空念数学杂志
2011年 第 1 卷 第 2 期 35–46

2011年各国数学数学奥林匹克中不等式解答(上)

作　者　Nirvanacs
摘　要　本文给出了2011年上半年各国赛题中所出现的不等式问题的参考解答
关键词　不等式　Mathlinks

1. **(中国)** 给定正整数 $n \geqslant 4$, 对任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$

的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$; 试求 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^n b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值 .

证明. 不妨设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=n-1$. 注意到

$$\sum_{i=1}^n (a_i+(n-1)b_i-n+1)^2 \geqslant 0\,,$$

于是可得

$$2(n-1)\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant n(n-1)^2-(n-1)^2\sum_{i=1}^n b_i^2-\sum_{i=1}^n a_i^2\,,$$

因此 , 由 $n \geqslant 4$ 得

$$(n-2)\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant 2\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant n(n-1)-(n-1)\sum_{i=1}^n b_i^2-\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{n-1}\,.$$

又因为

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2=(n-1)^2\,,$$

所以

$$n(n-1)-\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{n-1} \geqslant \sum_{i=1}^n a_i^2\,,$$

从而

$$(n-2)\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^n a_i^2-(n-1)\sum_{i=1}^n b_i^2\,,$$

即
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)} \leqslant n-1\,.$$
令 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0, a_n=n-1, b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}=1, b_n=0$，此时
$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)} = n-1\,,$$
所以 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值为 $n-1$． ■

2. (越南) 如果 $x>0$，$n\in\mathbb{N}$，求证：
$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

证明. 我们里用数学归纳法来证明．

当 $n=1$ 时，不等式明显成立．

假设 $n=k$ 时，不等式成立．当 $n=k+1$ 时，由于归纳假设，有
$$\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}.$$
因此要证明
$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3},$$
只要证
$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \geqslant \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}\,. \tag{1}$$
不等式 (1) 等价于
$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 (x^{k+1}+1)^2 \geqslant x(x^{k+2}+1)(x^k+1)\,,$$
两边同时减去 $x(x^{k+1}+1)^2$，即要证
$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 (x^{k+1}+1)^2 \geqslant x^{k+1}(x-1)\,.$$
这等价于 $(x-1)^2(x^{k+1}-1)^2 \geqslant 0$，明显成立.

综上所述，由数学归纳法，不等式得证． ■

3. (摩尔多瓦) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$，且 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$，求证：

$$\frac{1}{x_1(1+x_1)} + \frac{1}{x_2(1+x_2)} + \cdots + \frac{1}{x_n(1+x_n)} \geqslant \frac{n}{2}.$$

证明. 显然原不等式等价于

$$\frac{1+x_1+x_1^2}{x_1(1+x_1)} + \frac{1+x_2+x_2^2}{x_2(1+x_2)} + \cdots + \frac{1+x_n+x_n^2}{x_n(1+x_n)} \geqslant \frac{3n}{2}. \tag{2}$$

注意到 $4(1+x_i+x_i^2) \geqslant 3(1+x_i)^2$ 对任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立，因此要证明 (2) 只需要证明

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1+x_1}{x_1} + \frac{1+x_2}{x_2} + \cdots + \frac{1+x_n}{x_n}\right) \geqslant \frac{3n}{2},$$

即

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geqslant n, \tag{3}$$

由 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ 及均值不等式易知 (3) 成立. ■

4. (摩尔多瓦) 设 n 为大于 1 的正整数，设

$$E = 1 + \sqrt{1+\frac{2^2}{3!}} + \sqrt[3]{1+\frac{3^2}{4!}} + \cdots + \sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}},$$

试求 E 的整数部分.

解答. 令 $a_k = \sqrt[k]{1+\frac{k^2}{(k+1)!}} - 1$，显然 $a_k > 0$. 于是由二项式定理有

$$1 + \frac{k^2}{(k+1)!} = (1+a_k)^k \geqslant 1 + k a_k \Longrightarrow a_k \leqslant \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

因此有

$$n < E \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + 1 + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!},$$

所以 E 的整数部分为 n. ■

5. (科索沃) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c，面积为 S，求证：$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

证明. 我们来证明更强的费哈(*Finsler-Hadriger*)不等式即

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\geqslant 4\sqrt{3}S\,. \tag{4}$$

