竞赛之窗

2011 中国数学奥林匹克

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)03－0021－04

第一天

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 3)$ 是实数. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2,$$

其中，$a_{n+1}=a_1$，$M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，$m=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}a_i$，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

（姚一隽　供题）

2. 如图 1，设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 外接圆 Γ 上弧 $\overparen{BC}$ 的中点，点 X 在弧 $\overparen{BD}$ 上，E 是弧 $\overparen{ABX}$ 的中点，S 是弧 $\overparen{AC}$ 上一点，直线 SD 与 BC 交于点 R，SE 与 AX 交于点 T. 证明：若 $RT\parallel DE$，则 $\triangle ABC$ 的内心在直线 RT 上.

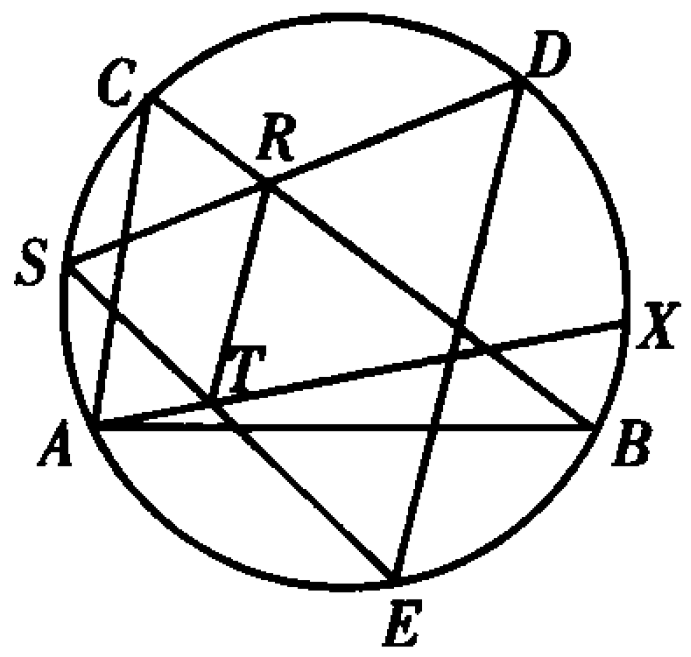

图 1

（熊　斌　供题）

3. 设 A 是一个有限实数集，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 A 的非空子集，满足

(1) A 中所有元素之和为 0；

(2) 对任意 $x_i\in A_i(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $x_1+x_2+\cdots+x_n>0$.

证明：存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，使得

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|<\frac{k}{n}|A|,$$

其中，$|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

（瞿振华　供题）

第二天

4. 设 n 是给定的正整数，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$. 对非空的有限实数集合 A 和 B，求 $|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|$ 的最小值，其中，

$$C=A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\},$$

$$X\otimes Y=\{x\mid x\text{ 恰好属于 }X\text{ 和 }Y\text{ 中的一个}\},$$

$|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

（冷岗松　供题）

5. 给定整数 $n(n\geqslant 4)$，对任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$

的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$，求

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}$$

的最大值.

（朱华伟　付云皓　供题）

6. 求证：对于任意给定的正整数 m、n，总存在无穷多组互质的正整数 a、b，使得

$$(a+b)\mid(am^a+bn^b).$$

（陈永高　供题）

参考答案

第一天

1. 若 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}_+)$，则

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2\leqslant n(M-m)^2.$$

故 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\leqslant\frac{n}{2}(M-m)^2$

$$=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2.$$

若 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}_+)$,则对于循环排列的 $2k+1$ 个数,必有连续三项递增或递减.

究其原因,由于

$$\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})(a_{i+1}-a_i)$$
$$=\prod_{i=1}^{2k+1}(a_i-a_{i-1})^2\geqslant 0,$$

于是,不可能对于每一个 i,都有 a_i-a_{i-1} 与 $a_{i+1}-a_i$ 异号.

不妨设连续三项为 a_1、a_2、a_3. 则有

$$(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2\leqslant(a_1-a_3)^2.$$

故 $2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$
$$\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2.$$

这就将问题转化为 $2k$ 个数的情形.

于是,有

$$2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)$$
$$\leqslant(a_1-a_3)^2+\sum_{i=3}^{n}(a_i-a_{i+1})^2$$
$$\leqslant 2k(M-m)^2,$$

即 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\right)\leqslant k(M-m)^2$

$$=\left[\frac{n}{2}\right](M-m)^2.$$

2. 如图2,联结 AD 与 RT 交于点 I.

