

2011年北京大学保送生考试试题参考解答

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2011年北京大学保送生考试数学试题的参考解答

关键词 保送 数学

1. 点 P 为双曲线上任一点, PQ 为双曲线在 P 处的切线, F_1, F_2 为双曲线的焦点.
证明: PQ 平分 $\angle F_1PF_2$.

证明. 由于对称性, 不妨设 P 在第一象限, Q 在 x 轴上, F_1, F_2 分别为左右焦点, 双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

于是可令 P 的坐标为 $(a \cosh t, b \sinh t)$, 其中

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

则切线 PQ 方程为

$$\frac{x \cosh t}{a} - \frac{y \sinh t}{b} = 1,$$

于是 Q 点的坐标为 $\left(\frac{a}{\cosh t}, 0\right)$.

注意到

$$\begin{aligned} \frac{|PF_1|^2}{|PF_2|^2} &= \frac{(a \cosh t + c)^2 + b^2 \sinh^2 t}{(a \cosh t - c)^2 + b^2 \sinh^2 t} \\ &= \frac{(a \cosh t + c)^2 + (c^2 - a^2)(\cosh^2 t - 1)}{(a \cosh t - c)^2 + (c^2 - a^2)(\cosh^2 t - 1)} \\ &= \left(\frac{a \cosh t + c}{a \cosh t - c}\right)^2 = \frac{|QF_1|^2}{|QF_2|^2}, \end{aligned}$$

于是

$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|},$$

因此 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$. ■

2. 在 $\triangle ABC$ 中存在一点 O , 满足 $\angle BAO = \angle CAO = \angle CBO = \angle ACO$, 求证:
 $\triangle ABC$ 的三边长组成等比数列.

证明. 显然有

$$\frac{OA}{OB} \frac{OB}{OC} \frac{OC}{OA} = 1,$$

由正弦定理得

$$\frac{\sin \angle ABO}{\sin \angle BAO} \frac{\sin \angle OCB}{\sin \angle OBC} \frac{\sin \angle OAC}{\sin \angle OCA} = 1,$$

利用已知条件, 可得

$$\sin \frac{2B-A}{2} \sin \frac{2C-A}{2} = \sin^2 \frac{A}{2},$$

变形得

$$\cos(C-B) - \cos(C+B-A) = 1 - \cos A,$$

即

$$\cos(C-B) - \cos(C+B) = 1 - \cos 2A \iff \sin C \sin B = \sin^2 A.$$

■

3. 是否存在实数 a , 使得 $f(x) = ax + \sin x$ 存在两切线互相垂直.

解答. 令 $a = 0$, 则 $f(x) = \sin x$, 它在 $x = 0$ 处的切线为 $y = x$. 另外它在 $x = \pi$ 处的切线为 $y = -(x - \pi)$. 显然这两条切线互相垂直. ■

注记. 个人认为题目应该是问是否存在非零实数 a 满足条件, 答案是不存在, 这个可以转化为一元二次方程的问题, 大家可以试试手. ■

4. 设 p, q 为实数, $f(x) = x^2 + px + q$, 如果 $f(f(x)) = 0$ 只有一个实根, 求证: $p, q \geq 0$.

证明. 显然 $f(x) = 0$ 有实根, 不妨设之为 α, β (可以相等), 则

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta), \quad f(f(x)) = (f(x) - \alpha)(f(x) - \beta). \quad (1)$$

如果 α, β 中一者大于 0, 不妨设为 α , 那么由于 $f(x)$ 开口向上且 $f(x) = 0$ 有实根, 那么 $f(x) - \alpha = 0$ 必然有两不等实根, 由 (1) 知这与 $f(f(x)) = 0$ 只有一个实根矛盾. 因此 α, β 都不大于 0, 从而由韦达定理知

$$p = -(\alpha + \beta) \geq 0, \quad q = \alpha\beta \geq 0.$$

■

5. 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. 若

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

求证: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \frac{3}{2}$.

证明. 由题意知 $\triangle ABC$ 的重心为原点, 即与外心重合, 所以 $\triangle ABC$ 为正三角形, 所以可以设 A, B, C 对应辐角 $\theta, \theta + \frac{2\pi}{3}, \theta + \frac{4\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= \cos^2 \theta + \cos^2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos^2 \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \cos^2 \theta + \left(-\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right)^2 \\ &= \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \\ &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

易得此时

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{3}{2}.$$



2009年北京大学保送生考试试题参考解答

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2009年北京大学保送生考试数学试题的参考解答

关键词 保送 数学

1. 圆内接四边形 $ABCD$, $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 4$, 求四边形 $ABCD$ 外接圆半径.

