# 2010 年全国高中数学联合竞赛一试
# 试题参考答案及评分标准（A 卷）

说明：

**1.** 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

**2.** 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是 $\underline{[-3,\sqrt{3}]}$.

解：易知 $f(x)$ 的定义域是 $\left[5,8\right]$，且 $f(x)$ 在 $\left[5,8\right]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 $-3$，则实数 $a$ 的取值范围是 $\underline{-\frac{3}{2}\le a\le 12}$.

解：令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$，即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $-at^3+(a-3)t\ge -3$，

$$-at(t^2-1)-3(t-1)\ge 0,$$

$(t-1)(-at(t+1)-3)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知

$-at(t+1)-3\le 0$ 即 $a(t^2+t)\ge -3$. （1）

当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；

对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$.

从而可知 $-\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是 $\underline{1790}$.

解：由对称性知，只要先考虑 $x$ 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,9)$ 与双曲线右半支于 $A_k$，交直

线 $x=100$ 于 $B_k$，则线段 $A_kB_k$ 内部的整点的个数为 $99-k$，从而在 $x$ 轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{9}(99-k)=99\times 9-45=846.$$

又 $x$ 轴上有 98 个整点，所以所求整点的个数为

$$2\times 846+98=1790.$$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 $0$ 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$，且存在常数 $\alpha, \beta$ 使得对每一个正整数 $n$ 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ $\underline{\sqrt[3]{3}+3}$.

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d, \{b_n\}$ 的公比为 $q$，则

$3+d=q,$ （1）

$3(3+4d)=q^2$，（2）

（1）代入（2）得

$9+12d=d^2+6d+9$，求得 $d=6, q=9$.

从而有 $3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$ 对一切正整数 $n$ 都成立，

即 $6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$ 对一切正整数 $n$ 都成立.

从而 $\log_\alpha 9=6, -3=-\log_\alpha 9+\beta$，

求得 $\alpha=\sqrt[3]{3}, \beta=3$， $\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0, a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 $\underline{-\frac{1}{4}}$ .

解：令 $a^x=y,$ 则原函数化为 $g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$ 在 $(-\frac{3}{2},+\infty)$ 上是递增的.

当 $0<a<1$ 时，$y\in[a, a^{-1}]$，

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以 $g(y)_{\min}=(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4}$；

当 $a>1$ 时，$y\in[a^{-1}, a]$，

$$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2,$$

所以 $g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\dfrac{1}{4}$.

综上 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最小值为 $-\dfrac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 $\underline{\dfrac{84}{119}}$.

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

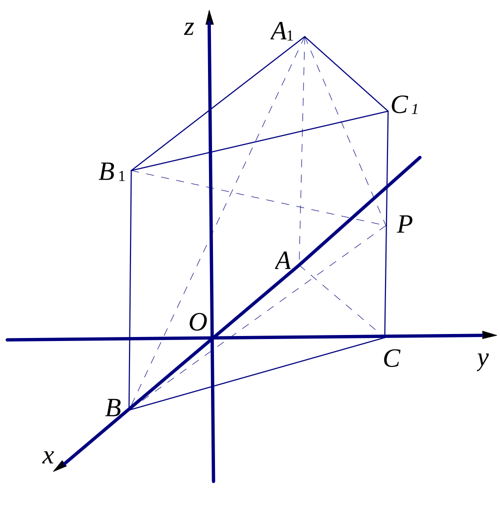
$$\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^2\times\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^4\times\frac{7}{12}+\cdots$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{84}{119}.$$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，$P$ 是 $CC_1$ 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{4}}$ .

解一：如图，以 $AB$ 所在直线为 $x$ 轴，线段 $AB$ 中点 $O$ 为原点，$OC$ 所在直线为 $y$ 轴，建立空间直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0),B_1(1,0,2),A_1(-1,0,2),P(0,\sqrt{3},1)$，从而，

$$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1),\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0),\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1).$$

设分别与平面 $BA_1P$ 、平面 $B_1A_1P$ 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则




$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$$

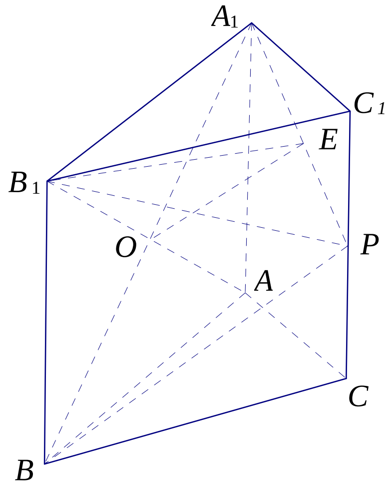
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$$

由此可设 $\vec{m}=(1,0,1),\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|=\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\left|\cos\alpha\right|$，

即 $\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2\left|\cos\alpha\right|\Rightarrow\left|\cos\alpha\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.