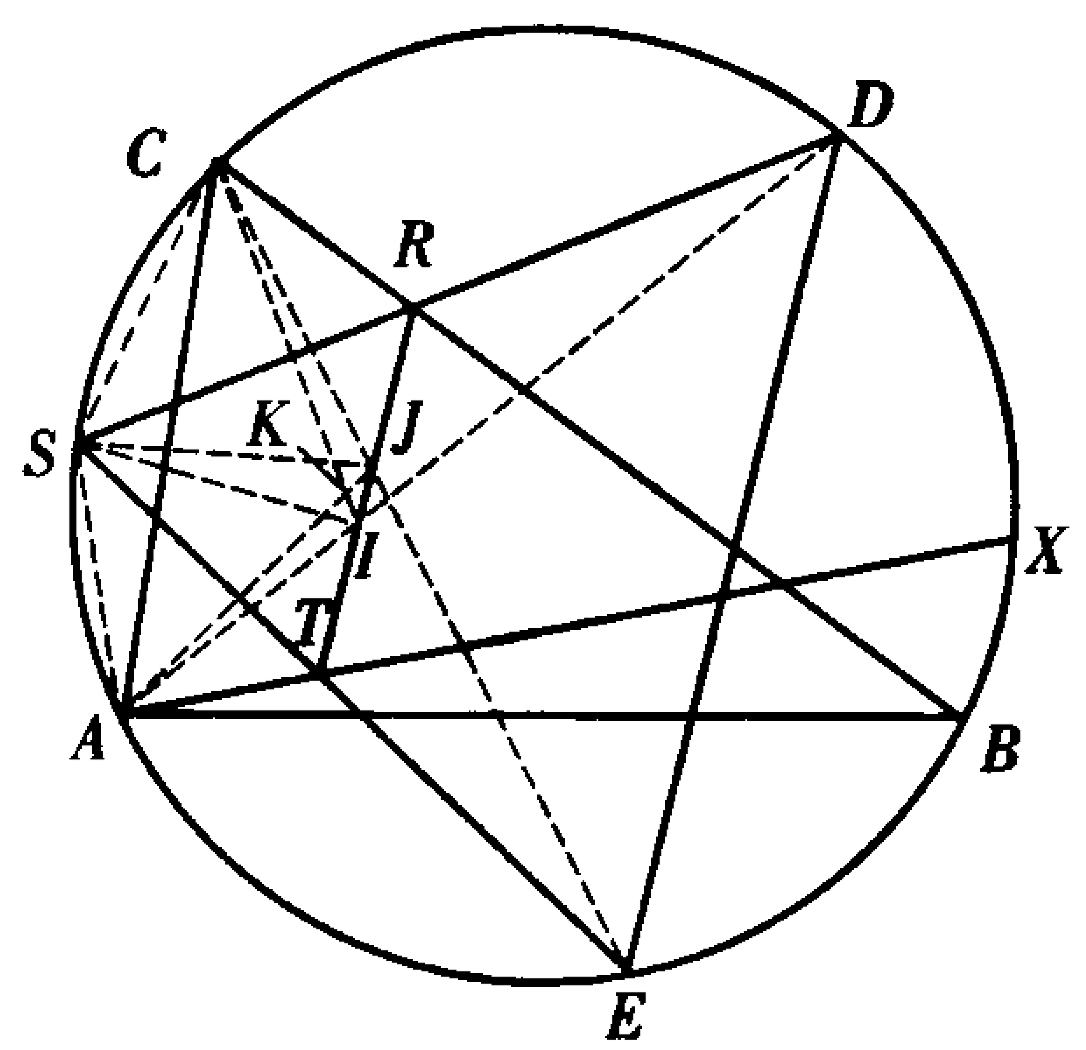

图2

因 D 是弧 $\overparen{BC}$ 的中点,所以,AI 为 $\angle BAC$ 的角平分线.

联结 AS、SI. 则由 $RT/\!/DE$,知

$\angle STI=\angle SED=\angle SAI$.

故 A、T、I、S 四点共圆(记此圆为 ω_1).

联结 CE 与 RT 交于点 J,联结 SC. 则

$\angle SRJ=\angle SDE=\angle SCE$.