因为 a,b,c 为三角形边长，于是存在正整数 x,y,z 使得 $a=y+z,b=z+x,c=x+y$. 此时有

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=4(xy+yz+zx)\,,$$
$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3xyz(x+y+z)}\ (\text{海伦公式})\,.$$

因此 (4) 等价于 $xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3xyz(x+y+z)}$，平方后等价于

$$(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\geqslant 0\,,$$

这明显成立，从而 (4) 得证. ■

注记. 由于

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca\geqslant 3(abc)^{2/3}\geqslant 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\,,$$

可得一系列不等式. 其中最后一个不等式可由*Schur*及均值不等式推得，即

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+3(abc)^{2/3}\geqslant&\sum_{\text{cyc}}(ab)^{2/3}(a^{2/3}+b^{2/3})\\ \geqslant&2\sum_{\text{cyc}}(ab)^{2/3}a^{1/3}b^{1/3})=2\sum_{\text{cyc}}ab\,.\end{aligned}$$

用证明中的代换可将其化为*Carlson*不等式：设 $x,y,z>0$，那么

$$\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\right)^{1/3}\geqslant\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{1/2}\,.$$

另外注意到分解因式

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\prod_{\text{cyc}}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\,, \tag{5}$$

令 $\sqrt{a}=x,\sqrt{b}=y,\sqrt{c}=z$，那么 x,y,z 可以构成一个锐角三角形边长. 利用 (5) 及费哈不等式可得

$$(x+y+z)\prod_{\text{cyc}}(x+y-z)\geqslant\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)\prod_{\text{cyc}}(x^2+y^2-z^2)}\,,$$

利用此结论易得1992年波兰数学数学奥林匹克一试题：设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，求证：

$$\prod_{\text{cyc}}(a+b-c)^2\geqslant\prod_{\text{cyc}}(a^2+b^2-c^2)\,.$$

■

6. (科索沃) 已知 $a, b, c > 0$，求证：

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2} \geqslant \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} .$$

证明. 由Cauchy不等式有 $\sqrt{(a^3+b^3)(a+b)} \geqslant a^2+b^2$，我们只需要证明

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a+b}} \geqslant \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} ,$$

这等价于

$$(a+b+c)\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a+b)(a+c)} \geqslant 6(ab+bc+ca) .$$

再由Cauchy不等式有 $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geqslant a+\sqrt{bc}$，我们只需要证明

$$(a+b+c)\sum_{\text{cyc}}(a+\sqrt{bc}) \geqslant 6(ab+bc+ca) ,$$

即

$$\sum_{\text{cyc}}(a^2+a\sqrt{bc})+\sum_{\text{cyc}}\sqrt{bc}(b+c) \geqslant 4(ab+bc+ca) . \tag{6}$$

由Schur不等式我们有

$$\sum_{\text{cyc}} a(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c}) \geqslant 0 \Longrightarrow \sum_{\text{cyc}}(a^2+a\sqrt{bc}) \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{bc}(b+c) ,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}(a^2+a\sqrt{bc})+\sum_{\text{cyc}}\sqrt{bc}(b+c) &\geqslant 2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{bc}(b+c) \geqslant 2\sum_{\text{cyc}}\sqrt{bc}\cdot\sqrt{bc} \\ &= 4(ab+bc+ca) .\end{aligned}$$

于是 (6) 得证. ■

7. (科索沃) 设 $a, b, c > 0$，求证：

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}} \geqslant 3\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}} .$$

证明. 由Cauchy不等式及均值不等式有

$$\begin{aligned}5a^2+8b^2+5c^2 &\geqslant 4(a^2+b^2)+4(b^2+c^2) \\ &\geqslant 2(a+b)^2+2(b+c)^2 \\ &\geqslant 4(a+b)(b+c) ,\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}} \geqslant \sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}} \geqslant 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

只需要证明

$$\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}} \geqslant \sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

等价于 $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$，这个就是题 (17) 中的不等式． ■

8. (波黑) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$．求证：

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqslant 1\,.$$

证明. 因为 $a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b)=a+b+c=1$，所以

$$\begin{aligned}1 =&(a(1+b-c)+b(1+c-a)+c(1+a-b))(a+b+c)(a+b+c)\\ \geqslant&\left(a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\right)^3,\end{aligned}$$

从而

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leqslant 1.$$

■

注记. 题中用到这么一个非常有用的结论：对任意的 $i,k\in\mathbb{N}$ 且 $1\leqslant k\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant m$，如果 $a_{ik}>0$，则有

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{m}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}a_{ik}\right)^{m}.$$