解二：如图，$PC=PC_1, PA_1=PB$ .

设 $A_1B$ 与 $AB_1$ 交于点 $O$, 则

$OA_1=OB, OA=OB_1, A_1B\perp AB_1$ .

因为 $PA=PB_1$,所以 $PO\perp AB_1$,

从而 $AB_1\perp$平面$PA_1B$ .

过$O$在平面$PA_1B$上作$OE\perp A_1P$，垂足为$E$.

连结$B_1E$，则$\angle B_1EO$为二面角$B-A_1P-B_1$的平面角.

设$AA_1=2$，则易求得

$PB=PA_1=\sqrt{5}, A_1O=B_1O=\sqrt{2}, PO=\sqrt{3}$.

在直角$\Delta PA_1O$中，$A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，

即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE, \therefore OE=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}, \therefore B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\dfrac{6}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\frac{B_1O}{B_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

8. 方程$x+y+z=2010$满足$x\le y\le z$的正整数解（$x, y, z$）的个数是<u>336675</u>.

解：首先易知$x+y+z=2010$的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times1004$.

把$x+y+z=2010$满足$x\le y\le z$的正整数解分为三类：

（1） $x,y,z$均相等的正整数解的个数显然为1；
（2） $x,y,z$中有且仅有2个相等的正整数解的个数，易知为1003；

(3)设$x,y,z$两两均不相等的正整数解为$k$.

易知 $1+3\times1003+6k=2009\times1004$，

$$6k = 2009\times 1004 - 3\times 1003 - 1$$
$$= 2006\times 1005 - 2009 + 3\times 2 - 1 = 2006\times 1005 - 2004,$$
$$k = 1003\times 335 - 334 = 335671.$$

从而满足 $x \le y \le z$ 的正整数解的个数为

$$1 + 1003 + 335671 = 336675.$$

二、解答题（本题满分 56 分）

9. （本小题满分 16 分）已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \ne 0)$，当 $0 \le x \le 1$ 时，$\left|f'(x)\right| \le 1$，试求 $a$ 的最大值.

解一： $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$

由 $\begin{cases} f'(0) = c, \\ f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a + b + c, \\ f'(1) = 3a + 2b + c \end{cases}$ 得 （4 分）

$$3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2}).$$ （8 分）

所以 $3|a| = \left|2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2})\right|$

$$\le 2\left|f'(0)\right| + 2\left|f'(1)\right| + 4\left|f'(\frac{1}{2})\right|$$

$$\le 8,$$

$$a \le \frac{8}{3}.$$ （12 分）

又易知当 $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 $a$ 最大值为 $\frac{8}{3}$.（16 分）

解二： $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

设 $g(x) = f'(x) + 1$，则当 $0 \le x \le 1$ 时， $0 \le g(x) \le 2$.

设 $z = 2x - 1$，则 $x = \frac{z+1}{2}, -1 \le z \le 1.$

$$h(z) = g(\frac{z+1}{2}) = \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a+2b}{2}z + \frac{3a}{4} + b + c + 1.$$ （4 分）

容易知道当 $-1 \le z \le 1$ 时，$0 \le h(z) \le 2, 0 \le h(-z) \le 2$. （8 分）

从而当 $-1 \le z \le 1$ 时， $0 \le \frac{h(z) + h(-z)}{2} \le 2$ ，

即 $0 \le \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a}{4} + b + c + 1 \le 2$，

从而 $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge 0$, $\dfrac{3a}{4}z^2\le 2$，

由 $0\le z^2\le 1$ 知 $a\le\dfrac{8}{3}$. （12 分）

又易知当 $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 $a$ 最大值为 $\dfrac{8}{3}$.（16 分）

10.（本小题满分 20 分）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)和B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\ne x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 $AB$ 的垂直平分线与 $x$ 轴交于点 $C$，求 $\Delta ABC$ 面积的最大值.

