) 成立，同理可得

$$
\sqrt[4]{\frac{(b^2+c^2)(b^2-bc+c^2)}{2}}\leqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}\,,
$$

$$
\sqrt[4]{\frac{(c^2+a^2)(c^2-ca+a^2)}{2}}\leqslant\frac{c^2+a^2}{c+a}\,.
$$

于是只需要证明

$$
\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\leqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\,.
$$

为此，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，那么

$$
\begin{aligned}
&a^2+b^2\geqslant c^2+a^2\geqslant b^2+c^2\,,\\
&\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{c+a}\leqslant\frac{1}{b+c}\,.
\end{aligned}
$$

由Chebyshev不等式知

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}&\leqslant\frac{1}{3}\sum(a^2+b^2)\sum\frac{1}{a+b}\\
&=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\,.
\end{aligned}
$$

■

17. **(土耳其)** 正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1a_2\cdots a_n=1$，求证：

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i}\,.
$$

证明. 注意到 $x^4+3\geqslant 2x^2+2=(1+1)(1+x^2)\geqslant(1+x)^2$，及

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}=n\,,$$

因此只需要证明更强的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}+n\geqslant 4\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+a_i}\,. \tag{8}$$

注意到 $\dfrac{a_i}{1+a_i}=1-\dfrac{1}{1+a_i}$，所以 (8) 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+a_i}{a_i}+\frac{4}{1+a_i}\right)\geqslant 4n\,. \tag{9}$$

由均值不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+a_i}{a_i}+\frac{4}{1+a_i}\right)\geqslant 2n\sqrt[2n]{\frac{4^n}{a_1a_2\cdots a_n}}=4n\,,$$

即得 (9)，于是不等式得证． ■

18. (美国) 正实数 a,b,c 满足 $abc=1$．求证：

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

证明. 由于 $abc=1$，所以

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}=\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}\,,$$
$$\frac{1}{b^5(c+2a)^2}=\frac{c^3a^3}{(bc+2ba)^2}\,,$$
$$\frac{1}{c^5(a+2b)^2}=\frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2}\,,$$

所以只需要证明

$$\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}+\frac{c^3a^3}{(bc+2ba)^2}+\frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2}\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

又由于均值不等式

$$\begin{aligned}&\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}+\frac{ab+2ac}{27}+\frac{ab+2ac}{27}\\ \geqslant&3\sqrt[3]{\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}\cdot\frac{ab+2ac}{27}\cdot\frac{ab+2ac}{27}}=\frac{1}{3}bc\,,\\ \Longrightarrow&\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}\geqslant\frac{1}{3}bc-\frac{2ab+4ac}{27}\,,\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\frac{c^3a^3}{(bc+2ac)^2}&\geqslant\frac{1}{3}ca-\frac{2bc+4ba}{27}\,,\\ \frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2}&\geqslant\frac{1}{3}ab-\frac{2ca+4cb}{27}\,.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2}+\frac{c^3a^3}{(bc+2ba)^2}+\frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2}\\ \geqslant&\frac{1}{3}(bc+ca+ab)-\frac{2}{27}(ab+bc+ca)-\frac{4}{27}(ac+ba+cb)\\ =&\frac{1}{9}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{1}{9}\cdot3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}=\frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

■

19. (美国) 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，求证：

$$\frac{AP}{h_b+h_c}+\frac{BP}{h_c+h_a}+\frac{CP}{h_a+h_b}\geqslant1\,.$$

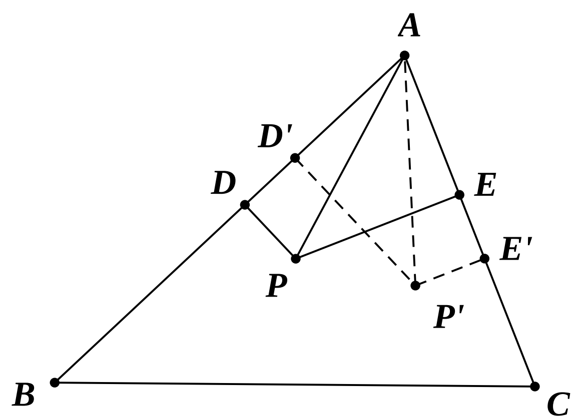
证明. 引理：若 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，P 到边 AB，AC 两边的距离分别为 x，y，那么有 $AP\cdot a\geqslant cx+by$，$AP\cdot a\geqslant bx+cy$.

