

## 2011年各国数学奥林匹克中不等式解答(上)

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2011年上半年各国赛题中所出现的不等式问题的参考解答

关键词 不等式 Mathlinks

1. (中国) 给定正整数  $n \geq 4$ , 对任意满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n > 0$$

的非负实数  $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ ; 试求  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}$  的最大值.

证明. 不妨设  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n - 1$ . 注意到

$$\sum_{i=1}^n (a_i + (n-1)b_i - n + 1)^2 \geq 0,$$

于是可得

$$2(n-1) \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq n(n-1)^2 - (n-1)^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

因此, 由  $n \geq 4$  得

$$(n-2) \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq n(n-1) - (n-1) \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{n-1}.$$

又因为

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = (n-1)^2,$$

所以

$$n(n-1) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{n-1} \geq \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

从而

$$(n-2) \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2 - (n-1) \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

即

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)} \leq n - 1.$$

令  $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0, a_n = n - 1, b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1, b_n = 0$ , 此时

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)} = n - 1,$$

所以  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}$  的最大值为  $n - 1$ . ■

2. (越南) 如果  $x > 0, n \in \mathbb{N}$ , 求证:

$$\frac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

证明. 我们里用数学归纳法来证明.

当  $n = 1$  时, 不等式明显成立.

假设  $n = k$  时, 不等式成立. 当  $n = k + 1$  时, 由于归纳假设, 有

$$\frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}.$$

因此要证明

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3},$$

只要证

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \geq \frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1}. \quad (1)$$

不等式 (1) 等价于

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 (x^{k+1} + 1)^2 \geq x(x^{k+2} + 1)(x^k + 1),$$

两边同时减去  $x(x^{k+1} + 1)^2$ , 即要证

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 (x^{k+1} + 1)^2 \geq x^{k+1}(x-1).$$

这等价于  $(x-1)^2(x^{k+1} - 1)^2 \geq 0$ , 明显成立.

综上所述, 由数学归纳法, 不等式得证. ■

3. (摩尔多瓦) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ , 且  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ , 求证:

$$\frac{1}{x_1(1+x_1)} + \frac{1}{x_2(1+x_2)} + \cdots + \frac{1}{x_n(1+x_n)} \geq \frac{n}{2}.$$

证明. 显然原不等式等价于

$$\frac{1+x_1+x_1^2}{x_1(1+x_1)} + \frac{1+x_2+x_2^2}{x_2(1+x_2)} + \cdots + \frac{1+x_n+x_n^2}{x_n(1+x_n)} \geq \frac{3n}{2}. \quad (2)$$

注意到  $4(1+x_i+x_i^2) \geq 3(1+x_i)^2$  对任意的  $i = 1, 2, \dots, n$  都成立, 因此要证明 (2) 只需要证明

$$\frac{3}{4} \left( \frac{1+x_1}{x_1} + \frac{1+x_2}{x_2} + \cdots + \frac{1+x_n}{x_n} \right) \geq \frac{3n}{2},$$

即

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq n, \quad (3)$$

由  $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$  及均值不等式易知 (3) 成立. ■

4. (摩尔多瓦) 设  $n$  为大于 1 的正整数, 设

$$E = 1 + \sqrt{1 + \frac{2^2}{3!}} + \sqrt[3]{1 + \frac{3^2}{4!}} + \cdots + \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{(n+1)!}},$$

试求  $E$  的整数部分.

解答. 令  $a_k = \sqrt[k]{1 + \frac{k^2}{(k+1)!}} - 1$ , 显然  $a_k > 0$ . 于是由二项式定理有

$$1 + \frac{k^2}{(k+1)!} = (1 + a_k)^k \geq 1 + k a_k \implies a_k \leq \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

因此有

$$n < E \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + 1 + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)!},$$

所以  $E$  的整数部分为  $n$ . ■

5. (科索沃) 设  $\triangle ABC$  的三边长为  $a, b, c$ , 面积为  $S$ , 求证:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ .

证明. 我们来证明更强的费哈(Finsler-Hadriiger)不等式即

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S. \quad (4)$$

因为  $a, b, c$  为三角形边长, 于是存在正整数  $x, y, z$  使得  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ . 此时有

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) &= 4(xy + yz + zx), \\ 4\sqrt{3}S &= 4\sqrt{3xyz(x + y + z)} \text{ (海伦公式)}. \end{aligned}$$

因此 (4) 等价于  $xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}$ , 平方后等价于

$$(xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0,$$

这明显成立, 从而 (4) 得证. ■

注记. 由于

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \geq 3(abc)^{2/3} \geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2),$$

可得一系列不等式. 其中最后一个不等式可由 Schur 及均值不等式推得, 即

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 3(abc)^{2/3} &\geq \sum_{\text{cyc}} (ab)^{2/3} (a^{2/3} + b^{2/3}) \\ &\geq 2 \sum_{\text{cyc}} (ab)^{2/3} a^{1/3} b^{1/3} = 2 \sum_{\text{cyc}} ab. \end{aligned}$$

用证明中的代换可将其化为 Carlson 不等式: 设  $x, y, z > 0$ , 那么

$$\left( \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \right)^{1/3} \geq \left( \frac{xy + yz + zx}{3} \right)^{1/2}.$$

另外注意到分解因式

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \prod_{\text{cyc}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}), \quad (5)$$

令  $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y, \sqrt{c} = z$ , 那么  $x, y, z$  可以构成一个锐角三角形边长. 利用 (5) 及费哈不等式可得

$$(x + y + z) \prod_{\text{cyc}} (x + y - z) \geq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2) \prod_{\text{cyc}} (x^2 + y^2 - z^2)},$$

利用此结论易得1992年波兰数学奥林匹克一试题: 设  $\triangle ABC$  的三边长为  $a, b, c$ , 求证:

$$\prod_{\text{cyc}} (a + b - c)^2 \geq \prod_{\text{cyc}} (a^2 + b^2 - c^2).$$
■

6. (科索沃) 已知  $a, b, c > 0$ , 求证:

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2} \geq \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

证明. 由Cauchy不等式有  $\sqrt{(a^3+b^3)(a+b)} \geq a^2+b^2$ , 我们只需要证明

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}},$$

这等价于

$$(a+b+c) \sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq 6(ab+bc+ca).$$

再由Cauchy不等式有  $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{bc}$ , 我们只需要证明

$$(a+b+c) \sum_{\text{cyc}} (a + \sqrt{bc}) \geq 6(ab+bc+ca),$$

即

$$\sum_{\text{cyc}} (a^2 + a\sqrt{bc}) + \sum_{\text{cyc}} \sqrt{bc}(b+c) \geq 4(ab+bc+ca). \quad (6)$$

由Schur不等式我们有

$$\sum_{\text{cyc}} a(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c}) \geq 0 \implies \sum_{\text{cyc}} (a^2 + a\sqrt{bc}) \geq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{bc}(b+c),$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} (a^2 + a\sqrt{bc}) + \sum_{\text{cyc}} \sqrt{bc}(b+c) &\geq 2 \sum_{\text{cyc}} \sqrt{bc}(b+c) \geq 2 \sum_{\text{cyc}} \sqrt{bc} \cdot \sqrt{bc} \\ &= 4(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

于是 (6) 得证. ■

7. (科索沃) 设  $a, b, c > 0$ , 求证:

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{5a^2+8b^2+5c^2}{4ac}} \geq 3 \sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}}.$$

证明. 由Cauchy不等式及均值不等式有

$$\begin{aligned} 5a^2+8b^2+5c^2 &\geq 4(a^2+b^2)+4(b^2+c^2) \\ &\geq 2(a+b)^2+2(b+c)^2 \\ &\geq 4(a+b)(b+c), \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{5a^2 + 8b^2 + 5c^2}{4ac}} \geq \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}} \geq 3 \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

只需要证明

$$\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}} \geq \sqrt[9]{\frac{8(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(abc)^2}},$$

等价于  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ , 即  $\sum_{\text{cyc}} a(b-c)^2 \geq 0$ , 明显成立. ■

8. (波黑) 设  $a, b, c > 0$  且  $a + b + c = 1$ . 求证:

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

证明. 因为  $a(1+b-c) + b(1+c-a) + c(1+a-b) = a + b + c = 1$ , 所以

$$\begin{aligned} 1 &= (a(1+b-c) + b(1+c-a) + c(1+a-b))(a+b+c)(a+b+c) \\ &\geq \left( a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \right)^3, \end{aligned}$$

从而

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1. \quad \text{■}$$

注记. 题中用到这么一个非常有用的结论: 对任意的  $i, k \in \mathbb{N}$  且  $1 \leq k \leq n$ ,  $1 \leq i \leq m$ , 如果  $a_{ik} > 0$ , 则有

$$\prod_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^m \right) \geq \left( \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ik} \right)^m.$$

令

$$S_i = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik}^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

