2011 年全国高中数学联赛代数与不等式强化辅导材料-----王峰
使用时间 2011 年 6 月 6 日---2011 年 7 月 6 日

加试不等式---几个重要不等式

1. 均值不等式
2. 柯西不等式
3. 舒尔不等式　设x、y、$z\ge 0, r$是实数. 则$\sum\limits_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\ge 0.$

　当$r=1$时，舒尔不等式有下面几几种变形：

　$(1) x^3+y^3+z^3-(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+3xyz\ge 0.$

　$(2)\ (x+y+z)^3-4(x+y+z)\cdot(yz+zx+xy)+9xyz\ge 0;$

（3）$xyz\ge (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$

4. 切比雪夫不等式

设$a_1\le a_2\le \ldots\le a_n, b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\le n\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i;$

设$a_1\le a_2\le \ldots\le a_n, b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\ge n\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i.$

例1　设a、b、c是正实数，且$ab+bc+ca=3$.求证:$\sum\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{abc}$

例2　设x、y、z是正实数，且$x+y+z=3$.证明$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$

例3　设x、y、z是非负实数，且$x^2+y^2+z^3=3$.证明：

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z+x}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+x+y}}\le\sqrt{3}$$

例4　设a、b、$c\in(\frac{1}{\sqrt{6}},+\infty)$, 且$a^2+b^2+c^2=1$.证明：

$$\frac{1+a^2}{\sqrt{2a^2+3ab-c^2}}+\frac{1+b^2}{\sqrt{2b^2+3bc-a^2}}+\frac{1+c^2}{\sqrt{2c^2+3ca-b^2}}\ge 2(a+b+c)$$

例5　已知a、b、c是正实数,证明：$(a+b)^3+4c^3\ge 4(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3})$

例6　设x、y、z是正实数，且$x+y+z\ge 1$.证明:$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$

例7　设a、b、c是正实数,证明$\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)>25$

例8　设x、y、z是正实数，证明：$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}>2\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$.

例9　已知a、b、c是正实数，且$ab+bc+ca=1$,证明：

$$\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{ca+b+\frac{1}{b}}+\frac{1}{ab+c+\frac{1}{c}}\le\frac{27}{31}.$$

例10　设x、y、z是正实数，且$x+y+z=1$.　k是正整数.证明：

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\ge\frac{1}{7}$$

加试不等式---加权平均值不等式

加权平均值不等式

设a_i、$\omega_i>0(i=1,2,\dots n)$,且$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$.则$\sum_{i=1}^{n}\omega_i a_i\ge\prod_{i=1}^{n}a_i^{\omega_i}$.

例1 设a、b、$c>0$,且$a+b+c=1$.求证:$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}}\le\frac{1}{3}$.

例2 设a、b、$c>0$,且$abc=1$.求证: $a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}\le1$.

例3 设a、b、$c>0$,求证：$a^ab^bc^c\ge(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

例4　设a、b、c是三角形的三边长，求证：$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c\_a-b)^c\le a^ab^bc^c$

例5　设a、b、$c>0$,求证：$a^ab^bc^c\ge a^cb^ac^b$.

例6　设a、b、c是三角形的三边长，求证：$(a+b-c)^{a+b-c}(b+c-a)^{b+c-a}(c+a-b)^{c+a-b}\le a^bb^cc^a$.

加试不等式---关于一个代数不等式加强

题目：已知a、b、$c\in R^+$,$abc=1$.求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c}\ge4$

加强命题：设a、b、$c\in R^+$,$abc=1$.求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\ge5$

加试不等式---含“$abc=1$”的条件不等式

1 降元

例1 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.证明：$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

练习.求证：对任意的正实a、b、c，都有$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2 用“1”代换

例2 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.求证:$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le1$.

3 换元

3.1 利用$a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$的倒数代换

例3 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.证明:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{a^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$.

3.2 利用$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$的分式代换

例4 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.求证:$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\ge1$.