解一：设线段 $AB$ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2, y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}.$$

线段 $AB$ 的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2). \tag{1}$$

易知 $x=5, y=0$ 是（1）的一个解，所以线段 $AB$ 的垂直平分线与 $x$ 轴的交点 $C$ 为定点，且点 $C$ 坐标为 $(5,0)$. （5 分）

由（1）知直线 $AB$ 的方程为

$$y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)，即 \quad x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2. \tag{2}$$

（2）代入 $y^2=6x$ 得

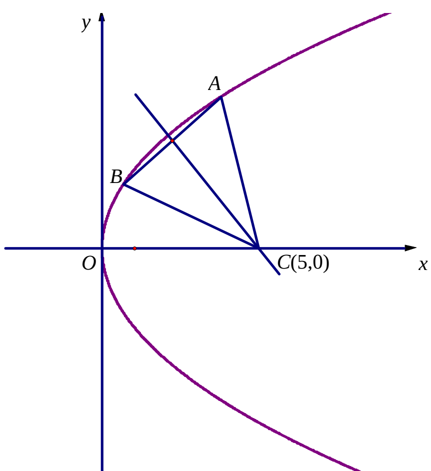
$$y^2=2y_0(y-y_0)+12，即 \quad y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0. \tag{3}$$

依题意，$y_1,y_2$ 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\ne y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

$$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}.$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



$$=\sqrt{(1+(\frac{y_0}{3})^2)(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})(4y_0^2-4(2y_0^2-12))}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点 $C(5,0)$ 到线段 $AB$ 的距离

$$h=|CM|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}\ .$$ （10 分）

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3})^3}$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$ （15 分）

当且仅当 $9+y_0^2=24-2y_0^2$，即 $y_0=\pm\sqrt{5}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立.

所以 $\Delta ABC$ 面积的最大值为 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$ . （20 分）

解二：同解一，线段 $AB$ 的垂直平分线与 $x$ 轴的交点 $C$ 为定点，且点 $C$ 坐标为 $(5,0)$ .

（5 分）

设 $x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$$ 的绝对值, （10 分）

$$S_{\Delta ABC}^2=(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2))^2$$

$$=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$

$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)$$

$$\le\frac{3}{2}(\frac{14}{3})^3,$$

$S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$, （15 分）

当且仅当 $(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$ 且 $t_1^2+t_2^2=4$，

即 $t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$， $t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立.

所以 $\Delta ABC$ 面积的最大值是 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$. （20 分）

11.（本小题满分 20 分）证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 $r$，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

证明： 令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严格递增的. 又 $f(0)=-2<0, f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in(0,\frac{1}{2})$. （5 分）

所以 $2r^3+5r-2=0$，

$$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}$$

$$=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots.$$

故数列 $a_n=3n-2(n=1,2,\cdots)$ 是满足题设要求的数列. （10 分）

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项，有

$$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots,$$

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots,t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 $s_i$ 与 $t_j$ 都是不同的. （15 分）

不妨设 $s_1<t_1$，则

$$r^{s_1} < r^{s_1} + r^{s_2} + \cdots = r^{t_1} + r^{t_2} + \cdots,$$

$$1 < r^{t_1 - s_1} + r^{t_2 - s_1} + \cdots \le r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} - 1 < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1，矛盾.$$

故满足题设的数列是唯一的. （20 分）

# 2010 年全国高中数学联合竞赛加试
# 试题参考答案及评分标准（A 卷）

**说明：**

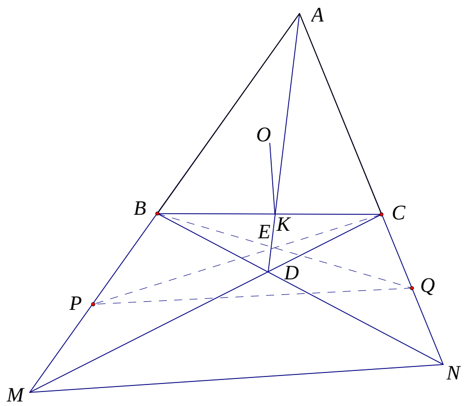
**1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.**

**2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次。**

**一、（本题满分 40 分）**

如图，锐角三角形 $ABC$ 的外心为 $O$，$K$ 是边 $BC$ 上一点（不是边 $BC$ 的中点），$D$ 是线段 $AK$ 延长线上一点，直线 $BD$ 与 $AC$ 交于点 $N$，直线 $CD$ 与 $AB$ 交于点 $M$. 求证：若 $OK\perp MN$，则 $A$，$B$，$D$，$C$ 四点共圆.

**证明：**用反证法．若 $A$，$B$，$D$，$C$ 不四点共圆，设三角形 $ABC$ 的外接圆与 $AD$ 交于点 $E$，连接 $BE$ 并延长交直线 $AN$ 于点 $Q$，连接 $CE$ 并延长交直线 $AM$ 于点 $P$，连接 $PQ$.