引理的证明：如图所示，由于

$$AP\cdot a\geqslant2S_{\text{四边形}ABPC}=2\left(S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ACP}\right)=cx+by\,.$$

另外，作 P 关于角 A 的平分线的对称点 P'，那么 P' 到边 AB，AC 两边的距离分别为 y，x，且 $AP=AP'$. 于是再用一次刚才证明的结论就可得 $AP\cdot a\geqslant bx+cy$. 于是引理得证 .

回到原题，设 P 到 BC,CA,AB 的距离分别为 p,q,r，$\triangle ABC$ 面积为 S，那么



由引理可得 $AP \cdot a \geqslant cq + br$，$AP \cdot a \geqslant bq + cr$．于是 $AP \geqslant \dfrac{(b+c)(q+r)}{2a}$．所以

$$\frac{AP}{h_b + h_c} \geqslant \frac{(b+c)(q+r)}{2a(h_b+h_c)} = \frac{bc(q+r)}{4aS}.$$

同理可得其他两个式子，然后三式相加即得

$$\sum_{cyc} \frac{AP}{h_b+h_c} \geqslant \sum_{cyc} \frac{bc(q+r)}{4aS}.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{bc(q+r)}{4aS} + \frac{ca(r+p)}{4bS} + \frac{ab(p+q)}{4cS} \\
=&\frac{1}{4}\left(\frac{bc}{aS} + \frac{ac}{bS}\right) r + \frac{1}{4}\left(\frac{ca}{bS} + \frac{ba}{cS}\right) p + \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{cS} + \frac{cb}{aS}\right) q \\
\geqslant&\frac{c}{2S} r + \frac{a}{2S} p + \frac{b}{2S} q = \frac{ap+bq+cr}{2S} = 1.
\end{aligned}$$

于是不等式得证． ■

注记. 这个引理源自厄尔多斯-莫德尔不等式的证明．另外，运用这个引理能解决如下的2000年美国数学奥林匹克IMO国家队选拔试题：已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，其外接圆半径为 R，求证：

$$\frac{AP}{BC^2} + \frac{BP}{CA^2} + \frac{CP}{AB^2} \geqslant \frac{1}{R}.$$

■

证明. 运用引理，我们有 $AP\cdot a\geqslant br+cq$，所以 $\dfrac{AP}{BC^2}\geqslant\dfrac{br+cq}{a^3}$．同理可得

$$\frac{BP}{CA^2}\geqslant\frac{cp+ar}{b^3}\,,\quad \frac{CP}{AB^2}\geqslant\frac{aq+bp}{c^3}\,.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{AP}{BC^2}+\frac{BP}{CA^2}+\frac{CP}{AB^2}\geqslant&\frac{br+cq}{a^3}+\frac{cp+ar}{b^3}+\frac{aq+bp}{c^3}\\=&\left(\frac{b}{a^3}+\frac{a}{b^3}\right)r+\left(\frac{b}{c^3}+\frac{c}{b^3}\right)p+\left(\frac{c}{a^3}+\frac{a}{c^3}\right)q\\\geqslant&\frac{2r}{ab}+\frac{2p}{bc}+\frac{2q}{ca}=\frac{2(ap+bq+cr)}{abc}\\=&\frac{4S}{abc}=\frac{1}{R}\,.\end{aligned}$$

