空念数学杂志
2011年 第 1 卷 第 1 期 1–3

2011年北京大学保送生考试试题参考解答

作　者　Nirvanacs
摘　要　本文给出了2011年北京大学保送生考试数学试题的参考解答
关键词　保送　数学

1. 点 P为双曲线上任一点, PQ为双曲线在 P处的切线, F_1, F_2为双曲线的焦点. 证明: PQ平分 $\angle F_1PF_2$.

证明. 由于对称性,不妨设 P在第一象限, Q在x轴上, F_1, F_2分别为左右焦点, 双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

于是可令 P的坐标为$(a\cosh t, b\sinh t)$, 其中

$$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

则切线 PQ方程为

$$\frac{x\cosh t}{a}-\frac{y\sinh t}{b}=1,$$

于是 Q点的坐标为$\left(\frac{a}{\cosh t}, 0\right)$.

注意到

$$\begin{aligned}\frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2}&=\frac{(a\cosh t+c)^2+b^2\sinh^2 t}{(a\cosh t-c)^2+b^2\sinh^2 t}\\&=\frac{(a\cosh t+c)^2+(c^2-a^2)(\cosh^2 t-1)}{(a\cosh t-c)^2+(c^2-a^2)(\cosh^2 t-1)}\\&=\left(\frac{a\cosh t+c}{a\cosh t-c}\right)^2=\frac{|QF_1|^2}{|QF_2|^2},\end{aligned}$$

于是

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|},$$

因此 PQ平分 $\angle F_1PF_2$. ■

2. 在 $\triangle ABC$中存在一点 O, 满足 $\angle BAO=\angle CAO=\angle CBO=\angle ACO$, 求证: $\triangle ABC$的三边长组成等比数列.

证明. 显然有

$$\frac{OA}{OB}\frac{OB}{OC}\frac{OC}{OA}=1,$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle ABO}{\sin\angle BAO}\frac{\sin\angle OCB}{\sin\angle OBC}\frac{\sin\angle OAC}{\sin\angle OCA}=1,$$

利用已知条件, 可得

$$\sin\frac{2B-A}{2}\sin\frac{2C-A}{2}=\sin^2\frac{A}{2},$$

变形得

$$\cos(C-B)-\cos(C+B-A)=1-\cos A,$$

即

$$\cos(C-B)-\cos(C+B)=1-\cos 2A\Longleftrightarrow\sin C\sin B=\sin^2 A.$$

■

3. 是否存在实数 a, 使得 $f(x)=ax+\sin x$存在两切线互相垂直.

解答. 令 $a=0$, 则 $f(x)=\sin x$, 它在 $x=0$处的切线为 $y=x$. 另外它在 $x=\pi$处的切线为 $y=-(x-\pi)$. 显然这两条切线互相垂直. ■

注记. 个人认为题目应该是问是否存在非零实数 a满足条件, 答案是不存在, 这个可以转化为一元二次方程的问题, 大家可以试试手. ■

4. 设 p,q为实数, $f(x)=x^2+px+q$, 如果 $f(f(x))=0$只有一个实根, 求证: $p,q\geqslant 0$.

证明. 显然 $f(x)=0$有实根, 不妨设之为 α,β(可以相等), 则

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta),\quad f(f(x))=(f(x)-\alpha)(f(x)-\beta)\,. \tag{1}$$

如果 α,β中一者大于0, 不妨设为 α, 那么由于 $f(x)$开口向上且 $f(x)=0$有实根, 那么 $f(x)-\alpha=0$必然有两不等实根, 由(1)知这与 $f(f(x))=0$只有一个实根矛盾. 因此 α,β都不大于0, 从而由韦达定理知

$$p=-(\alpha+\beta)\geqslant 0,\quad q=\alpha\beta\geqslant 0.$$

■

5. 单位圆 $x^2+y^2=1$有三点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. 若

$$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0,$$

求证: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{3}{2}$.

证明. 由题意知 $\triangle ABC$的重心为原点, 即与外心重合, 所以 $\triangle ABC$为正三角形, 所以可以设 A,B,C对应辐角 $\theta,\theta+\frac{2\pi}{3},\theta+\frac{4\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= \cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\\
&= \cos^2\theta+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2\\
&= \cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{3}{2}\sin^2\theta\\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

易得此时

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=3-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\frac{3}{2}.$$

■