2011年各国数学数学奥林匹克中不等式解答(上)

本文收集2011年上半年世界各国数学奥林匹克中出现的不等式问题，资料来源Mathlinks，稍后几天将整理一份解答．

1. **(中国)** 给定正整数 $n\geqslant 4$，对任意满足
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$
的非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$；试求 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值．

2. **(越南)** 如果 $x>0$，$n\in\mathbb{N}$，求证：
$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1}\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

3. **(摩尔多瓦)** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$，且 $x_1x_2\cdots x_n=1$，求证：
$$\frac{1}{x_1(1+x_1)}+\frac{1}{x_2(1+x_2)}+\cdots+\frac{1}{x_n(1+x_n)}\geqslant\frac{n}{2}.$$

4. **(摩尔多瓦)** 设 n 为大于 1 的正整数，设
$$E=1+\sqrt{1+\frac{2^2}{3!}}+\sqrt[3]{1+\frac{3^2}{4!}}+\cdots+\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{(n+1)!}},$$
试求 E 的整数部分．

5. **(科索沃)** 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 S，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$．

6. **(科索沃)** 已知 $a,b,c>0$，求证：
$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\geqslant\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

7. **(科索沃)** 设 $a,b,c>0$，求证：
$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}}\geqslant 3\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}.$$

8. (波黑) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$. 求证 :

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leqslant 1\,.$$

9. (美国) 设 $a,b,c>0$ 且 $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\leqslant 4$, 求证 :

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\geqslant 3\,.$$

10. (巴尔干) 证明 : 对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x,y,z 都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1}\geqslant 3\,.$$

11. (克罗地亚) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$. 求证 :

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

12. (希腊) 设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=6$. 求 $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ 的最大值 .

13. (吉尔吉斯斯坦) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. 求证 :

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n\,.$$

14. (吉尔吉斯斯坦) 设实数 a 满足 $a^5-a^3+a=2$, 求证 : $3<a^6<4$.

15. (塞尔维亚) 给定正整数 $n\geqslant 2$, $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为正数序列 , 且对任意的 $k=1,2,\cdots,n-1$ 都有 $(a_{k-1}+a_k)(a_k+a_{k+1})=a_{k-1}-a_{k+1}$, 证明 : $(n-1)a_n<1$.

16. (伊朗) 求最小的实数 k ,使得对任意的实数 a,b,c,d 都成立

$$\sum_{\text{cyc}}\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\geqslant 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)-k\,.$$

17. (摩洛哥) 设 $a,b,c>0$, 求证 : $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\geqslant 8$.

18. (摩洛哥) 设 α,β,γ 为 $\triangle ABC$ 的三个角 , 其周长及外接圆半径分别为 $2p,R$.

(a) 求证: $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant 3\left(9\cdot\dfrac{R^2}{p^2}-1\right)$.

(b) 等号何时成立?

19. (马其顿) 设 $a,b,c,d>0$ 且 $a+b+c+d=1$, 求证 :

$$\frac{1}{4a+3b+c}+\frac{1}{3a+b+4d}+\frac{1}{a+4c+3d}+\frac{1}{4b+3c+d}\geqslant 2\,.$$