空念数学杂志
2011年 第 1 卷 第 2 期 33–34

2010年女子数学奥林匹克

第一天

2010年8月10日　上午8:30 – 12:00

河北　石家庄二中

1. 给定正整数 $n \geqslant 3$, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两两不同的非空子集 , 记 $A_{2n+1} = A_1$. 求
$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$$
的最大值 .

2. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, D为BC的中点 . E是 $\triangle ABC$ 外一点 , 满足 $CE \perp AB$, $BE = BD$. 过线段 BE 的中点 M 作直线 $MF \perp BE$, 交 $\triangle ABD$ 的外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{AD}$ 于点 F . 求证 : $ED \perp DF$.

3. 求证 : 对于每个正整数 n , 都存在满足下面三个条件的素数 p 和整数 m : (a) $p \equiv 5 \pmod 6$; (b) $p \nmid n$; (c) $n \equiv m^3 \pmod p$.

4. 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, $n \geqslant 2$, 令 $S = \sum\limits_{i=1}^{n} i x_i^2$. 求证 :
$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{S}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} \leqslant \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{k} .$$

第二天

2010年8月10日　上午8:30 – 12:00

河北　石家庄二中

5. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在 $\mathbb{R}$ 上递增的一次函数 , $f(x)$ 为整数当且仅当 $g(x)$ 为整数 . 证明 : 对一切 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x)$ 为整数 .

6. 如图 , 在锐角 $\triangle ABC$ 中 , $AB > AC$, M 为 BC 的中点 , $\angle BAC$ 的外角平分线 BC 于点 P . 点 K, F在直线 PA 上 , 使得 $MF \perp BC$, $MK \perp PA$. 求证 : (1) 点 F 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上 ; (2) $BC^2 = 4PF \cdot AK$.

7. 给定正整数 $n \geqslant 3$. 对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列 $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 若 $i < j < k$, 我们称 x_j 介于 x_i 和 x_k 之间 . 例如 , 在排列 $(1, 3, 2, 4)$ 中 , 3 介于 1 和 4 之间 , 4 不介于 1 和 2 之间 . 设集合 $S = \{P_1, P_2, \cdots, P_m\}$ 的每个元素 P_i

是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列 . 已知 $(1, 2, \cdots, n)$ 的任意三个不同数中都有一个数 , 它在每个 p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中都不介于另外两个数之间 . 求 m 的最大值 .

8. 试求满足下列条件的大于 5 的最小奇数 a : 存在正整数 m_1, n_1, m_2, n_2 , 使得 $a = m_1^2 + n_1^2 = m_2^2 + n_2^2$, 且 $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$.