■

20. (巴尔干) 已知 $a,b,c>0$，求证：

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geqslant 0\,.$$

证明. 对不等式作变形可知

$$\begin{aligned}&\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geqslant 0\\\Longleftrightarrow&a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geqslant a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3\,.\end{aligned}$$

注意到，由均值不等式有

$$\begin{aligned}a^3b^3+a^3b^3+c^3a^3&\geqslant 3a^3b^2c\,,\\b^3c^3+b^3c^3+a^3b^3&\geqslant 3ab^3c^2\,,\\c^3a^3+c^3a^3+b^3c^3&\geqslant 3a^2bc^3\,.\end{aligned}$$

如上三式相加，再两边除以三即得

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geqslant a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3\,.$$

■

21. (中欧) 对任意给定的整数 $n\geqslant 2$，求最大的 C_n 使得对任意的正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都有

$$\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2+C_n(a_1-a_n)^2\,.$$

证明. 取$a_1 = 3$, $a_2 = \cdots = a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$, 易得 $C_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$. 如果我们能证明对任意的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都有

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n}(a_1 - a_n)^2,$$

那么要求的最大的 $C_n = \dfrac{1}{2n}$.

注意到恒等式

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} - \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2}{n^2}, \tag{10}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2 \geqslant &(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \cdots + (a_1 - a_{n-1})^2 + (a_1 - a_n)^2 \\ &+(a_2 - a_n)^2 + (a_3 - a_n)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2 \\ &= \sum_{k=2}^{n-1}[(a_1 - a_k)^2 + (a_k - a_n)^2] + (a_1 - a_n)^2 \\ &\geqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{(a_1 - a_n)^2}{2} + (a_1 - a_n)^2 = \frac{n(a_1 - a_n)^2}{2}.\end{aligned}$$

其中用到的

$$(a_1 - a_k)^2 + (a_k - a_n)^2 \geqslant \frac{(a_1 - a_n)^2}{2}$$

可由Cauchy不等式得到.

于是由 (10) 知

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} - \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \geqslant \frac{(a_1 - a_n)^2}{2n},$$

即

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + \frac{1}{2n}(a_1 - a_n)^2,$$

所以所要求的最大的 $C_n = \dfrac{1}{2n}$. ∎

22. **(地中海)** 已知 $n > 2$, 正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 求证:

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2},$$

并求等号成立条件.

解答. 我们先证明 $n=3$ 时，不等式成立，即

$$\frac{a_2a_3}{a_1+1}+\frac{a_3a_1}{a_2+1}+\frac{a_1a_2}{a_3+1}\leqslant\frac{1}{4}\,.$$

由条件 $a_1+a_2+a_3=1$，上式等价于

$$\frac{a_2a_3}{2a_1+a_2+a_3}+\frac{a_3a_1}{a_1+2a_2+a_3}+\frac{a_1a_2}{a_1+a_2+2a_3}\leqslant\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)\,.$$

由均值不等式

$$\frac{a_2a_3}{2a_1+a_2+a_3}=\frac{a_2a_3}{(a_1+a_2)+(a_1+a_3)}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a_2a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_2a_3}{a_1+a_3}\right).$$

同理可得

$$\frac{a_3a_1}{a_2+1}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a_3a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_3a_1}{a_2+a_1}\right),\frac{a_1a_2}{a_3+1}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{a_1a_2}{a_3+a_1}+\frac{a_1a_2}{a_3+a_2}\right)\,.$$

于是上述三式相加得

$$\frac{a_2a_3}{a_1+1}+\frac{a_3a_1}{a_2+1}+\frac{a_1a_2}{a_3+1}\leqslant\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)\,.$$

易知等号成立当且仅当 $a_1=a_2=a_3$.