那么对任意的  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 都有

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}^m}{S_i^m} = 1.$$

注意到原不等式等价于

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{a_{ik}}{S_i} \leq 1.$$

由均值不等式, 我们有对任意的  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 都成立

$$\prod_{i=1}^m \frac{a_{ik}}{S_i} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ik}^m}{S_i^m},$$

所以

$$\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{a_{ik}}{S_i} \leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ik}^m}{S_i^m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{a_{ik}^m}{S_i^m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1 = 1.$$

■

9. (美国) 设  $a, b, c > 0$  且  $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$ , 求证:

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

证明. 由  $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$  可知  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$ , 因此

$$\frac{2(ab+1)}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 + (c+a)(c+b)}{(a+b)^2},$$

即

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} \right), \quad (7)$$

同理可得

$$\frac{bc+1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} \right), \quad \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2} \right). \quad (8)$$

另外由均值不等式显然有

$$\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2} \geq 3, \quad (9)$$

综合 (7)(8)(9) 可得

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

■

10. (巴尔干) 证明: 对任意满足  $x + y + z = 0$  的实数  $x, y, z$  都有

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0.$$

证明. (can-hang2007) 注意到  $\frac{x(x+2)}{2x^2+1} = \frac{(2x+1)^2}{2(2x^2+1)} - \frac{1}{2}$  等式子, 所以原不等式等价于

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3,$$

由Cauchy不等式, 我们有

$$2x^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}(y+z)^2 \leq \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}(y^2+z^2),$$

所以

$$\sum \frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} \geq 3 \sum \frac{(2x+1)^2}{4(x^2+y^2+z^2)+3} = 3.$$

■

注记. 陈计先生提出另外一种作法, 证明如下不等式

$$\sum \frac{x(x+2)}{2x^2+1} \geq \frac{2}{3}(x+y+z) \sum \frac{1-5y-5z}{1+2x^2}.$$

■

11. (克罗地亚) 设  $a, b, c > 0$  且  $a + b + c = 3$ . 求证:

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

证明. 由Cauchy不等式, 我们有

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+b^2} \sum_{\text{cyc}} a^2(a+b^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2,$$

因此只需要证明

$$2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^2(a+b^2) + b^2(b+c^2) + c^2(c+a^2)),$$

这等价于

$$2(a^4+b^4+c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(a^3+b^3+c^3), \quad (10)$$

由  $a + b + c = 3$  代入 (10) 转化为

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b),$$



由均值不等式

$$\begin{aligned}(a^4 + a^2b^2) + (a^4 + a^2c^2) &\geq 2a^3b + 2a^3c, \\(b^4 + b^2c^2) + (b^4 + b^2a^2) &\geq 2b^3c + 2b^3a, \\(c^4 + c^2a^2) + (c^4 + c^2b^2) &\geq 2c^3a + 2c^3b.\end{aligned}$$

上述三式相加除以 2 即得证. ■

12. (希腊) 设  $a, b, c > 0$  且  $a + b + c = 6$ . 求  $S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}$  的最大值.

解答. 同样利用题 (8) 注记中的结论, 我们有

$$\begin{aligned}S^3 &\leq ((a^2 + 2bc) + (b^2 + 2ca) + (c^2 + 2ab))(1 + 1 + 1)(1 + 1 + 1) \\&= 36 \times 3 \times 3,\end{aligned}$$

因此  $S \leq 3\sqrt[3]{12}$ .

又当  $a = b = c = 2$  时,  $S = 3\sqrt[3]{12}$ , 所以  $S$  的最大值为  $3\sqrt[3]{12}$ . ■

13. (吉尔吉斯斯坦) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  且  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . 求证:

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

证明. 因为  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ , 所以由均值不等式可得

$$\begin{aligned}1 + a_i &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_i \geq (n + 1)(a_1 a_2 \cdots a_n a_i)^{1/(n+1)}, \\1 - a_i &= a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_i \geq (n - 1)(a_1 a_2 \cdots a_n / a_i)^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

取  $i = 1, 2, \dots, n$  再将之分别累积后相乘得

$$\prod_{i=1}^n (1 - a_i^2) \geq (n^2 - 1)^n \prod_{i=1}^n a_i^2,$$

从而

$$\left(\frac{1}{a_1^2} - 1\right) \left(\frac{1}{a_2^2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{a_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n. \quad \blacksquare$$

14. (吉尔吉斯斯坦) 设实数  $a$  满足  $a^5 - a^3 + a = 2$ , 求证:  $3 < a^6 < 4$ .

证明. (Babai) 显然有  $a \neq 1$ , 并且由  $a^4 - a^2 + 1 > 0$  恒成立知  $a > 0$ .

