2011年各国数学奥林匹克中不等式

本文收集2011年世界各国数学奥林匹克中的不等式问题，资料来源*Mathlinks*．其中几个未知来源于某 LZMO，不太了解是啥子竞赛，不过其中的两题出现在冷老师的课中，于是也决定加在里面；最后一个未知是 LCCMO，也不知道是啥．另外祝大家新春愉快，这里先拜个早年 :-)

1. **(中国)** 给定正整数 $n \geqslant 4$，对任意满足
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$
的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$；试求 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值．

2. **(中国)** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数，求证：
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2\,,$$
其中 $a_{n+1}=a_1, M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i, m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$．

3. **(中国)** 给定正整数 n，找出最大的常数 λ 使得对任意满足
$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+2)^n\geqslant\prod_{i=1}^{2n}x_i$$
的正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$ 恒成立
$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i+1)^n\geqslant\lambda\prod_{i=1}^{2n}x_i\,.$$

4. **(中国)** 给定正整数 $n\geqslant 3$，找出最大的实数 M，使得对任意的正实数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，都存在其一个排列 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，满足
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{y_{i+1}^2-y_{i+1}y_{i+2}+y_{i+2}^2}\geqslant M\,,$$
其中 $y_{n+1}=y_1$，$y_{n+2}=y_2$．

5. **(西部)** 已知 $0<x,y<1$，求 $\dfrac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$ 的最大值．

6. (西部) 已知 $a,b,c>0$，求证：

$$\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}+\frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)}\geqslant\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

7. (北方) 在 $\triangle ABC$ 中，证明：

$$\frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}+\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}+\frac{1}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}\leqslant 2.$$

8. (女子) 设 $a,b,c,d>0$ 且满足 $abcd=1$，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{9}{a+b+c+d}\geqslant\frac{25}{4}.$$

9. (女子) 给定非负实数 a，求最小实数 $f=f(a)$，使得对任意复数 z_1,z_2 和实数 $x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，若 $|z_1|\leqslant a|z_1-z_2|$，则 $|z_1-xz_2|\leqslant f|z_1-z_2|$．

10. (东南) 设 $P_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为平面上 n 个点，M 为平面内线段 AB 上任意一点，记 $|AB|$ 为平面上 A,B 两点之间的距离．求证：

$$\sum_{i=1}^{n}|P_iM|\leqslant\max\left\{\sum_{i=1}^{n}|P_iA|,\sum_{i=1}^{n}|P_iB|\right\}.$$

11. (越南) 如果 $x>0$，$n\in\mathbb{N}$，求证：

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

12. (摩尔多瓦) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$，求证：

$$\frac{1}{x_1(1+x_1)}+\frac{1}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\frac{1}{x_n(1+x_n)}\geqslant\frac{n}{2}.$$

13. (摩尔多瓦) 设 n 为大于 1 的正整数，设

$$E=1+\sqrt{1+\frac{2^2}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{3^2}{4!}}+\cdots+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}},$$

试求 E 的整数部分．

14. (科索沃) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 S，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$．

15. (科索沃) 已知 $a,b,c>0$，求证：

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\geqslant\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

16. (科索沃) 设 $a,b,c>0$，求证：

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}}\geqslant 3\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}\,.$$

17. (波黑) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$. 求证：

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqslant 1\,.$$

18. (美国) 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$，求证：

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3\,.$$

19. (美国) 设 $a,b,c\in[0,1]$，且 $a+b,b+c,c+a$ 都不小于 1，求证：

$$(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2+\frac{2\sqrt{2}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geqslant 1\,.$$

20. (巴尔干) 证明：对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x,y,z 都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geqslant 0\,.$$

21. (巴尔干) 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$. 求证：

$$\prod(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)\geqslant 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\,.$$

22. (克罗地亚) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

23. (希腊) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=6$. 求 $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ 的最大值.

24. (吉尔吉斯斯坦) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 求证：

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n\,.$$

25. (吉尔吉斯斯坦) 设实数 a 满足 $a^5-a^3+a=2$，求证：$3<a^6<4$.