再证明，当 $n\geqslant 4$ 时，恒有

$$\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_1+n-2}+\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2+n-2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{a_n+n-2}<\frac{1}{(n-1)^2}\,.$$

注意到

$$a_2a_3\cdots a_n\leqslant\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}<\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\,.$$

同理

$$a_1a_3\cdots a_n<\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}<\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\,.$$

所以

$$\frac{a_2a_3\cdots a_n}{a_1+n-2}+\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2+n-2}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{a_n+n-2}<\frac{n}{n-2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\,.$$

于是只需证

$$\frac{n}{n-2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\frac{1}{(n-1)^2},$$

由 $n>4$，只需证

$$\frac{n}{n-2}\cdot\frac{1}{n-1}<1 \Longleftrightarrow (n-1)(n-2)>n\,.$$

明显成立． ■

23. **(新加坡)** 设 $a_1\geqslant 1$，对任意的 $k=1,2,\cdots,n$ 成立 $a_{k+1}\geqslant a_k+1$．求证：

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\,.$$

证明. 我们里用数学归纳法来证明这个问题．

当 $n=1$ 时，由 $a_1\geqslant 1$ 知，此时不等式成立．

假设当 $n=k$ 时，不等式也成立，即

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2\,. \tag{11}$$

那么当 $n=k+1$ 时，由归纳假设即不等式 (11)，只需要证明

$$a_{k+1}^3\geqslant 2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}^2\,.$$

由已知条件可知

$$\begin{aligned}&2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}^2\\ \leqslant&2a_{k+1}((a_{k+1}-k)+(a_{k+1}-(k-1))+\cdots+(a_{k+1}-1))+a_{k+1}^2\\ =&(2k+1)a_{k+1}^2-k(k+1)a_{k+1}\,.\end{aligned}$$

因此只要证明 $a_{k+1}^3\geqslant(2k+1)a_{k+1}^2-k(k+1)a_{k+1}$，这等价于

$$a_{k+1}(a_{k+1}-k)(a_{k+1}-(k+1))\geqslant 0\,,$$

这由 $a_{k+1}\geqslant k+1$ 知成立． ■

24. **(北方)** 设正实数 a,b,c 满足 $(a+2b)(b+2c)=9$．求证：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}\geqslant 3\,.$$

证明. 由幂平均不等式，可得

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geqslant \frac{b+c}{2},$$

所以

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} + 2\frac{b+c}{2}.$$

又由于 $\frac{a+b}{2} + 2\frac{b+c}{2} = \frac{(a+2b)+(b+2c)}{2} \geqslant \sqrt{(a+2b)(b+2c)} = 3$，所以

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geqslant 3.$$

■

25. (北方) 设 $x, y, z \in [0,1]$，$|x-y| \leqslant \frac{1}{2}$，$|z-y| \leqslant \frac{1}{2}$，$|x-z| \leqslant \frac{1}{2}$，求

$$W(x,y,z) = x+y+z-xy-yz-zx$$

的最大值和最小值．

解答. 注意到 $x, y, z \in [0,1]$，所以 $W = x(1-y)+y(1-z)+z(1-x) \geqslant 0$．又令 $x=y=z=0$，此时 $W=0$，故 $W_{\min}=0$．

下面求$W_{\max}$，注意到 $W(x,y,z) = W(1-x,1-y,1-z)$，因此总可以假设 x,y,z 中至少有两者不小于 $\frac{1}{2}$．于是不妨设$x \leqslant y \leqslant z$，那么由已知条件可得

$$z - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1, \quad \frac{1}{2} \leqslant y.$$

固定 y, z 将 W 看成 x 的函数，由 $1-y-z \leqslant 0$，可得

$$\begin{aligned} W &= x+y+z-xy-yz-zx \\ &= x(1-y-z)+y+z-yz \\ &\leqslant \left(z-\frac{1}{2}\right)(1-y-z)+y+z-yz. \end{aligned}$$

将放缩出来的结果用同样的方法来处理 y，即

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)(1-y-z)+y+z-yz = y\left(\frac{3}{2}-2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}.$$

