2011 年高中数学联赛天津市预赛参考答案与评分标准

一. 选择题 (每小题 6 分, 共 36 分)

1. 如果 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时总有 $\sin x > kx$ 成立, 则实数 k 的取值范围是

   (A). $(-\infty, \frac{\pi}{2}]$　　(B). $(-\infty, \frac{\pi}{2})$　　(C). $(-\infty, \frac{2}{\pi}]$　　(D). $(-\infty, \frac{2}{\pi})$

   解: 作出 $y = \sin x$ 和 $y = kx$ 的图像, 易知选 (C).

2. 已知函数 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 将 $y = f(x)$ 的图像绕 $(1, -1)$ 逆时针旋转 $90°$, 所得曲线的方程是

   (A). $y = f^{-1}(-x) - 2$　　(B). $y = -f^{-1}(-x) - 2$

   (C). $y = f^{-1}(-x+1) - 1$　　(D). $y = f^{-1}(-x-1) + 1$

   解: 点 $(t, f(t))$ 绕 $(1, -1)$ 旋转 $90°$, 得到 $(-f(t), t-2)$. 令 $x = -f(t)$, 则 $t = f^{-1}(-x)$, 因此 $y = t - 2 = f^{-1}(-x) - 2$. 选 (A).

3. 设 n 为正整数, $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 则

   (A). $x^y > y^x$　　(B). $x^y = y^x$　　(C). $x^y < y^x$　　(D). 以上都有可能

   解: 由于 $x = (n+1)^n/n^n$, $y = (n+1)^{n+1}/n^{n+1}$, 取对数易得 $x^y = y^x$. 故选 (B).

4. 若直线 $y = x - 3$ 与曲线 $y = \mathrm{e}^{x+a}$ 相切, 则实数 a 的值是

   (A). -4　　(B). -2　　(C). 2　　(D). 4

   解: 设切点的横坐标为 x_0. 在 $x = x_0$ 处, 曲线 $y = \mathrm{e}^{x+a}$ 的斜率为 e^{x_0+a}. 而直线 $y = x - 3$ 的斜率为 1. 因此 $\mathrm{e}^{x_0+a} = 1$, 得 $x_0 = -a$. 因此, 切点的纵坐标 $\mathrm{e}^{x_0+a} = 1 = x_0 - 3$, 即 $1 = -a - 3$, 所以 $a = -4$, 选 (A).

5. 在半径为 1 的 $\odot O$ 上, 取一个定点 A 和一个动点 B. 设点 P 满足 $AP \parallel OB$ 且 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$, 则 P 点的轨迹是

   (A). 椭圆　　(B). 抛物线　　(C). 双曲线　　(D). 以上都有可能

   解: 不妨设 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $P(x,y)$, 由于 $AP \parallel OB$, 可设 $B(k(x-1), ky)$. 将这些坐标代入 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$ 可得 $k = x/[(x-1)^2 + y^2]$. 最后, 利用 B 在 $\odot O$ 上, 即可得到 (x, y) 满足的方程为 $x^2 = (x-1)^2 + y^2$, 即 $y^2 = 2x - 1$, 所以 P 的轨迹是抛物线. 选 (B).

6. 将 $(a+b+c+d)^9$ 展开之后再合并同类项, 所得的多项式的项数是

   (A). C_9^4　　(B). C_9^3　　(C). C_{12}^4　　(D). C_{12}^3

   解: 所得多项式中每一项都形如 $ka^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$, 其中 $k > 0$,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \quad x_i \geq 0.$$

易知上式共有 $C_{9+4-1}^{4-1}=C_{12}^{3}$ 组整数解, 因此选 (D).

二. 填空题 (每小题 9 分, 共 54 分)

1. 九个正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_9$ 构成等比数列, 且 $a_1+a_2=\frac{3}{4}$, $a_3+a_4+a_5+a_6=15$. 则 $a_7+a_8+a_9$ 等于 __________.

   解: 设公比为 q, 则由已知条件可得
$$a_1(1+q)=\frac{3}{4},\quad a_1q^2(1+q+q^2+q^3)=15,$$
   这两式相比, 得 $q^2(1+q^2)=20$, 从而 $q=2$, $a_1=1/4$. 这样 $a_7+a_8+a_9=a_1q^6(1+q+q^2)=$ __112__.