因为 $PK^2=P$ 的幂（关于$\odot O$）$+K$ 的幂（关于$\odot O$）

$$=\left(PO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

同理
$$QK^2=\left(QO^2-r^2\right)+\left(KO^2-r^2\right),$$

所以
$$PO^2-PK^2=QO^2-QK^2,$$

故
$$OK\perp PQ.$$
（10 分）

由题设，$OK\perp MN$，所以 $PQ /\!/ MN$，于是

$$\frac{AQ}{QN}=\frac{AP}{PM}. \qquad ①$$

由梅内劳斯（Menelaus）定理，得

$$\frac{NB}{BD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AQ}{QN}=1, \qquad ②$$

$$\frac{MC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1. \qquad ③$$

由①，②，③可得

$$\frac{NB}{BD}=\frac{MC}{CD},$$
（30 分）

所以 $\dfrac{ND}{BD}=\dfrac{MD}{DC}$，故$\triangle DMN\backsim\triangle DCB$，于是 $\angle DMN=\angle DCB$，所以 $BC /\!/ MN$，故 $OK\perp BC$，即 $K$ 为 $BC$ 的中点，矛盾！从而 $A,B,D,C$ 四点共圆.（40 分）

注 1：“$PK^2=P$ 的幂（关于⊙$O$）＋$K$ 的幂（关于⊙$O$）”的证明：延长 $PK$ 至点 $F$，使得

$$PK\cdot KF=AK\cdot KE, \tag{④}$$

则 $P$，$E$，$F$，$A$ 四点共圆，故

$$\angle PFE=\angle PAE=\angle BCE,$$

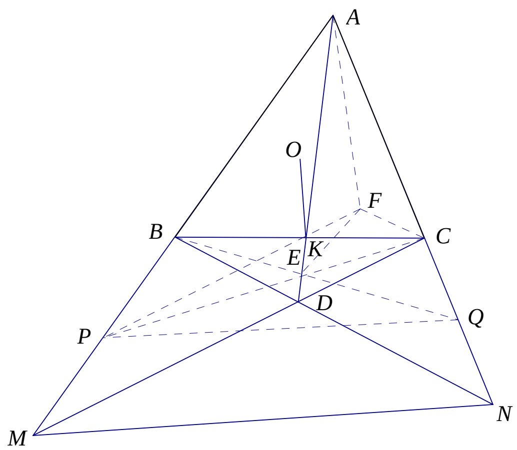
从而 $E$，$C$，$F$，$K$ 四点共圆，于是

$$PK\cdot PF=PE\cdot PC, \tag{⑤}$$

⑤-④，得 $\qquad PK^2=PE\cdot PC-AK\cdot KE$

$=P$ 的幂（关于⊙$O$）＋$K$ 的幂（关于⊙$O$）.

注 2：若点 $E$ 在线段 $AD$ 的延长线上，完全类似.




二、（本题满分 40 分）

设 $k$ 是给定的正整数，$r=k+\frac{1}{2}$. 记 $f^{(1)}(r)=f(r)=r\lceil r\rceil$，$f^{(l)}(r)=f(f^{(l-1)}(r)), l\geq 2$. 证明：存在正整数 $m$，使得 $f^{(m)}(r)$ 为一个整数. 这里，$\lceil x\rceil$ 表示不小于实数 $x$ 的最小整数，例如：$\left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil=1$，$\lceil 1\rceil=1$.

**证明**：记 $v_2(n)$ 表示正整数 $n$ 所含的 2 的幂次. 则当 $m=v_2(k)+1$ 时，$f^{(m)}(r)$ 为整数.

下面我们对 $v_2(k)=v$ 用数学归纳法.

当 $v=0$ 时，$k$ 为奇数，$k+1$ 为偶数，此时 $f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$ 为整数. （10 分）

假设命题对 $v-1(v\geq 1)$ 成立.