如果 $z \geqslant \frac{3}{4}$，此时 $\frac{3}{2} - 2z \leqslant 0$，所以

$$\begin{aligned} y\left(\frac{3}{2}-2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \leqslant & \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \\ =& -z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{4} \\ =& -\left(z-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{13}{16} \leqslant \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

如果 $z < \frac{3}{4}$，此时 $\frac{3}{2} - 2z > 0$，所以

$$\begin{aligned} y\left(\frac{3}{2}-2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \leqslant & z\left(\frac{3}{2}-2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \\ =& -3z^2 + 4z - \frac{1}{2} \\ =& -3\left(z-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \leqslant \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{13}{16} < \frac{5}{6}$，且当 $x = \frac{1}{6}$，$y = z = \frac{2}{3}$ 时 $W = \frac{5}{6}$，所以 $W_{\max} = \frac{5}{6}$. ■

26. (东南) 设 n 为正整数，实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, r_1, r_2, \cdots, r_n$ 满足：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \quad 和 \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n,$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \min(r_i, r_j) \geqslant 0.$$

解答. 注意到在 $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n$ 时恒等式

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \min(r_i, r_j) \\ =&(r_n - r_{n-1})a_n^2 + (r_{n-1} - r_{n-2})(a_n + a_{n-1})^2 + \cdots \\ &+ (r_2 - r_1)(a_n + \cdots + a_2)^2 + r_1(a_n + \cdots + a_2 + a_1)^2. \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \min(r_i, r_j) \geqslant 0.$$

■

27. (女子) 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, $n \geqslant 2$, 令 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} i x_i^2$. 求证:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{S}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} \leqslant \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k},$$

并求等号成立条件.

证明. 先对不等式的左边作恒等变形

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{S}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} - 2\frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{S^2}\sum_{k=1}^{n} k x_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} - 2\frac{1}{S} + \frac{S}{S^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{S}.\end{aligned}$$

等价于证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{S} \leqslant \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k}$, 即 $\frac{4n}{(n+1)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{S}$.
事实上, 由于对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 都有 $i + \frac{n}{i} \leqslant n+1$, 因此

$$n\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} + \sum_{i=1}^{n} i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(i+\frac{n}{i}\right) x_i^2 \leqslant (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n+1.$$

又由均值不等式

$$S\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} \leqslant \frac{1}{4n}\left(n\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} + \sum_{i=1}^{n} i x_i^2\right)^2 \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n},$$

于是不等式得证. 注意到 $i + \frac{n}{i} \leqslant n+1$, 等号成立, 当且仅当 $i = 1, n$. 由此容易分析得等号成立当且仅当 $x_1^2 = x_n^2 = \frac{1}{2}$, 其余的 x_i 都为 0. ■

28. (西部数学奥林匹克) 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 同时满足如下条件:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} i(a_i-b_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} i^2(a_i+b_i) = 10.$$

求证: 对任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都有 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \frac{10}{10+k^2}$.

证明. 由利用已知条件有

$$(ka_k)^2 = \left(\sum_{i \neq k} i(b_i - a_i) + kb_k\right)^2 = \left(\sum_{i \neq k} ib_i - \sum_{i \neq k} ia_i + kb_k\right)^2.$$

由Cauchy不等式得

$$\left(\sum_{i\neq k} ib_i - \sum_{i\neq k} ia_i + kb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i\neq k} i^2 b_i + \sum_{i\neq k} i^2 a_i + k^2 b_k\right)\left(\sum_{i\neq k} b_i + \sum_{i\neq k} a_i + b_k\right)$$

因此 $k^2a_k^2 \leqslant (10-k^2a_k)(1-a_k) = 10 - 10a_k - k^2a_k + k^2a_k^2$. 由此可得

$$10 \geqslant (10+k^2)a_k\,, \quad \Longrightarrow \quad a_k \leqslant \frac{10}{10+k^2}\,.$$

同理可得 $b_k \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$, 因此 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$. ■