解答. 由 $\angle ABC + \angle ADC = \pi$ 及余弦定理有

$$\frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} + \frac{AD^2 + DC^2 - CA^2}{2AD \cdot DC} = \cos \angle ABC + \cos \angle ADC = 0.$$

代入数值得 $AC = \sqrt{\frac{55}{7}}$, 所以

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{5}{7} \implies \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{24}}{7},$$

因此由正弦定理可得四边形 $ABCD$ 外接圆半径

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{2310}}{24}.$$

■

2. 已知一正无穷等差数列中有 3 项: 13, 25, 41. 求证: 2009 为该数列中某一项.

证明. 设 $a_n = a_0 + nd$ 为满足题意的数列, 那么 $d \geq 0$. 否则当 n 足够大时 a_n 会变成负数. 令 13, 25, 41 分别为这数列的 k_1, k_2, k_3 项, 因此有

$$13 = a_0 + k_1 d, \tag{1}$$

$$25 = a_0 + k_2 d, \tag{2}$$

$$41 = a_0 + k_3 d, \tag{3}$$

由 (1)(2)(3) 知 $(k_3 + k_1 - 2k_2)d = 4$. 又 $d \geq 0$, 所以 $k_3 + k_1 - 2k_2$ 为正整数, 于是由

$$2009 = 41 + 4 \times 492 = 41 + 492(k_3 + k_1 - 2k_2)d$$

知 2009 为该数列中某一项.

■

3. 是否存在实数 x , 使得 $\tan x + \sqrt{3}$ 与 $\cot x + \sqrt{3}$ 都是有理数.

解答. 不存在. 反设存在这样的实数 x , 那么令

$$p = \tan x + \sqrt{3}, \quad q = \cot x + \sqrt{3},$$

其中 p, q 为有理数.

于是 $(p - \sqrt{3})(q - \sqrt{3}) = \tan x \cot x = 1$, 得

$$(p + q)\sqrt{3} = pq + 2.$$

由于 $p + q, pq + 2$ 为有理数, 因此只能是 $p + q = 0, pq + 2 = 0$, 解得

$$|p| = |q| = \sqrt{2},$$

这与 p, q 为有理数矛盾, 因此不存在这样的实数 x . ■

4. 对任意的实数 x , 恒成立 $a \cos x + b \cos 2x \geq -1$, 求 $a + b$ 的最大值.

解答. 令 $t = \cos x$, 问题转化为:

对任意的 $t \in [-1, 1]$, 都有 $f(t) = 2bt^2 + at + 1 - b \geq 0$, 求 $a + b$ 的最大值.

令 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}$, 此时

$$f(t) = \frac{4}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} = \frac{4(t+1)^2}{3} \geq 0, \quad a + b = 2,$$

下面我们证明 $a + b \leq 2$, 那么 $a + b$ 的最大值为 2.

令 $t = 1, 0, -1$, 得

$$1 - b \geq 0, \quad a + b \geq -1, \quad a - b \leq 1,$$

显然有 $a \leq b + 1 \leq 2$.

(a) 如果 $b \leq 0$, 此时显然有 $a + b \leq 0 + 2 = 2$.

(b) 如果 $0 < b \leq 1$. 当 $a \leq 0$ 时, 显然有 $a + b \leq 1 < 2$.

当 $a > 0$ 时. 如果 $a \geq 4b$, 此时利用线性规划可以轻松求得 $a + b \leq \frac{5}{3}$. 如果

$a \leq 4b$, 此时 $f(t)$ 的对称轴 $-1 \leq x = -\frac{a}{4b} < 0$, 因此 $f\left(\frac{-a}{4b}\right) \geq 0$, 即

$$2b\left(\frac{-a}{4b}\right)^2 + a\left(\frac{-a}{4b}\right) + 1 - b \geq 0 \iff a^2 + 8\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 2. \quad (4)$$

由柯西不等式

$$\left(a^2 + 8\left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \geq \left(a + b - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (5)$$

综合 (4)(5) 知

$$a + b - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \implies a + b \leq 2.$$

综上所述, $a + b$ 的最大值为 2. ■

5. 有 333 人考试, 一共做对了 1000 道题. 做对 3 道及以下为不及格, 做对 6 道及以上为优秀, 不是所有人做对的题得数量的奇偶性相同. 问不及格和优秀的人数哪个多?

解答. 不及格的人数多. 设不及格的人数为 a , 优秀的人数为 b , 那么做对 4 道或者 5 道的人数为 $333 - a - b$, 所以至少做对了 $6b + 4(333 - a - b)$ 道题, 有

$$6b + 3(333 - a - b) \leq 1000,$$

解得 $b \leq a$.