2. 设 O-$ABCD$ 是正四棱锥, 其中 $OA=\sqrt{3}$, $BC=2$. 以 O 为球心, 以 1 为半径作一个球, 则这个球与正四棱锥相交部分的体积是__________.

   解: 考虑棱长为 2 的正方体, 将 O 置于正方体的中心, 则 $ABCD$ 恰好可以与正方体的一个面重合. 于是, 由对称性可知, 所求体积是球体体积的 1/6, 即 __$2\pi/9$__.

3. 若实数 x, α, β 满足 $x=\log_3\tan\alpha=-\log_3\tan\beta$, 且 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$, 则 x 的值是__________.

   解: 记 $\tan\alpha=y$, 则由第一个条件得 $\tan\beta=1/y$. 又由第二个条件, 可知
$$\tan\beta=\tan(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{y-1/\sqrt{3}}{1+y/\sqrt{3}},$$
   从而得方程
$$1/y=\frac{y-1/\sqrt{3}}{1+y/\sqrt{3}},$$
   取其正根, 得 $y=\sqrt{3}$. 因此 $x=\log_3 y=$ __1/2__.

4. 设 A, B 是双曲线的两个焦点, C 在双曲线上. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长成等差数列, 且 $\angle ACB=120°$, 则该双曲线的离心率为__________.

   解: 依题意, 可设 $|AC|+|AB|=2|BC|$, 且
$$|AC|^2+|BC|^2-|AB|^2=2|AC|\cdot|BC|\cdot\cos 120°,$$
   由此可知 $|AC|:|AB|:|BC|=3:7:5$. 这样, 双曲线的离心率为 $7/(5-3)=$ __7/2__.

5. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,\infty)$, 且满足 $f(x)-2xf\left(\frac{1}{x}\right)+3x^2=0$, 则 $f(x)$ 的最小值是__________.

解: 由 $f(x)-2xf\left(\frac{1}{x}\right)+3x^2=0$ 可得

$$f\Big(\frac{1}{x}\Big)-\frac{2}{x}f(x)+\frac{3}{x^2}=0.$$

联立这两式解得 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$. 由平均值不等式

$$x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 3\Big(x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\Big)^{1/3}=3.$$

且当 $x=1$ 时等号成立. 因此, $f(x)$ 的最小值为 $\underline{\quad 3 \quad}$.

6. 复数 z 满足 $|z|(3z+2i)=2(iz-6)$, 则 $|z|$ 等于__________.

解: 直接计算可知

$$|3z+2i|^2-|iz-6|^2=8(|z|^2-4).$$

由此可见, 若 $|z|>2$, 则 $|3z+2i|>|iz-6|$, 进而 $||z|(3z+2i)|>|2(iz-6)|$, 这与已知条件矛盾; 同理, 若 $|z|<2$, 则 $||z|(3z+2i)|<|2(z+6i)|$, 也矛盾. 因此 $|z|=\underline{\quad 2 \quad}$.

另解: 设 $|z|=r$, 代入条件, 得 $z=-(12+2ri)/(3r-2i)$. 因此

$$r^2=|z|^2=\frac{12^2+(2r)^2}{(3r)^2+(-2)^2}.$$

化简得 $r^4=16$, 因此 $r=2$, 即 $|z|=\underline{\quad 2 \quad}$.

三. 解答题 (每小题 20 分, 共 60 分. 每小题只设 0 分, 5 分, 10 分, 15 分, 20 分五档)

1. 在四面体 $ABCD$ 中, $AD\perp$ 平面BCD, $\angle ABD=\angle BDC=\theta<45^\circ$. 已知 E 是 BD 上一点, 满足 $CE\perp BD$ 且 $BE=AD=1$.

(1) 证明: $\angle BAC=\theta$.

(2) 若点 D 到平面 ABC 的距离为 $4/13$, 求 $\cos\theta$ 的值.

解: 由于 $AD=BE=1$, 有 $AB=1/\sin\theta$, $BD=\cos\theta/\sin\theta$, $DE=\cos\theta/\sin\theta-1$, 以及

$$CD=\frac{DE}{\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}.$$

进而得到

$$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{1+\big(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\big)^2}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1.$$

……………………………………………(5 分)

现在, 设 $\angle BAC=\alpha$, 分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中用余弦定理, 有

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha,$$
$$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\theta.$$

以上两式相减, 并注意 $AB^2=BD^2+AD^2$, $AC^2=CD^2+AD^2$, 则可得到

$$2AD^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha+2BD\cdot CD\cdot\cos\theta=0,$$

从而

$$\cos\alpha=\frac{AD^2+BD\cdot CD\cdot\cos\theta}{AB\cdot AC}=\frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)\cdot\cos\theta}{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-1\right)}=\cos\theta.$$

这就证明了 $\angle BAC=\theta$.