29. **(联赛)** 给定正整数 $n > 2$, 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_k \leqslant 1, k = 1, 2, \cdots, n$. 记

$$A_k = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n\,.$$

求证 :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} A_i\right| < \frac{n-1}{2}\,.$$

证明. 由 $0 < a_k \leqslant 1$ 知 , 对 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, 有

$$0 < \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant k, \quad 0 < \sum_{i=k+1}^{n} a_i \leqslant n-k\,.$$

注意到当 $x, y > 0$ 时 , $|x-y| < \max\{x, y\}$, 于是对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, 有

$$\begin{aligned} |A_n - A_k| &= \left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |A_n - A_k| &< \max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n} a_i, \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} \\ &\leqslant \max\left\{\frac{1}{n}(n-k), \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)k\right\} \\ &= 1 - \frac{k}{n}\,. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i-\sum_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|nA_n-\sum_{k=1}^{n} A_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n-1}(A_n-A_k)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}|A_n-A_k| \\ &< \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}\,.\end{aligned}$$

■

30. **(集训队)** 给定正整数 $n \geqslant 2$ 和正实数 a，正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$．求最小的实数 $M = M(n, a)$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a+S-x_i} \leqslant M$$

恒成立，其中 $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$．

解答. 令 $x_i = y_i^n$，$y_i > 0$，于是 $y_1 y_2 \cdots y_n = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$．由幂平均及均值不等式我们有

$$S-x_i=\sum_{j\neq i} y_j^n \geqslant (n-1)\left(\frac{\sum_{j\neq i} y_j}{n-1}\right)^n \geqslant (n-1)\left(\frac{\sum_{j\neq i} y_j}{n-1}\right)\prod_{j\neq i} y_j=\frac{\sum_{j\neq i} y_j}{y_i}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a+S-x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{a y_i+\sum\limits_{j\neq i}^{n} y_j}\,. \tag{12}$$

当 $a = 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{a y_i+\sum\limits_{j\neq i}^{n} y_j}=\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j}=1\,,$$

且当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a+S-x_i}=1\,,$$

故此时 $M=1$.

当 $a>1$ 时，令 $z_i=\dfrac{y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}$, $i=1,2,\cdots,n$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i=1$.

$$\frac{y_i}{ay_i+\sum\limits_{j\neq i}^{n} y_j}=\frac{z_i}{(a-1)z_i+1}=\frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right) . \tag{13}$$

由柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}((a-1)z_i+1)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right)\geqslant n^2 .$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}((a-1)z_i+1)=a-1+n ,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a-1)z_i+1}\geqslant\frac{n^2}{a-1+n} . \tag{14}$$

结合 (12)(13)(14) , 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}&\leqslant\frac{1}{a-1}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(a-1)z_i+1}\right)\\&\leqslant\frac{n}{a-1}-\frac{1}{a-1}\cdot\frac{n^2}{a-1+n}\\&=\frac{n}{a-1+n} .\end{aligned}$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}=\frac{n}{a-1+n} ,$$

故此时 $M=\dfrac{n}{a-1+n}$.

当 $a<1$ 时, 由 (12) 可知

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{ay_i+\sum\limits_{j\neq i}^{n} y_j}<\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{ay_i+a\sum\limits_{j\neq i}^{n} y_j}=\frac{1}{a} .$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\varepsilon\longrightarrow 0^+$, $x_n=\varepsilon^{1-n}\longrightarrow+\infty$ 时，

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+S-x_i}=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0^+}\left(\frac{n-1}{a+\varepsilon^{1-n}}+\frac{1}{a+(n-1)\varepsilon}\right)=\frac{1}{a} ,$$

故 $M = \dfrac{1}{a}$.

综上所述，

$$M = \begin{cases} \dfrac{n}{a-1+n} & \text{若} a \geqslant 1\text{，} \\ \dfrac{1}{a} & \text{若} 0 < a < 1\text{.} \end{cases}$$

■

注记. 因为方法和走向IMO一样，直接抄书了. ■