例 5 已知a、b、$c\in R^+$,$abc=1$.求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c}\ge4$

3.3 ；利用$a=x^3,b=y^3,c=z^3$的高次代换

例 6 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.求证:$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le1$.

例7 设实数x、y、z都不等于 1,满足$xyz=1$.求证：$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge1$.

4 巧设参数

例 8 设a、b、$c\in R^+$,且$abc=1$.求证:$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1+2c}\ge1$.

练习 设a、b、$c\in R^+$，且满足$abc=1$.证明：$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le1$.

加试不等式---相关联的几道不等式（母不等式）

题目 1 设T是一个周长为 1 的三角形，a、b、c为T的三边长.

证明:$\frac{13}{27}\le a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

提示：易得：$a^2+b^2+c^2+4abc=\frac{1}{2}+4(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$

题目 2 已知x、y、$z\ge 0$，且$x+y+z=1$.证明:$0\le xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}$.

题目3 设ΔABC的三边长为别为a、b、c,且$a+b+c=3$. 求$f\left(a,b,c\right)=a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc$的最小值.

题目 4 设T是一个周长为 2 的三角形，x、y、z为T的三边长.

证明：$xyz+\frac{28}{27}\ge xy+yz+zx$.

题目 5 在ΔABC中，a、b、c为其三边长.求证：

$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$.

题目 6 在ΔABC中，a、b、c为其三边长，且满足$a+b+c=2$.求证：

$a^2+b^2+c^2+2abc<2$.

加试不等式--- 条件为 ab+bc+ca=1 的一类不等式

例 1 设a、b、$c>0$, 且$ab+bc+ca=1$.求证:$\frac{b^2+c^2}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{c^2+a^2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{a^2+b^2}{\sqrt{c^2+1}}\ge\sqrt{3}$.

例 2 设a、b、$c>0$, $ab+bc+ca=1$.求证: $\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge 2\sqrt{a+b+c}$.

例3 设a、b、$c>0$, $ab+bc+ca=1$.求证: $\sum\frac{1}{(1+a^2)(1+b^2)}\le\frac{1}{8abc}\sum\frac{1}{a+b}$.

例4 设a、b、$c\ge 0$, $ab+bc+ca=1$.求证： $\frac{a^3}{1+b^2}+\frac{b^3}{1+c^2}+\frac{c^3}{1+a^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{4}$.

例5 设a、b、$c>0$,且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$.求证： $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

例6 设a、b、$c\ge 0$, $ab+bc+ca=abc$.求证:$\sum\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\le\frac{3}{2}$.

2011 年全国高中数学联赛代数与不等式强化辅导材料-----王峰
使用时间 2011 年 6 月 6 日---2011 年 7 月 6 日

加试不等式---嵌入不等式（母不等式）

定理 1 对 ΔABC 和任意的实数 x、y、z 均有 $x^2+y^2+z^2\ge 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C.$（母不等式）

其中当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时，等号成立.

定理 2 对 ΔABC 和任意的实数 x、y、z 和正整数 n,均有

$$x^2+y^2+z^2\ge 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC).$$

题 1 在 ΔABC 中，求证：$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\le\frac{1}{8}.$

题 2 在 ΔABC 中，求证：$\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2.$

题 3 在 ΔABC 中，求证：$\cos A+\sqrt{3}(\cos B+\cos C)\le\frac{5}{2}.$

题 4 对 ΔABC 和正实数 p、q、r, 求证：$p\cos A+q\cos B+r\cos C\le\frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p}+\frac{rp}{q}+\frac{pq}{r}\right).$

题 5 设 a、b、$c\ge 0,\ ab+bc+ca=abc.$求证:$\sum\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\le\frac{3}{2}.$

题 6 设 ΔABC 为锐角三角形.求证：$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\ge 4.$