……………………………………………(10 分)

注意四面体 $ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}AD\cdot S_{BCD}=\frac{1}{6}AD\cdot BD\cdot CD\cdot\sin\theta,$$

而 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta,$$

因此, 点 D 到平面 ABC 的距离为

$$\frac{3V}{S}=\frac{AD\cdot BD\cdot CD}{AB\cdot AC}=\frac{\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta}{1-\sin\theta\cos\theta}.$$

……………………………………………(15 分)

令上式等于 $4/13$, 解得 $\cos\theta=4/5$.

……………………………………………(20 分)

2. 设 a, b, c, d, e, f 为实数, 且 $ax^2+bx+c\geq|dx^2+ex+f|$ 对任意实数 x 成立, 证明: $4ac-b^2\geq|4df-e^2|$.

解: 若 $a=0$, 则 $b=0$, $d=0$, $e=0$, 结论自动成立.

当 $a\neq0$ 时, 由于 $ax^2+bx+c\geq0$, 因此 $a>0$, $b^2-4ac\leq0$. 进一步, 不妨设 $d>0$, 则由 $ax^2+bx+c\geq dx^2+ex+f$ 可知 $a\geq d>0$.

……………………………………………(5 分)

记 $g(x)=dx^2+ex+f$. 我们分两种情况讨论:

(i). 若 $e^2-4df>0$, 则由 $ax^2+bx+c\geq|g(x)|$ 可得

$$ax^2+bx+c\pm(dx^2+ex+f)\geq 0,$$

因此

$$(b+e)^2-4(a+d)(c+f)\leq 0,\quad (b-e)^2-4(a-d)(c-f)\leq 0,$$

这两式相加得

$$(b^2-4ac)+(e^2-4df)\leq 0,$$

因此这时有 $4ac-b^2\geq|4df-e^2|$.

……………………………………………(15 分)

(i). 若 $e^2-4df\leq 0$, 则 $g(x)\geq 0$, 且 $g(x)$ 的最小值为 $\frac{4df-e^2}{4d}$.

在已知条件中取 $x=-b/(2a)$, 则得到

$$\frac{4ac-b^2}{4a}\geq g\big(-\frac{b}{2a}\big)\geq\frac{4df-e^2}{4d}.$$

因此 $4ac-b^2\geq 4df-e^2$, 即 $4ac-b^2\geq|4df-e^2|$.

……………………………………………(20 分)

3. 设数列 $\{a_n\}$ 定义为

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2+1},\ \ n\geq 1.$$

(1) 证明: 当 $n>1$ 时, $a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$;

(2) 证明: $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

解: (1). 由条件可知, $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_2=4$. 将递推公式移项并平方, 得

$$(a_{n+1}-2a_n)^2=3a_n^2+1,\quad 即\quad a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_n+a_n^2=1.$$

进而有

$$a_n^2-4a_na_{n-1}+a_{n-1}^2=1.$$

以上两式相减, 并分解因式, 得

$$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-4a_n)=0.$$

因此, $a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$.

. . . . (5 分)

(2). 结合 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ 和 $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ 即可得到

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n - \beta^n).$$

其中 $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$.

. . . . (10 分)

下面估计 $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$. 由于 $\alpha > 1 > \beta > 0$, 且 $\alpha\beta = 1$, 所以, 由

$$\alpha^k - \beta^k > \alpha(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}) = \frac{1}{\beta}(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}), \quad k \geq 2$$

可得

$$\frac{1}{a_k} < \frac{\beta}{a_{k-1}}, \quad k \geq 2.$$

这样, 当 $n > 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{a_k} \\ &< \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\beta}{a_{k-1}} \\ &= \frac{1}{a_1} + \beta \cdot \left(S_n - \frac{1}{a_n}\right) < \frac{1}{a_1} + \beta S_n, \end{aligned}$$

所以

$$S_n < \frac{1}{(1-\beta)a_1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

证毕.

. . . . (20 分)

注: 第 1 问也直接用数学归纳法证明 $a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha^n - \beta^n)$.