于是,S、J、R、C 四点共圆(记此圆为 ω_2).

设圆 ω_1、ω_2 除点 S 外另一个交点为 K.

接下来证明:AJ 与 CI 交于点 K.

设圆 ω_1 与 AJ(除点 A 外)的交点为 K_1.

由于 E 是弧 $\overparen{AX}$ 的中点,于是,

$\angle SK_1A=\angle STA$

$=\frac{1}{2}(\overparen{SA}+\overparen{XE})=\frac{1}{2}(\overparen{SA}+\overparen{AE})$

$=\angle SDE=\angle SRT=\angle SRJ$.

故 S、K_1、J、R 四点共圆.

于是,点 K_1 在圆 ω_2 上.

同理,设圆 ω_2 与 CI(除点 C 外)另一个交点为 K_2. 则点 K_2 在圆 ω_1 上.

所以,点 K_1 与 K_2 重合,且为 AJ 与 CI 的交点,即 K 为 AJ 与 CI 的交点.

因为 $\angle CAD=\angle CAI$,且

$\angle TJE=\angle CJR=\angle CED=\angle CAD$,

所以,A、I、J、C 四点共圆.

因而,$\angle ACI=\angle AJI$.

又由 C、K、J、R 四点共圆知

$\angle BCI=\angle ICR=\angle AJI$.

因此,$\angle ACI=\angle BCI$.

故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

3. 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,$a_1>a_2>\cdots>a_m$. 则由条件(1)知

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=0.$$

考虑每个 A_i 中的最小数,并设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中恰有 k_i 个集合的最小数为 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$.

于是,$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i=n$,且由条件(2)知

$$\sum_{j=1}^{m}k_ja_j>0.$$

对 $s(1\leqslant s\leqslant m-1)$,共有 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i$ 个集合,其最小数大于或等于 a_s. 故这些集合的并集

包含在 $\{a_1,\cdots,a_s\}$ 中,元素个数不超过 s.

接下来用反证法证明:

存在 $s(1\leqslant s\leqslant m-1)$,使得

$$k=\sum_{i=1}^{s}k_i>\frac{sn}{m}.$$

假设对于 $s(1\leqslant s\leqslant m-1)$,都有

$$\sum_{i=1}^{s}k_i\leqslant\frac{sn}{m}.$$

由阿贝尔变换可知(注意 $a_s-a_{s+1}>0$, $1\leqslant s\leqslant m-1$)

$$\begin{aligned}0&<\sum_{j=1}^{m}k_ja_j\\&=\sum_{s=1}^{m-1}\left[(a_s-a_{s+1})\sum_{i=1}^{s}k_i\right]+a_m\sum_{i=1}^{m}k_i\\&\leqslant\sum_{s=1}^{m-1}(a_s-a_{s+1})\frac{sn}{m}+a_mn\\&=\frac{n}{m}\sum_{j=1}^{m}a_j=0,\end{aligned}$$

矛盾.

对于这一 s,取 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中最小数大于或等于 a_s 的那些集合,记为 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$. 则由上述的结果可知,这些子集共有

$$k=\sum_{i=1}^{s}k_i>\frac{sn}{m}$$

个,且它们的并集的元素个数不超过 s,即

$$|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}|\leqslant s<\frac{km}{n}=\frac{k}{n}|A|.$$

第 二 天

4. 所求的最小值是 $n+1$.

首先,取 $A=B=S$,可知

$|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|=n+1$.

下面证明:

$l=|A\otimes S|+|B\otimes S|+|C\otimes S|\geqslant n+1$.

记 $X\backslash Y=\{x\mid x\in X,x\notin Y\}$. 显然,

$$\begin{aligned}l=&|A\backslash S|+|B\backslash S|+|C\backslash S|+\\&|S\backslash A|+|S\backslash B|+|S\backslash C|.\end{aligned}$$

于是,只要证明:

(1) $|A\backslash S|+|B\backslash S|+|S\backslash C|\geqslant 1$;

(2) $|C\backslash S|+|S\backslash A|+|S\backslash B|\geqslant n$.

先证(1).

事实上,若 $|A\backslash S|=|B\backslash S|=0$,则 $A、B\subseteq S$.

故 1 不可能是 C 中元素,即 $|S\backslash C|\geqslant 1$.

再证(2).