(a) 首先由均值不等式有  $a^3 < a^5 + a - a^3 = 2$  (因为  $a \neq 1$ , 等号不成立), 所以  $a^3 < 2$  即  $a^6 < 4$ .

(b) 由  $a^5 - a^3 + a = 2$  知  $a^7 - a^5 + a^3 = 2a^2$ , 两式相加得  $a(a^6 + 1) = 2(1 + a^2)$ , 而  $1 + a^2 > 2a$ , 所以  $a^6 + 1 > 4$  即  $a^6 > 3$ . ■

15. (塞尔维亚) 给定正整数  $n \geq 2$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  为正数序列, 且对任意的  $k = 1, 2, \dots, n-1$  都有  $(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ , 证明:  $(n-1)a_n < 1$ .

证明. (RaleD) 用数学归纳法来证明更强的不等式  $(k-1)(a_k + a_{k-1}) < 1$  对  $k \geq 2$  时成立.

当  $k = 2$  时, 由于  $a_1 + a_2 = \frac{a_0 - a_2}{a_0 + a_1} < 1$  显然成立.

若  $(k-1)(a_k + a_{k-1}) < 1$ , 则由  $(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$  可得

$$\begin{aligned} (1 + a_k + a_{k-1})(1 - (a_{k+1} + a_k)) &= 1 \\ \implies a_{k+1} + a_k &= 1 - \frac{1}{1 + a_k + a_{k-1}} < 1 - \frac{k-1}{1+k-1} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

因此  $k+1$  时命题也成立, 由数学归纳法知得证. ■

16. (伊朗) 求最小的实数  $k$ , 使得对任意的实数  $a, b, c, d$  都成立

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \geq 2(ab + bc + cd + da + ac + bd) - k.$$

证明. 令  $a = b = c = d = \sqrt{3}$ , 可知  $k \geq 4$ . 下面证明  $k = 4$  时不等式成立, 那么  $k = 4$  为所求最小的实数. 为此, 先证明局部不等式

$$\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \geq (ab + bc + ca) - 1,$$

只要证明  $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (ab + bc + ca - 1)^2$ . 这等价于

$$(abc - a - b - c)^2 \geq 0,$$

明显成立. 利用此局部不等式立即得到

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \geq 2(ab + bc + cd + da + ac + bd) - 4. \quad \blacksquare$$

注记. 猜测  $k$  的值时可以令  $a = b = c = d = x$  化为  $x$  的一元函数, 利用求导来算出  $k$ . 本题的关键是联想到局部不等式. 另外还可以用Cauchy不等式证明局部不等式

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} = \sqrt{(a^2+1)((b+c)^2 + (bc-1)^2)} \geq a(b+c) + bc - 1.$$

■

17. (摩洛哥) 设  $a, b, c > 0$ , 求证:  $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$ .

证明. 由均值不等式得

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot 2\sqrt{\frac{c}{a}} = 8.$$

■

18. (摩洛哥) 设  $\alpha, \beta, \gamma$  为  $\triangle ABC$  的三个角, 其周长及外接圆半径分别为  $2p, R$ .

(a) 求证:  $\cot^2 \alpha + \cot^2 \beta + \cot^2 \gamma \geq 3 \left(9 \cdot \frac{R^2}{p^2} - 1\right)$ .

(b) 等号何时成立?

解答. (a) 利用正弦定理原不等式等价于

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma} \geq \frac{27}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2}, \quad (11)$$

利用题 (8) 注记中的结论, 我们有

$$\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \geq (1 + 1 + 1)^3 = 27,$$

由此得 (11).

(b) 利用题 (8) 注记中结论的证明过程, 等号成立当且仅当

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \alpha} / \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \\ \frac{1}{\sin^2 \beta} / \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \\ \frac{1}{\sin^2 \gamma} / \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) &= \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}. \end{aligned}$$

由此可得  $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$ , 因而  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

■

19. (马其顿) 设  $a, b, c, d > 0$  且  $a + b + c + d = 1$ , 求证:

$$\frac{1}{4a + 3b + c} + \frac{1}{3a + b + 4d} + \frac{1}{a + 4c + 3d} + \frac{1}{4b + 3c + d} \geq 2.$$

证明. 由Cauchy不等式得

$$\text{LHS} \geq \frac{16}{(4a + 3b + c) + (3a + b + 4d) + (a + 4c + 3d) + (4b + 3c + d)} = 2.$$



后记. 错误在所难免, 如有疑问请对照Mathlinks.