令

$$S_i=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{m}\right)^{\frac{1}{m}},\quad i\in\{1,2,\cdots,m\}$$

那么对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，都有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}^{m}}{S_i^{m}}=1\,.$$

注意到原不等式等价于

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\frac{a_{ik}}{S_i}\leqslant 1\,.$$

由均值不等式，我们有对任意的$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，都成立

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{a_{ik}}{S_i}\leqslant\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ik}^m}{S_i^m}\,,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}\frac{a_{ik}}{S_i}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ik}^m}{S_i^m}\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}^m}{S_i^m}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}1=1\,.$$

■

9. (美国) 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$，求证：

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3\,.$$

证明. 由 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$ 可知 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\leqslant 2$，因此

$$\frac{2(ab+1)}{(a+b)^2}\geqslant\frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\,,$$

即

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\right)\,,\tag{7}$$

同理可得

$$\frac{bc+1}{(b+c)^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}\right)\,,\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\right)\,.\tag{8}$$

另外由均值不等式显然有

$$\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\geqslant 3\,,\tag{9}$$

综合 (7)(8)(9) 可得

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3\,.$$

■

10. (巴尔干) 证明：对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x,y,z 都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geqslant 0\,.$$

证明. *(can-hang2007)* 注意到 $\dfrac{x(x+2)}{2x^2+1}=\dfrac{(2x+1)^2}{2(2x^2+1)}-\dfrac{1}{2}$ 等式子，所以原不等式等价于

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}+\frac{(2y+1)^2}{2y^2+1}+\frac{(2z+1)^2}{2z^2+1}\geqslant 3\,,$$

由Cauchy不等式，我们有

$$2x^2=\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}(y+z)^2\leqslant\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}(y^2+z^2)\,,$$

所以

$$\sum\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1}\geqslant 3\sum\frac{(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3}=3\,.$$

■

注记. 陈计先生提出另外一种作法，证明如下不等式

$$\sum\frac{x(x+2)}{2x^2+1}\geqslant\frac{2}{3}(x+y+z)\sum\frac{1-5y-5z}{1+2x^2}\,.$$

■

11. (克罗地亚) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

证明. 由Cauchy不等式，我们有

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a+b^2}\sum_{\text{cyc}}a^2(a+b^2)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2\,,$$

因此只需要证明

$$2(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3\left(a^2(a+b^2)+b^2(b+c^2)+c^2(c+a^2)\right)\,,$$

这等价于

$$2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2+c^2\geqslant 3(a^3+b^3+c^3)\,,\tag{10}$$

由 $a+b+c=3$ 代入 (10) 转化为

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\,,$$

由均值不等式

$$\begin{aligned}(a^4+a^2b^2)+(a^4+a^2c^2)&\geqslant 2a^3b+2a^3c\,,\\(b^4+b^2c^2)+(b^4+b^2a^2)&\geqslant 2b^3c+2b^3a\,,\\(c^4+c^2a^2)+(c^4+c^2b^2)&\geqslant 2c^3a+2c^3b\,.\end{aligned}$$

上述三式相加除以 2 即得证 . ■

12. (希腊) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=6$. 求 $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ 的最大值 .

解答. 同样利用题 (8) 注记中的结论 , 我们有

$$\begin{aligned}S^3\leqslant&((a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab))(1+1+1)(1+1+1)\\=&36\times 3\times 3\,,\end{aligned}$$

因此 $S\leqslant 3\sqrt[3]{12}$.
又当 $a=b=c=2$ 时 , $S=3\sqrt[3]{12}$, 所以 S 的最大值为 $3\sqrt[3]{12}$. ■

13. (吉尔吉斯斯坦) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 求证 :

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n\,.$$

证明. 因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, 所以由均值不等式可得

$$\begin{aligned}1+a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n+a_i\geqslant&(n+1)(a_1a_2\cdots a_na_i)^{1/(n+1)}\,,\\1-a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n-a_i\geqslant&(n-1)(a_1a_2\cdots a_n/a_i)^{1/(n-1)}\,.\end{aligned}$$

取 $i=1,2,\cdots,n$ 再将之分别累积后相乘得

$$\prod_{i=1}^n(1-a_i^2)\geqslant(n^2-1)^n\prod_{i=1}^n a_i^2\,,$$

从而

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n\,.$$

■

14. (吉尔吉斯斯坦) 设实数 a 满足 $a^5-a^3+a=2$, 求证 : $3<a^6<4$.