26. (乌兹别克斯坦) 已知 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c\geqslant 6$，求

$$a^2+b^2+c^2+\frac{a}{b^2+c+1}+\frac{b^2}{c^2+a+1}+\frac{c^2}{a^2+b+1}$$

的最小值．

27. (塞尔维亚) 给定正整数 $n\geqslant 2$，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为正数序列，且对任意的 $k=1,2,\cdots,n-1$ 都有 $(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1}$，证明：$(n-1)a_n<1$．

28. (伊朗) 求最小的实数 k，使得对任意的实数 a,b,c,d 都成立

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\geqslant 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)-k\,.$$

29. (伊朗) 已知 $x,y,z,w\geqslant 0$，且满足 $|x-y|+|y-z|+|z-w|+|w-x|=4$，试求 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的最小值．

30. (伊朗) 已知 $a,b,c>0$ 且满足 $a+b+c=3$，求证：

$$\frac{a}{1+(b+c)^2}+\frac{b}{1+(a+c)^2}+\frac{c}{1+(a+b)^2}\leqslant\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+12abc}\,.$$

31. (摩洛哥) 设 $a,b,c>0$，求证：$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geqslant 8$．

32. (摩洛哥) 设 α,β,γ 为 $\triangle ABC$ 的三个角，其周长及外接圆半径分别为 $2p,R$．

(a) 求证: $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant 3\left(9\cdot\frac{R^2}{p^2}-1\right)$．

(b) 等号何时成立?

33. (摩洛哥) 证明：$2011<\frac{2^2+1}{2^2-1}+\cdots+\frac{2011^2+1}{2011^2-1}<2011+\frac{1}{2}$．

34. (摩洛哥) 找出最大的常数 λ 使得

$$x^2+y^2+1\geqslant\lambda(x+y)\ \text{ and }\ x^2+y^2+xy+1\geqslant\lambda(x+y)$$

对任意的实数 x,y 恒成立．

35. (摩洛哥) 已知 $a,b>0$ 并且 $a+b=ab$，求证：$\frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}\geqslant\frac{1}{2}$．

36. (摩洛哥) 已知 $a,b,c>0$ 并且 $a+b+c=1$，求证：

$$9abc\leqslant ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{4}+3abc\,.$$

37. **(摩洛哥)** 已知 $x, y, z > 0$ 并且 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$，求证：$2(x+y+z) \leqslant 3$.

38. **(马其顿)** 设 $a, b, c, d > 0$ 且 $a+b+c+d=1$，求证：

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d} \geqslant 2 .$$

39. **(印度)** 求最大的常数 λ，使得

$$\frac{\lambda abc}{a+b+c} \leqslant (a+b)^2+(a+b+4c)^2$$

对任意的 $a, b, c > 0$ 恒成立.

40. **(印度)** 设非负数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$，$\forall\, m, n \in \mathbb{N}^+$，求证：

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \frac{a_N}{4N} \ln N .$$

41. **(印度)** 已知 $a, b, c > 0$ 且满足 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a(a+1)+ab(ab+1)}+\frac{1}{b(b+1)+bc(bc+1)}+\frac{1}{c(c+1)+ca(ca+1)} \geqslant \frac{3}{4} .$$

42. **(印度)** 已知 $a, b, c > 0$，求证：

$$\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c}+\frac{\sqrt{b^2+ca}}{c+a}+\frac{\sqrt{c^2+ab}}{a+b} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} .$$

43. **(印度)** 已知实数 a, b, c, d 满足 $a+b+c+d=6$，$a^2+b^2+c^2+d^2=12$，求证：

$$36 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^4+b^4+c^4+d^4) \leqslant 48 .$$

44. **(印度)** 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中，D, E, F 分别在边 BC, CA, AB 上，且 AD, BE, CF 是三角形 $\triangle ABC$ 的角平分线．记 r, R 分别为三角形 $\triangle ABC$ 的内切圆和外接圆半径，求证：

$$\frac{EF}{BC}+\frac{FD}{CA}+\frac{DE}{AB} \geqslant 1+\frac{r}{R} .$$

45. **(土耳其)** 设正实数 a, b, c 满足 $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$，求证：

$$\frac{(a+1)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+1)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+1)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geqslant \frac{3}{2} .$$