题 7 设 $\alpha_i>0$、$\beta_i>0(1\le i\le n,n>1)$, 且 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=\pi$, 则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\beta_i}{\sin a_i}\le\sum_{i=1}^{n}\cot\alpha_i$

题 8 设 a、b、c 是给定的正实数，求所有的正实数 x、y、z 满足方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc. \end{cases}$$

题 9 已知 x、y、z 为正实数， 求证 $x+y+z\ge xy+yz+zx.$

题 10 设正数 u、v、w 满足 $u+v+w=4.$求证:$\sqrt{\frac{vw}{u}}+\sqrt{\frac{wu}{v}}+\sqrt{\frac{uv}{w}}\ge u+v+w.$

题 11 已知 $\alpha+\beta+\gamma=180^o(\alpha$、$\beta$、$\gamma\ge 0)$. 求 $3\cos\alpha+4\cos\beta+5\cos\gamma$ 的最大值.

2011 年全国高中数学联赛代数与不等式强化辅导材料-----王峰
使用时间 2011 年 6 月 6 日---2011 年 7 月 6 日

2011 加试试题选讲（代数部分）需要补充的几个重要问题

一．函数方程（赋值、换元、柯西、递归、不动点）

1. 确定所有的函数 $f:R\to R$，其中 R 是实数集，使得对于任意 x，$y\in R$ 恒有：

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$

二．离散函数与函数最值

2. 给定整数 $n(n\geq 3)$，实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足：$\min\limits_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|=1$，求 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^3$ 的最小值。

3. 求最大的实数 a，使得 $\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>a$，对所有的正实数 x,y,z 均成立。

4. 设 x,y,z 是三个不全为 0 的实数，求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值

5. 设 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\dfrac{x_1}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}+\dfrac{x_2}{(1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^2}+\cdots+\dfrac{x_n}{(1+x_n)^2}$

求 f_n 的最大值 m_n（其中 $x_i\geq 0$，并且用 m_{n-1} 表示 m_n），并求 $\lim\limits_{n\to\infty}m_n$

6. 设非负实数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求：

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_1}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$ 的最小值。

7. n 为给定整数，$n\geq 2$, 确定 $c_{\min}$, 使不等式 $\sum\limits_{1\leq i<j\leq 5}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leq c(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^4$ 对一切非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒成立.

8. 设 $a_i\geq 0(i=1,2,3,4)$ 满足 $\sum a_ia_{i+1}=1$，规定 $a_5=a_1$，$a_6=a_2$，$a_7=a_3$

求证：$\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{a_i^3}{a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}}\geq\dfrac{1}{3}$

9. 设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a$；$az+cx=b$；$bx+ay=c$. 求函数

$f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{y^2}{1+y}+\dfrac{z^2}{1+z}$ 的最小值。

10. 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[-1,1]$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_ia_{i+1}}\geq\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}$（约定 $a_{n+1}=a_1$）

11. 已知 $a,b,c\in R^+,a+b+c=10$，且 $a\leq 2b,b\leq 2c,c\leq 2a$，求 abc 的最小值

12. 已知 $x,y,z\in(-1,1)$，且 $xyz=\frac{1}{36}$，试求函数 $u=\frac{1}{1-x^2}+\frac{4}{4-y^2}+\frac{9}{9-z^2}$ 的最小值。

13. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，当 $0\leq x\leq 1$ 时，$|f'(x)|\leq 1$，试求 a 的最大值.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的定义如下：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<1$

15. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3},a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}(n=1,2,\cdots)$. 求证:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^n}}$$

2011 年全国高中数学联赛试题加试题代数部分预测试题

二、（本题满分 40 分）

已知 a_i,b_i 都是正数（$(i=1,2,\cdots n)$,并且 $a_i+b_i=1$。

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_i+b_i^2}+\frac{b_i}{b_i+a_i^2}\right)\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^2+b_i^2+1\right)$ 的最小值。

二、（本题满分 40 分）

求最小实数 M，使得对于一切实数 a,b,c 都成立不等式

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right|\leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$