如果 $a = b$, 此时显然 $a = b < 167$, 那么由

$$6b + 4(333 - a - b) \leq 1000,$$

得到 $a = b \geq 166$, 因此 $a = b = 166$. 此时全体优秀的人做对了至少 $6 \times 166 = 996$ 道题, 全体不是优秀也不是不及格的人做对了至少 $4 \times (333 - 166 - 166) = 4$ 道题, 而 $996 + 4 = 1000$, 因此只能是 166 人做对 6 道题, 1 人做对 4 道题, 166 人做对 0 道题. 这与不是所有人做对的题得数量的奇偶性相同矛盾, 因此 $a \neq b$. 综上所述, $a > b$ 即不及格的人数多于优秀的人数. ■

2007年北京大学保送生考试试题参考解答

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2007年北京大学保送生考试数学试题的参考解答

关键词 保送 数学

1. 设 $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$, 求 $f(0) + f(1) + \cdots + f(50)$ 的值.

解答. 因为 $x^2 - 53x + 196 = (x - 4)(x - 49)$, 所以当 $4 \leq x \leq 49$ 时,

$$f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196| = x^2 - 53x + 196 - (x^2 - 53x + 196) = 0.$$

所以

$$f(0) + f(1) + \cdots + f(50) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(50) = 1052.$$



2. 证明: 对任意实数 k , 方程 $x^2 + y^2 - 2kx - (6 + 2k)y - 2k - 31 = 0$ 过两定点.

证明. 将之化成关于 k 的一次函数, 即

$$-(2x + 2y + 2)k + x^2 + y^2 - 6y - 31 = 0.$$

解方程

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 31 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

于是对任意实数 k , 方程 $x^2 + y^2 - 2kx - (6 + 2k)y - 2k - 31 = 0$ 恒过 $(-6, 5)$, $(2, -3)$ 两点.



3. 解方程组

$$\begin{cases} xy = 2x + y - 1 \\ xz = 3x + 4z - 8 \\ yz = 3y + 2z - 8 \end{cases}$$

解答. 方程组等价于

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 1 \\ (x-4)(z-3) = 4 \\ (y-2)(z-3) = -2 \end{cases}$$

因此

$$4 = (x-1)(y-2)(x-4)(z-3) = -2(x-1)(x-4),$$

解得 $x = 2, 3$.

当 $x = 2$ 时, 解得 $y = 3, z = 1$. 当 $x = 3$ 时, 解得 $y = \frac{5}{2}, z = -1$. 所以方程组有两组解

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

■

4. 长方体的三边长 a, b, c , 满足 $a > b > c$. P 和 Q 是长方体最远的两个点. 求沿长方体表面从 P 到 Q 的最短路程的长度.

解答. 设与 P 相邻的三个面为 K_1, K_2, K_3 称之为第一类的, 与 Q 相邻的三个面为 Z_1, Z_2, Z_3 称之为第二类的. 对于一条 P 到 Q 的路线, 如果可以选择两个面 K_i, Z_j 使得这条路线都包含在这两个面中, 那么称这条路线能被两个面覆盖. 假设一条 P 到 Q 的路线 S 不能被两个面覆盖, 那么至少需要两个同一类的面, 不妨设为第一类的面才能覆盖, 这意味着 S 上存在两个点 A, B 在第一类面上, 却不能被同一个第一类面覆盖. 设 S 从 P 开始先过 A 再过 B , 那么用直线 PB 代替 S 上 P 到 B 的那段曲线, 这样得到的新的路线比 S 短. 这是因为两点直接直线最短, 而等号成立将推出 A 在线段 PB 上, 与假设矛盾. 因此不能被两个面覆盖的路线不可能取最小值. 下面只需要考虑能被两个面覆盖的路线, 此时两面必有公共边, 否则这样的两面平行无法覆盖一条完整的路线. 将其中一个平面沿公共边旋转 90° , 使得与另一平面共面, 利用两点之间线段最短, 可求得有三种最短距离

$$\sqrt{a^2 + (b+c)^2}, \sqrt{b^2 + (c+a)^2}, \sqrt{c^2 + (a+b)^2}$$

由题意 $a > b > c$ 易知三者最小值为 $\sqrt{a^2 + (b+c)^2}$.

■

2010年各国数学奥林匹克中不等式问题

作者 Nirvanacs

摘要 本文给出了2010年各国数学奥林匹克中不等式问题的参考解析.