46. **(土耳其)** 已知 $x,y,z>0$ 满足 $xyz=1$，求证：

$$\frac{1}{x+y^{20}+z^{10}}+\frac{1}{y+z^{20}+x^{10}}+\frac{1}{z+x^{20}+y^{10}}\leqslant 1\,.$$

47. **(亚马尼亚)** 证明对任意正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_1+\cdots+a_k)a_k}{b_1+\cdots+b_k}\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\,,$$

并且等号不成立．

48. **(西班牙)** 已知 $a,b,c>0$，证明：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geqslant\frac{5}{2}\,.$$

49. **(韩国)** 已知 $a,b,c,d>0$ 且满足 $a+b+c+d=19$，$a^2+b^2+c^2+d^2=91$，求

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$$

的最大值．

50. **(韩国)** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 满足 $0\leqslant x_i\leqslant i\ (i=1,2,\cdots,25)$，试求

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{25}^3-(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\cdots+x_{25}x_1x_2)$$

的最大值．

51. **(加拿大)** 试找出最大的实数 C 使得

$$\frac{x+z}{(x-z)^2}+\frac{x+w}{(x-w)^2}+\frac{y+z}{(y-z)^2}+\frac{y+w}{(y-w)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\geqslant\frac{C}{x+y+z+w}$$

对任意 $x,y,z,w\in\mathbb{R}^+$ 成立．

52. **(外蒙古)** 设 $k,t,m\in\mathbb{N}^+$ 且满足 $t>\sqrt{km}$，求证：

$$\binom{2m}{0}+\binom{2m}{1}+\cdots+\binom{2m}{m-t-1}<\frac{2^{2m}}{2k}\,.$$

53. **(澳大利亚)** 设 $k,n\in\mathbb{N}^+$，证明如果实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{2^k}+k}=\frac{1}{k}\,,$$

那么必然成立 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j^{2^{k+1}}+k+2}\leqslant\frac{1}{k+1}$．

54. (瑞士) 设 $a,b,c,d>0$ 且 $a+b+c+d=1$，求证：

$$\frac{2}{(a+b)(c+d)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}.$$

55. (乌克兰) 已知 $a,b,c\in[0,1]$ 且 $2(a+b+c)+4abc=3(ab+bc+ca)+1$，求证：$4(a+b+c)\leqslant 3$.

56. (巴西) 非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2011}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{2011}a_i=\dfrac{2011}{2}$，求证：

$$|(a_1-a_2)(a_2-a_3)\cdots(a_{2010}-a_{2011})(a_{2011}-a_1)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

57. (中欧) 设正数 a,b,c 满足 $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=2$，求证：

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

58. (未知) 已知 $x,y,z>0$, 且 $xy+yz+zx=1$. 求证：

$$3-\sqrt{3}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geqslant (x+y+z)^2.$$

59. (未知) 设 $n\in\mathbb{N}^+$，$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，求证：

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2} \geq 7\sum_{k=1}\frac{1}{(1+a_1+\cdots+a_k)^2}.$$

60. (未知) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n>0$，求证：

$$\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}b_i^3\right) \geq \left(1-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|\right)^3.$$

61. (未知) 设 $x,y,z>0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$，求

$$\frac{x^ny^{n+1}}{z^{2n}}+\frac{y^nz^{n+1}}{x^{2n}}+\frac{z^nx^{n+1}}{y^{2n}}$$

的最小值.

62. (未知) 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2=1$，求证：

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab} \geq 3.$$

63. (未知) 设 $x, y, z > 0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$，求证：

$$\frac{x}{1-x^{2011}}+\frac{y}{1-y^{2011}}+\frac{z}{1-z^{2011}} \geqslant \frac{2012^{2012/2011}}{2011}.$$

64. (未知) 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，求

$$\sum_{i=1}^{n} i a_i \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2$$

的最大值．

65. (未知) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a+b+c=1$，求

$$\frac{a^2}{cb^2(b+c)^{3/2}}+\frac{b^2}{ac^2(c+a)^{3/2}}+\frac{c^2}{ba^2(a+b)^{3/2}}$$

的最小值．