若 $A\cap S=\varnothing$,则 $|S\backslash A|\geqslant n$,结论成立.

若 $A\cap S\neq\varnothing$,设 $A\cap S$ 的元素中最大的一个是 $n-k(0\leqslant k\leqslant n-1)$. 则

$$|S\backslash A|\geqslant k. \qquad ①$$

另一方面,对 $i=k+1,k+2,\cdots,n$,要么 $i\notin B$(此时 $i\in S\backslash B$),要么 $i\in B$(此时 $n-k+i\in C$,即 $n-k+i\in C\backslash S$).

所以,
$$|C\backslash S|+|S\backslash B|\geqslant n-k. \qquad ②$$

由式①、②即得(2).

综上可知,$l\geqslant n+1$.

所以,最小值是 $n+1$.

5. 所求最大值为 $n-1$.

由齐次性,不妨假设

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1.$$

首先,当

$$a_1=1,a_2=a_3=\cdots=a_n=0,$$
$$b_1=0,b_2=b_3=\cdots=b_n=\frac{1}{n-1}$$

时,有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)=1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)=\frac{1}{n-1}.$$

故
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}=n-1.$$

其次证明:对任意满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$$

的 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$,都有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}\leqslant n-1.$$

由于分母是正数,故上式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)\leqslant(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i),$$

即 $(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\geqslant\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

由对称性,不妨设 b_1 是 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中最小的一个. 则

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$
$$\geqslant(n-1)b_1^2+(n-1)\sum_{i=2}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_1$$
$$\geqslant(n-1)b_1^2+\left(\sum_{i=2}^{n} b_i\right)^2+(n-2)b_1$$
$$=(n-1)b_1^2+(1-b_1)^2+(n-2)b_1$$
$$=nb_1^2+(n-4)b_1+1$$
$$\geqslant1=\sum_{i=1}^{n} a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

6. 如果 $mn=1$,则结论成立.

下设 $mn\geqslant2$. 由于

$$n^a(am^a+bn^b)$$
$$=(a+b)n^{a+b}+a[(mn)^a-n^{a+b}],$$

故只要证明存在无穷多组互质的正整数 a、b 使得

$$(a+b)\mid[(mn)^a-n^{a+b}],(a+b,n)=1.$$

令 $p=a+b$.

只要证明存在无穷多个质数 p 及正整数 $a(1\leqslant a\leqslant p-1)$,使得

$$p\mid[(mn)^a-n^p].$$

由费马小定理知, 当

$$a_1\equiv a_2(\bmod p-1),a_1\geqslant1,a_2\geqslant1$$

时,有

$$(mn)^{a_1}\equiv(mn)^{a_2}(\bmod p).$$

因此,只要证明存在无穷多个质数 p 及正整数 a,使得

$$p\mid[(mn)^a-n]. \quad ①$$

假设这样的质数只有有限个,记为 $p_1,p_2,\cdots,p_r$(由于 $mn\geqslant2$,这样的质数必存在).

设 $(mn)^2-n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$, ②

其中,$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 为非负整数.

取 $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}(p_1-1)\cdots(p_r-1)+2$.

设 $(mn)^a-n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$, ③

其中,$\beta_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 为非负整数.

若 $p_i\mid n$,则由式③及 $a\geqslant2$ 可知 $p_i^{\beta_i}\mid n$.

故 $p_i^{\beta_i}\mid[(mn)^2-n]$.

从而,由式②知 $\beta_i\leqslant\alpha_i$.

若 $p_i\nmid n$,则 $p_i\nmid m$. 故 $(p_i^{\alpha_i+1},mn)=1$.

由欧拉定理知(注意 $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})=p_i^{\alpha_i}(p_i-1)$ 为 $a-2$ 的约数)

$$(mn)^a-n\equiv(mn)^2-n(\bmod p_i^{\alpha_i+1}).$$

由于 $p_i^{\alpha_i+1}\nmid[(mn)^2-n]$,故由上式知 $p_i^{\alpha_i+1}\nmid[(mn)^a-n]$.

因而,$\beta_i\leqslant\alpha_i$. 于是,

$$(mn)^a-n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$$
$$\leqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}=(mn)^2-n,$$

与 $a>2$ 矛盾.

所以,存在无穷多个质数 p 及正整数 a,使得 $p\mid[(mn)^a-n]$.

(熊 斌 提供)