关键词 数学奥林匹克 不等式

1. (阿尔巴尼亚) 设 a, b, c 为某三角形的三边长, 对于不等式

$$a^3 + b^3 + c^3 < k(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

(a) 证明 $k = 1$ 时不等式成立.

(b) 求使得不等式恒成立的最小常数 k .

解答. 由于 a, b, c 为某三角形的三边长, 所以

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

于是

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(ab + bc + ca) \\ &= a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 3abc \\ &> a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c = a^3 + b^3 + c^3, \end{aligned}$$

所以 $k = 1$ 时不等式成立.

另外, 令 $a = b = 1, c \rightarrow 0^+$, 此时 $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} \rightarrow 1$, 所以使得不等式恒成立的最小常数 $k \geq 1$, 又 $k = 1$ 时不等式成立, 所以所求最小的 $k = 1$. ■

2. (希腊) 已知 $x, y > 0$, 且 $x + y = 2a$, 求证:

$$x^3 y^3 (x^2 + y^2)^2 \leq 4a^{10}.$$

证明. 由均值不等式, 有

$$4a^2 = (x + y)^2 = (x^2 + y^2) + 2xy \geq 2\sqrt{2xy(x^2 + y^2)},$$

所以

$$xy(x^2 + y^2) \leq 2a^4.$$

又因为 $4a^2 = (x+y)^2 \geq 4xy$, 所以 $xy \leq a^2$. 于是

$$x^3y^3(x^2+y^2)^2 = xy \cdot (xy(x^2+y^2))^2 \leq a^2 \cdot (2a^4)^2 = 4a^{10}.$$

■

3. (印度) 已知 $a, b, c > 0$, 且 $ab + bc + ca \leq 3abc$. 求证:

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + 3 \leq \sqrt{2}(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}).$$

证明. 首先证明 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \leq \sqrt{2(a+b)}$. 事实上, 这个不等式等价于 $2\sqrt{2ab(a^2+b^2)} \leq (a+b)^2$, 而最后一个不等式我们在题 2 中已经证过这个结论.

同理 $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} \leq \sqrt{2(b+c)}$, $\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} \leq \sqrt{2(c+a)}$, 因此要证明原不等式, 只需要证明

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} \geq 3.$$

由Holder不等式得

$$\left(\sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} \right)^2 \left(\frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ca} \right) \geq 3^3,$$

因此只需要证明 $\frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ca} \leq 3$, 这等价于 $ab + bc + ca \leq 3abc$. ■

注记. 此题是2009年IMO预选题. ■

4. (印度) 设 P 是 $\triangle ABC$ 的Brocard点, 求证:

$$\left(\frac{AP}{BC} \right)^2 + \left(\frac{BP}{CA} \right)^2 + \left(\frac{CP}{AB} \right)^2 \geq 1.$$

证明. 我们证明一个更强的命题, 对 $\triangle ABC$ 所在的平面任一点 P , 有

$$\frac{AP}{BC} \cdot \frac{BP}{CA} + \frac{BP}{CA} \cdot \frac{CP}{AB} + \frac{CP}{AB} \cdot \frac{AP}{BC} \geq 1.$$

为此引进复平面, 设 A, B, C, P 对应复平面上点 z_1, z_2, z_3, z . 由于恒等式

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} + \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} = 1.$$

所以恒有不等式

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} \right| + \left| \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \right| + \left| \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} \right| \\ & \geq \left| \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} + \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)} \right| = 1. \end{aligned}$$

即 $\frac{AP}{BC} \cdot \frac{BP}{CA} + \frac{BP}{CA} \cdot \frac{CP}{AB} + \frac{CP}{AB} \cdot \frac{AP}{BC} \geq 1$. 于是

$$\left(\frac{AP}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BP}{CA}\right)^2 + \left(\frac{CP}{AB}\right)^2 \geq \frac{AP}{BC} \cdot \frac{BP}{CA} + \frac{BP}{CA} \cdot \frac{CP}{AB} + \frac{CP}{AB} \cdot \frac{AP}{BC} \geq 1.$$

■

5. (伊朗) 已知 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(a+b+c)^2} \geq \frac{7}{25} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right)^2.$$

证明. 首先, 由Cauchy不等式, 我们有

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(a+b+c)^2} \right) (9+9+9+1) \geq \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right)^2.$$

因此只需要证明

$$\frac{1}{28} \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right)^2 \geq \frac{7}{25} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right)^2,$$

等价于证明

$$5 \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right) \geq 14 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b+c} \right),$$