证明. (Babai) 显然有 $a \neq 1$，并且由 $a^4 - a^2 + 1 > 0$ 恒成立知 $a > 0$.
(a) 首先由均值不等式有 $a^3 < a^5 + a - a^3 = 2$ (因为 $a \neq 1$，等号不成立)，所以 $a^3 < 2$ 即 $a^6 < 4$.
(b) 由 $a^5 - a^3 + a = 2$ 知 $a^7 - a^5 + a^3 = 2a^2$，两式相加得 $a(a^6+1) = 2(1+a^2)$，而 $1 + a^2 > 2a$，所以 $a^6 + 1 > 4$ 即 $a^6 > 3$. ■

15. (塞尔维亚) 给定正整数 $n \geqslant 2$，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为正数序列，且对任意的 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 都有 $(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$，证明：$(n-1)a_n < 1$.

证明. (RaleD) 用数学归纳法来证明更强的不等式 $(k-1)(a_k+a_{k-1}) < 1$ 对$k \geqslant 2$ 时成立.
当 $k = 2$ 时，由于 $a_1 + a_2 = \dfrac{a_0 - a_2}{a_0 + a_1} < 1$ 显然成立.
若 $(k-1)(a_k + a_{k-1}) < 1$，则由 $(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ 可得

$$
\begin{aligned}
&(1 + a_k + a_{k-1})(1 - (a_{k+1} + a_k)) = 1 \\
\Longrightarrow & a_{k+1} + a_k = 1 - \frac{1}{1 + a_k + a_{k-1}} < 1 - \frac{k-1}{1+k-1} = \frac{1}{k}\,.
\end{aligned}
$$

因此 $k+1$时命题也成立，由数学归纳法知得证. ■

16. (伊朗) 求最小的实数 k，使得对任意的实数 a, b, c, d 都成立

$$
\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \geqslant 2(ab+bc+cd+da+ac+bd) - k\,.
$$

证明. 令 $a = b = c = d = \sqrt{3}$，可知 $k \geqslant 4$. 下面证明 $k = 4$ 时不等式成立，那么 $k = 4$ 为所求最小的实数. 为此，先证明局部不等式

$$
\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \geqslant (ab+bc+ca) - 1\,,
$$

只要证明 $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant (ab+bc+ca-1)^2$. 这等价于

$$
(abc - a - b - c)^2 \geqslant 0\,,
$$

明显成立. 利用此局部不等式立即得到

$$
\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \geqslant 2(ab+bc+cd+da+ac+bd) - 4\,.
$$

■

注记. 猜测 k 的值时可以令 $a=b=c=d=x$ 化为 x 的一元函数，利用求导来算出 k . 本题的关键是联想到局部不等式 . 另外还可以用Cauchy不等式证明局部不等式

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}=\sqrt{(a^2+1)((b+c)^2+(bc-1)^2)}\geqslant a(b+c)+bc-1\,.$$

■

17. (摩洛哥) 设 $a,b,c>0$, 求证 : $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geqslant 8$.

证明. 由均值不等式得

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}}=8\,.$$

■

18. (摩洛哥) 设 α,β,γ 为 $\triangle ABC$ 的三个角 , 其周长及外接圆半径分别为 $2p,R$.

(*a*) 求证: $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant 3\left(9\cdot\frac{R^2}{p^2}-1\right)$.

(*b*) 等号何时成立?

解答. (*a*) 利用正弦定理原不等式等价于

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\geqslant\frac{27}{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}\,,\tag{11}$$

利用题 (8) 注记中的结论 , 我们有

$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\geqslant(1+1+1)^3=27\,,$$

由此得 (11) .

(*b*) 利用题 (8) 注记中结论的证明过程 , 等号成立当且仅当

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}\Big/\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\,,$$
$$\frac{1}{\sin^2\beta}\Big/\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\,,$$
$$\frac{1}{\sin^2\gamma}\Big/\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\,.$$

由此可得 $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, 因而 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. ■

19. (马其顿) 设 $a,b,c,d>0$ 且 $a+b+c+d=1$，求证：

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}\geqslant 2\,.$$

证明. 由Cauchy不等式得

$$\text{LHS}\geqslant\frac{16}{(4a+3b+c)+(3a+b+4d)+(a+4c+3d)+(4b+3c+d)}=2\,.$$

■

后记. 错误在所难免，如有疑问请对照Mathlinks.