2010 年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准（A 卷）

说明：

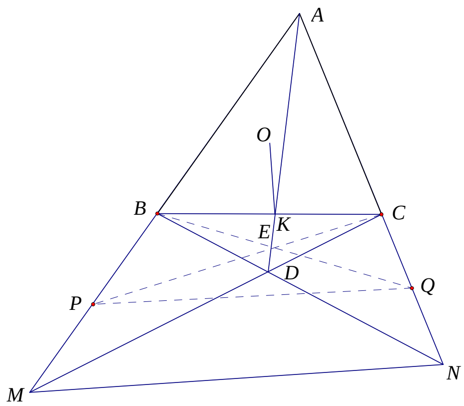
1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、（本题满分 40 分）

如图，锐角三角形 ABC 的外心为 O，K 是边 BC 上一点（不是边 BC 的中点），D 是线段 AK 延长线上一点，直线 BD 与 AC 交于点 N，直线 CD 与 AB 交于点 M. 求证：若 $OK\perp MN$，则 A，B，D，C 四点共圆.

证明：用反证法．若 A，B，D，C 不四点共圆，设三角形 ABC 的外接圆与 AD 交于点 E，连接 BE 并延长交直线 AN 于点 Q，连接 CE 并延长交直线 AM 于点 P，连接 PQ.



因为 $PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）

$$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

同理
$$QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

所以
$$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故
$$OK\perp PQ.$$
（10 分）

由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ /\!/ MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \qquad ①$$

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \qquad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \qquad ③$$

由①，②，③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$
（30 分）

所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$，故△$DMN$ ∽ △DCB，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC /\!/ MN$，故 $OK\perp BC$，即 K 为 BC 的中点，矛盾！从而 A,B,D,C 四点共圆. （40 分）

注 1："$PK^2=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）"的证明：延长 PK 至点 F，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE,\qquad ④$$

则 P，E，F，A 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

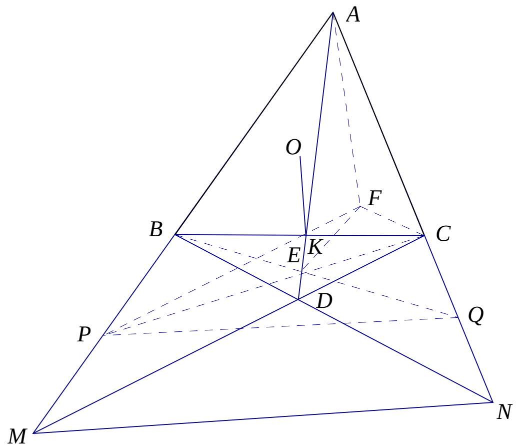
从而 E，C，F，K 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC,\qquad ⑤$$

⑤-④，得 $\quad PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE$

$=P$ 的幂（关于⊙O）$+K$ 的幂（关于⊙O）.

注 2：若点 E 在线段 AD 的延长线上，完全类似.



二、（**本题满分 40 分**）

设 k 是给定的正整数，$r=k+\dfrac{1}{2}$. 记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)),\ l\ge 2$. 证明：存在正整数 m，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数. 这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数，例如：$\left\lceil \dfrac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$.

证明：记 $v_2(n)$ 表示正整数 n 所含的 2 的幂次. 则当 $m=v_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数.

下面我们对 $v_2(k)=v$ 用数学归纳法.

当 $v=0$ 时，k 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时 $f(r)=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left\lceil k+\dfrac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)(k+1)$ 为整数. （10 分）

假设命题对 $v-1(v\ge 1)$ 成立.

对于 $v\ge 1$，设 k 的二进制表示具有形式

$$k=2^v+\alpha_{v+1}\cdot 2^{v+1}+\alpha_{v+2}\cdot 2^{v+2}+\cdots,$$

这里，$\alpha_i=0$或者 1，$i=v+1,\ v+2,\cdots$.　　（20 分)

于是　　$$f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+k^2+k$$

$$=\frac{1}{2}+2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^{v}+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$$

$$=k'+\frac{1}{2}, \qquad ①$$

这里$k'=2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^{v}+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$. 显然$k'$中所含的 2 的幂次为$v-1$. 故由归纳假设知，$r'=k'+\frac{1}{2}$经过$f$的$v$次迭代得到整数，由①知，$f^{(v+1)}(r)$是一个整数，这就完成了归纳证明.　　（40 分）

三、（本题满分 50 分）

给定整数$n>2$，设正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_k\le 1,\ k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},\ k=1,2,\cdots,n.$$

求证：　　$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}.$$

证明：由$0<a_k\le 1$知，对$1\le k\le n-1$，有

$$0<\sum_{i=1}^{k}a_i\le k,\qquad 0<\sum_{i=k+1}^{n}a_i\le n-k. \qquad （10 分）$$

注意到当$x,y>0$时，有$|x-y|<\max\{x,y\}$，于是对$1\le k\le n-1$，有

$$|A_n-A_k|=\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

$$<\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i,\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right\}$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}$$

$$=1-\frac{k}{n},$$ （30 分）

故 $$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|=\left|nA_n-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(A_n-A_k\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}\left|A_n-A_k\right|$$

$$<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}.$$ （50 分）

四、（本题满分 50 分）

一种密码锁的密码设置是在正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

解：对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上 a，如果颜色不同，则标上 b，如果数字和颜色都相同，则标上 c．于是对于给定的点 A_1 上的设置（共有 4 种），按照边上的字母可以依次确定点 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 上的设置．为了使得最终回到 A_1 时的设置与初始时相同，标有 a 和 b 的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记 a，b，c，使得标有 a 和 b 的边都是偶数条的方法数的 4 倍． （20 分）

设标有 a 的边有 $2i$ 条，$0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$，标有 b 的边有 $2j$ 条，$0\le j\le\left[\frac{n-2i}{2}\right]$．选取 $2i$ 条边标记 a 的有 C_n^{2i} 种方法，在余下的边中取出 $2j$ 条边标记 b 的有 C_{n-2i}^{2j} 种方法，其余的边标记 c．由乘法原理，此时共有 $C_n^{2i}\ C_{n-2i}^{2j}$ 种标记方法．对 i，j 求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]}C_{n-2i}^{2j}\right). \qquad ①$$

这里我们约定 $C_0^0=1$． （30 分）

当 n 为奇数时，$n-2i>0$，此时

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j} = 2^{n-2i-1}. \qquad ②$$

代入①式中，得

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}\right) = 4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right) = 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}(-1)^k = (2+1)^n + (2-1)^n$$

$$=3^n+1.$$ （40 分）

当 n 为偶数时，若 $i<\frac{n}{2}$，则②式仍然成立；若 $i=\frac{n}{2}$，则正 n 边形的所有边都标记 a，此时只有一种标记方法．于是，当 n 为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}\right) = 4\times\left(1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)\right)$$

$$=2+4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=3^n+3.$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当 n 为奇数时有 3^n+1 种；当 n 为偶数时有 3^n+3 种． （50 分）