即

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

这个不等式由柯西不等式或者均值不等式都很容易得到. ■

注记. 这个题目可以推广到 n 维, 即已知 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} + \frac{1}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2} \geq \frac{n^3 + 1}{(n^2 + 1)^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \right)^2.$$

■

6. (伊朗) 已知 $x, y, z > 0$, 且 $xy + yz + zx = 1$. 求证:

$$3 - \sqrt{3} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq (x + y + z)^2.$$

证明. 由均值不等式 $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3$, 所以 $x + y + z \geq \sqrt{3}$, 因此只需要证明

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z \geq (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx),$$

移项配方得

$$\frac{(x - y)^2}{y} + \frac{(y - z)^2}{z} + \frac{(z - x)^2}{x} \geq \frac{1}{2} ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2). \quad (1)$$

(a) 如果 x, y, z 都不大于 2, 那么不等式 (1) 显然成立.

(b) 如果 x, y, z 中有一者大于 2, 不妨设为 x , 那么 y, z 都小于 $\frac{1}{2}$, 此时

$$\begin{aligned} \frac{(x - y)^2}{y} + \frac{(y - z)^2}{z} + \frac{(z - x)^2}{x} &\geq 2(x - y)^2 + 2(y - z)^2 \\ &\geq (x - y)^2 + (y - z)^2 + \frac{1}{2} \cdot (z - x)^2 \\ &\geq \frac{1}{2} ((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2), \end{aligned}$$

其中用到 $(x - y)^2 + (y - z)^2 \geq \frac{1}{2}(z - x)^2$, 因此此时 (1) 仍然成立.

综上, 不等式得证. ■

7. (保加利亚) 设正实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 3$, 求证:

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3.$$

证明. 由均值不等式有

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ &\geq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2} \\ &\geq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot 3abc(a + b + c)}. \end{aligned}$$

利用条件 $a + b + c = 3$, 即得 $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$. ■

8. (韩国) 任意给定一个三角形 ABC , P, Q, R 是三角形 ABC 内切圆分别在边 BC, CA, AB 的切点. 设 T 是三角形 ABC 的面积, L 是其周长, 求证:

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L^2}{T}.$$

证明. 原不等式转化为

$$\sum \left(\sin^3 \frac{A}{2} \sin^3 \frac{B}{2} \right)^{-1} \geq \frac{32}{\sqrt{3}} \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A \sin B \sin C}.$$

由均值不等式有

$$\sum \left(\sin^3 \frac{A}{2} \sin^3 \frac{B}{2} \right)^{-1} \geq 3 \left(\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \right)^{-1}.$$

所以只需要证

$$3 \left(\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \right)^{-1} \geq \frac{32}{\sqrt{3}} \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A \sin B \sin C}. \quad (2)$$

注意到

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \\ \sin A \sin B \sin C &= 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

所以 (2) 等价于 $\frac{3\sqrt{3}}{8} \geq \sin A \sin B \sin C$, 显然成立. ■

9. (葡萄牙) 证明: 对任意的三角形都存在某两边长 a, b , 满足

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

证明. 不妨设三边长为 x, y, z 满足 $x \leq y \leq z$, 设 $k = \min \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y} \right)$. 显然 $k \geq 1$, 因此只要证明 $k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 由假设, 有 $y \geq kx, z \geq ky$; 而在三角形中有 $z - y < x$, 所以 $ky - y < x$, 因此 $(k-1)kx < x$. 即 $(k-1)k < 1$, 解得 $k < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. ■

10. (越南) 已知 $a, b, c > 0$, $16(a+b+c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. 求证:

$$\sum_{cyc} \left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}} \right)^3 \leq \frac{8}{9}.$$

证明. 由均值不等式

$$a + b + \sqrt{2a + 2c} = (a + b) + \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a+c}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}},$$

于是

$$\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3 \leq \frac{2}{27(a+b)(a+c)},$$

同理可得

$$\left(\frac{1}{b+c+\sqrt{2b+2a}}\right)^3 \leq \frac{2}{27(b+c)(b+a)}, \left(\frac{1}{c+a+\sqrt{2c+2b}}\right)^3 \leq \frac{2}{27(c+a)(c+b)}.$$

于是只需要证明

$$\sum_{cyc} \frac{2}{27(a+b)(a+c)} \leq \frac{8}{9},$$

这等价于

$$6(a+b)(b+c)(c+a) \geq a+b+c,$$

即

$$6abc \left(\sum a\right) \left(\sum ab\right) \geq abc \sum a + 6a^2b^2c^2. \quad (3)$$

注意到 $16(a+b+c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, 即 $16abc \sum a \geq \sum ab$, 于是

$$16abc \sum a \left(\sum ab\right) \geq \left(\sum ab\right)^2 \geq 3abc \sum a, \quad (4)$$

另外由均值不等式可得

$$2abc \sum a \sum ab \geq 18a^2b^2c^2, \quad (5)$$

因此由 (4)(5) 相加再除以 3 即得 (3).