对于 $v\geq 1$，设 $k$ 的二进制表示具有形式

$$k=2^v+\alpha_{v+1}\cdot 2^{v+1}+\alpha_{v+2}\cdot 2^{v+2}+\cdots,$$

这里，$\alpha_i = 0$或者 1，$i = v+1,\ v+2,\cdots$.　　　　（20 分)

于是　　$$f(r)=\left(k+\frac{1}{2}\right)\left\lceil k+\frac{1}{2}\right\rceil=\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}+k^2+k$$

$$=\frac{1}{2}+2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^{v}+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$$

$$=k'+\frac{1}{2}, \qquad ①$$

这里$k'=2^{v-1}+(\alpha_{v+1}+1)\cdot 2^{v}+(\alpha_{v+1}+\alpha_{v+2})\cdot 2^{v+1}+\cdots+2^{2v}+\cdots$. 显然$k'$中所含的 2 的幂次为$v-1$. 故由归纳假设知，$r'=k'+\frac{1}{2}$经过$f$的$v$次迭代得到整数，由①知，$f^{(v+1)}(r)$是一个整数，这就完成了归纳证明.　　　　（40 分）

三、（**本题满分 50 分**）

给定整数$n>2$，设正实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_k\le 1,\ k=1,2,\cdots,n$，记

$$A_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k},\ k=1,2,\cdots,n .$$

求证：　　$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right|<\frac{n-1}{2}.$$

**证明**：由$0<a_k\le 1$知，对$1\le k\le n-1$，有

$$0<\sum_{i=1}^{k}a_i\le k,\qquad 0<\sum_{i=k+1}^{n}a_i\le n-k .\qquad（10 分）$$

注意到当$x,y>0$时，有$|x-y|<\max\{x,y\}$，于是对$1\le k\le n-1$，有

$$\left|A_n-A_k\right|=\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right|$$

$$<\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}a_i,\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i\right\}$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{n}(n-k),\ \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right)k\right\}$$

$$=1-\frac{k}{n},$$ （30 分）

故 $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} A_k\right|=\left|nA_n-\sum_{k=1}^{n} A_k\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(A_n-A_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\left|A_n-A_k\right|$$

$$<\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{n-1}{2}.$$ （50 分）

**四、（本题满分 50 分）**

一种密码锁的密码设置是在正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的每个顶点处赋值 0 和 1 两个数中的一个，同时在每个顶点处涂染红、蓝两种颜色之一，使得任意相邻的两个顶点的数字或颜色中至少有一个相同．问：该种密码锁共有多少种不同的密码设置？

**解**：对于该种密码锁的一种密码设置，如果相邻两个顶点上所赋值的数字不同，在它们所在的边上标上 $a$，如果颜色不同，则标上 $b$，如果数字和颜色都相同，则标上 $c$．于是对于给定的点 $A_1$ 上的设置（共有 4 种），按照边上的字母可以依次确定点 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 上的设置．为了使得最终回到 $A_1$ 时的设置与初始时相同，标有 $a$ 和 $b$ 的边都是偶数条．所以这种密码锁的所有不同的密码设置方法数等于在边上标记 $a$，$b$，$c$，使得标有 $a$ 和 $b$ 的边都是偶数条的方法数的 4 倍． （20 分）

设标有 $a$ 的边有 $2i$ 条，$0\le i\le\left[\frac{n}{2}\right]$，标有 $b$ 的边有 $2j$ 条，$0\le j\le\left[\frac{n-2i}{2}\right]$．选取 $2i$ 条边标记 $a$ 的有 $C_n^{2i}$ 种方法，在余下的边中取出 $2j$ 条边标记 $b$ 的有 $C_{n-2i}^{2j}$ 种方法，其余的边标记 $c$．由乘法原理，此时共有 $C_n^{2i}\ C_{n-2i}^{2j}$ 种标记方法．对 $i$，$j$ 求和，密码锁的所有不同的密码设置方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}\right). \qquad ①$$

这里我们约定 $C_0^0=1$． （30 分）

当 $n$ 为奇数时，$n-2i>0$，此时

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j} = 2^{n-2i-1}. \qquad ②$$

代入①式中，得

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}\right) = 4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right) = 2\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k}(-1)^k = (2+1)^n + (2-1)^n$$

$$=3^n+1. \qquad （40 分）$$

当 $n$ 为偶数时，若 $i<\dfrac{n}{2}$，则②式仍然成立；若 $i=\dfrac{n}{2}$，则正 $n$ 边形的所有边都标记 $a$，此时只有一种标记方法．于是，当 $n$ 为偶数时，所有不同的密码设置的方法数为

$$4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2i}{2}\right]} C_{n-2i}^{2j}\right) = 4\times\left(1+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)\right)$$

$$=2+4\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_n^{2i}2^{n-2i-1}\right)=3^n+3.$$

综上所述，这种密码锁的所有不同的密码设置方法数是：当 $n$ 为奇数时有 $3^n+1$ 种；当 $n$ 为偶数时有 $3^n+3$ 种．（50 分）