

2011年各国数学奥林匹克中不等式解答(上)

本文收集2011年上半年世界各国数学奥林匹克中出现的 inequality 问题, 资料来源 [Mathlinks](#), 稍后几天将整理一份解答.

1. (中国) 给定正整数 $n \geq 4$, 对任意满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n > 0$$

的非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$; 试求 $\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}$ 的最大值.

2. (越南) 如果 $x > 0, n \in \mathbb{N}$, 求证:

$$\frac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

3. (摩尔多瓦) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, 且 $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, 求证:

$$\frac{1}{x_1(1+x_1)} + \frac{1}{x_2(1+x_2)} + \cdots + \frac{1}{x_n(1+x_n)} \geq \frac{n}{2}.$$

4. (摩尔多瓦) 设 n 为大于1的正整数, 设

$$E = 1 + \sqrt{1 + \frac{2^2}{3!}} + \sqrt[3]{1 + \frac{3^2}{4!}} + \cdots + \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{(n+1)!}},$$

试求 E 的整数部分.

5. (科索沃) 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c , 面积为 S , 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

6. (科索沃) 已知 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3}}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{b^3 + c^3}}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{c^3 + a^3}}{c^2 + a^2} \geq \frac{6(ab + bc + ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

7. (科索沃) 设 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{5a^2 + 8b^2 + 5c^2}{4ac}} \geq 3\sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}.$$

8. (波黑) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a + b + c = 1$. 求证:

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

9. (美国) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$, 求证:

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

10. (巴尔干) 证明: 对任意满足 $x + y + z = 0$ 的实数 x, y, z 都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0.$$

11. (克罗地亚) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a + b + c = 3$. 求证:

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

12. (希腊) 设 $a, b, c > 0$ 且 $a + b + c = 6$. 求 $S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}$ 的最大值.

13. (吉尔吉斯斯坦) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. 求证:

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

14. (吉尔吉斯斯坦) 设实数 a 满足 $a^5 - a^3 + a = 2$, 求证: $3 < a^6 < 4$.

15. (塞尔维亚) 给定正整数 $n \geq 2$, a_0, a_1, \dots, a_n 为正数序列, 且对任意的 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 都有 $(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, 证明: $(n-1)a_n < 1$.

16. (伊朗) 求最小的实数 k , 使得对任意的实数 a, b, c, d 都成立

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \geq 2(ab+bc+cd+da+ac+bd) - k.$$

17. (摩洛哥) 设 $a, b, c > 0$, 求证: $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$.

18. (摩洛哥) 设 α, β, γ 为 $\triangle ABC$ 的三个角, 其周长及外接圆半径分别为 $2p, R$.

(a) 求证: $\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma \geq 3 \left(9 \cdot \frac{R^2}{p^2} - 1\right).$

(b) 等号何时成立?

19. (马其顿) 设 $a, b, c, d > 0$ 且 $a + b + c + d = 1$, 求证:

$$\frac{1}{4a+3b+c} + \frac{1}{3a+b+4d} + \frac{1}{a+4c+3d} + \frac{1}{4b+3c+d} \geq 2.$$