于是不等式得证, 等号成立当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{4}$. ■

11. (印尼) 已知 $a, b, c \geq 0$ 和 $x, y, z > 0$ 且 $a + b + c = x + y + z$, 求证:

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a + b + c.$$

证明. 由均值不等式有

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{x^2} + x + x &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2} \cdot x \cdot x} = 3a, \\ \frac{b^3}{y^2} + y + y &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{y^2} \cdot y \cdot y} = 3b, \\ \frac{c^3}{z^2} + z + z &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{z^2} \cdot z \cdot z} = 3c.\end{aligned}$$

上述三式相加, 即得

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} + 2(x + y + z) \geq 3(a + b + c).$$

由于 $a + b + c = x + y + z$, 所以 $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq a + b + c$. ■

12. (印尼) 实系数多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 有 3 个正实根, 且 $f(0) < 0$. 求证: $2b^3 + 9a^2d - 7abc \leq 0$.

证明. 设 $f(x)$ 的三个正实根为 p, q, r , 那么 $f(x) = a(x-p)(x-q)(x-r)$. 由 $f(0) = -apqr < 0$, 可知 $a > 0$. 由 Vieta 定理 $p + q + r = -\frac{b}{a}$, $pq + qr + rp = \frac{c}{a}$, $pqr = -\frac{d}{a}$. 由于 $a > 0$, 原不等式等价于

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 9\frac{d}{a} - 7\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \leq 0. \quad (6)$$

将 Vieta 定理得到的三个式子代入, 不等式 (6) 转化为

$$-2(p+q+r)^3 - 9pqr + 7(p+q+r)(pq+qr+rp) \leq 0,$$

即 $(p+q)(p-q)^2 + (q+r)(q-r)^2 + (r+p)(r-p)^2 \geq 0$, 显然成立. ■

注记. 2008 年中国女子数学奥林匹克的第二题, 由朱华伟先生提供. ■

13. (哈萨克斯坦) 实数 A 给定, 求最大的实数 M 使得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{A}{x+y} \geq \frac{M}{\sqrt{xy}}$$

对 $x, y > 0$ 恒成立.

解答. 由于不等式两边都是齐次的, 所以不妨设 $xy = 1, x + y = t$, 那么由均值不等式有 $t = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2$. 问题转化为, 对于给定的实数 A , 求最大的 M , 使得对任意的 $t \geq 2$ 都有 $t + \frac{A}{t} \geq M$.

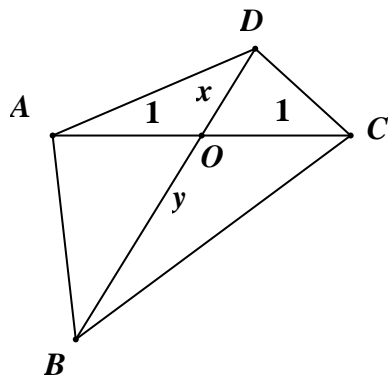
设 $f(x) = x + \frac{A}{x}$, 那么有 $f'(x) = 1 - \frac{A}{x^2}$.

(a) 当 $A \leq 4$ 时, 此时对 $t \geq 2$, 恒有 $f'(t) = 1 - \frac{A}{t^2} \geq 1 - \frac{4}{t^2} \geq 0$. 因此, 此时 $f(t)$ 在 $t \geq 2$ 的最小值为 $f(2) = 2 + \frac{A}{2}$, 从而, M 的最大值为 $2 + \frac{A}{2}$.

(b) 当 $A > 4$ 时, 此时易得 $f(t)$ 在 $[2, \sqrt{A})$ 上递减, 在 $[\sqrt{A}, +\infty)$ 上递增, 所以 $f(t)$ 在 $t \geq 2$ 的最小值为 $f(\sqrt{A}) = 2\sqrt{A}$, 从而, M 的最大值为 $2\sqrt{A}$. ■

14. (哈萨克斯坦) 已知 $x, y \geq 0$, 求证:

$$\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \geq 2(x + y).$$



证明. 如图所示, 设 $AO = OC = 1, OD = x, OB = y, \angle AOD = 120^\circ$, 那么由余弦定理

$$AD = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad CD = \sqrt{x^2 - x + 1},$$

$$AB = \sqrt{y^2 - y + 1}, \quad CB = \sqrt{y^2 + y + 1}.$$

由Ptolemy不等式, 我们有

$$AD \times BC + CD \times BA \geq AC \times BD,$$

即

$$\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \geq 2(x + y).$$

■

15. (瑞士) 已知 $x, y, z > 0$, 且 $xyz = 1$, 求证:

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z.$$

证明. 首先, 由均值不等式有

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3.$$

其次, 由均值不等式有

$$\begin{aligned} \frac{(x+y-1)^2}{z} + z &\geq 2(x+y-1), \\ \frac{(y+z-1)^2}{x} + x &\geq 2(y+z-1), \\ \frac{(z+x-1)^2}{y} + y &\geq 2(z+x-1). \end{aligned}$$

将上面三个式子相加, 利用 $x+y+z \geq 3$, 得

$$\begin{aligned} &\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} + x+y+z \\ &\geq 2(x+y-1) + 2(y+z-1) + 2(z+x-1) \\ &= 2(x+y+z) + 2(x+y+z-3) \\ &\geq 2(x+y+z). \end{aligned}$$

即

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z.$$



16. (土耳其) 已知 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\sum_{cyc} \sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

证明. 先证明

$$\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad (7)$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned} & (a^2 - ab + b^2) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ & \leq \left(\frac{(a^2 - ab + b^2) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{3} \right)^3 \\ & \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

知 (7) 成立, 同理可得

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{(b^2 + c^2)(b^2 - bc + c^2)}{2}} & \leq \frac{b^2 + c^2}{b + c}, \\ \sqrt[4]{\frac{(c^2 + a^2)(c^2 - ca + a^2)}{2}} & \leq \frac{c^2 + a^2}{c + a}. \end{aligned}$$

于是只需要证明

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right).$$

为此, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 那么

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 & \geq c^2 + a^2 \geq b^2 + c^2, \\ \frac{1}{a + b} & \leq \frac{1}{c + a} \leq \frac{1}{b + c}. \end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式知

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} & \leq \frac{1}{3} \sum (a^2 + b^2) \sum \frac{1}{a + b} \\ & = \frac{2}{3} (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right). \end{aligned}$$

■

17. (土耳其) 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_i}.$$

证明. 注意到 $x^4 + 3 \geq 2x^2 + 2 = (1+1)(1+x^2) \geq (1+x)^2$, 及

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} = n,$$

因此只需要证明更强的不等式

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} + n \geq 4 \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i}. \quad (8)$$

注意到 $\frac{a_i}{1+a_i} = 1 - \frac{1}{1+a_i}$, 所以 (8) 等价于

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1+a_i}{a_i} + \frac{4}{1+a_i} \right) \geq 4n. \quad (9)$$

由均值不等式有

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1+a_i}{a_i} + \frac{4}{1+a_i} \right) \geq 2n \sqrt[n]{\frac{4^n}{a_1 a_2 \cdots a_n}} = 4n,$$

即得 (9), 于是不等式得证. ■

18. (美国) 正实数 a, b, c 满足 $abc = 1$. 求证:

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

证明. 由于 $abc = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^5(b+2c)^2} &= \frac{b^3 c^3}{(ab+2ac)^2}, \\ \frac{1}{b^5(c+2a)^2} &= \frac{c^3 a^3}{(bc+2ba)^2}, \\ \frac{1}{c^5(a+2b)^2} &= \frac{a^3 b^3}{(ca+2cb)^2}, \end{aligned}$$

所以只需要证明

$$\frac{b^3 c^3}{(ab+2ac)^2} + \frac{c^3 a^3}{(bc+2ba)^2} + \frac{a^3 b^3}{(ca+2cb)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

又由于均值不等式

$$\begin{aligned} & \frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2} + \frac{ab+2ac}{27} + \frac{ab+2ac}{27} \\ & \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2} \cdot \frac{ab+2ac}{27} \cdot \frac{ab+2ac}{27}} = \frac{1}{3}bc, \\ & \Rightarrow \frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2} \geq \frac{1}{3}bc - \frac{2ab+4ac}{27}, \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{c^3a^3}{(bc+2ac)^2} & \geq \frac{1}{3}ca - \frac{2bc+4ba}{27}, \\ \frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2} & \geq \frac{1}{3}ab - \frac{2ca+4cb}{27}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{b^3c^3}{(ab+2ac)^2} + \frac{c^3a^3}{(bc+2ba)^2} + \frac{a^3b^3}{(ca+2cb)^2} \\ & \geq \frac{1}{3}(bc+ca+ab) - \frac{2}{27}(ab+bc+ca) - \frac{4}{27}(ac+ba+cb) \\ & = \frac{1}{9}(ab+bc+ca) \geq \frac{1}{9} \cdot 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

19. (美国) 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 求证:

$$\frac{AP}{h_b+h_c} + \frac{BP}{h_c+h_a} + \frac{CP}{h_a+h_b} \geq 1.$$

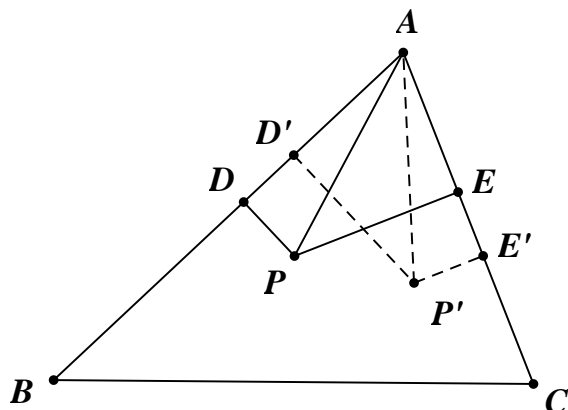
证明. 引理: 若 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, P 到边 AB, AC 两边的距离分别为 x, y , 那么有 $AP \cdot a \geq cx + by$, $AP \cdot a \geq bx + cy$.

引理的证明: 如图所示, 由于

$$AP \cdot a \geq 2S_{\text{四边形}ABPC} = 2(S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}) = cx + by.$$

另外, 作 P 关于角 A 的平分线的对称点 P' , 那么 P' 到边 AB, AC 两边的距离分别为 y, x , 且 $AP = AP'$. 于是再用一次刚才证明的结论就可得 $AP \cdot a \geq bx + cy$. 于是引理得证.

回到原题, 设 P 到 BC, CA, AB 的距离分别为 p, q, r , $\triangle ABC$ 面积为 S , 那么



由引理可得 $AP \cdot a \geq cq + br$, $AP \cdot a \geq bq + cr$. 于是 $AP \geq \frac{(b+c)(q+r)}{2a}$. 所以

$$\frac{AP}{h_b + h_c} \geq \frac{(b+c)(q+r)}{2a(h_b + h_c)} = \frac{bc(q+r)}{4aS}.$$

同理可得其他两个式子, 然后三式相加即得

$$\sum_{cyc} \frac{AP}{h_b + h_c} \geq \sum_{cyc} \frac{bc(q+r)}{4aS}.$$

注意到

$$\begin{aligned} & \frac{bc(q+r)}{4aS} + \frac{ca(r+p)}{4bS} + \frac{ab(p+q)}{4cS} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{aS} + \frac{ac}{bS} \right) r + \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{bS} + \frac{ba}{cS} \right) p + \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{cS} + \frac{cb}{aS} \right) q \\ &\geq \frac{c}{2S} r + \frac{a}{2S} p + \frac{b}{2S} q = \frac{ap + bq + cr}{2S} = 1. \end{aligned}$$

于是不等式得证. ■

注记. 这个引理源自厄尔多斯-莫德尔不等式的证明. 另外, 运用这个引理能解决如下的2000年美国数学奥林匹克IMO国家队选拔试题: 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 其外接圆半径为 R , 求证:

$$\frac{AP}{BC^2} + \frac{BP}{CA^2} + \frac{CP}{AB^2} \geq \frac{1}{R}.$$
■

证明. 运用引理, 我们有 $AP \cdot a \geq br + cq$, 所以 $\frac{AP}{BC^2} \geq \frac{br + cq}{a^3}$. 同理可得

$$\frac{BP}{CA^2} \geq \frac{cp + ar}{b^3}, \quad \frac{CP}{AB^2} \geq \frac{aq + bp}{c^3}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{AP}{BC^2} + \frac{BP}{CA^2} + \frac{CP}{AB^2} &\geq \frac{br + cq}{a^3} + \frac{cp + ar}{b^3} + \frac{aq + bp}{c^3} \\ &= \left(\frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3}\right)r + \left(\frac{b}{c^3} + \frac{c}{b^3}\right)p + \left(\frac{c}{a^3} + \frac{a}{c^3}\right)q \\ &\geq \frac{2r}{ab} + \frac{2p}{bc} + \frac{2q}{ca} = \frac{2(ap + bq + cr)}{abc} \\ &= \frac{4S}{abc} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

■

20. (巴尔干) 已知 $a, b, c > 0$, 求证:

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

证明. 对不等式作变形可知

$$\begin{aligned} \frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &\geq a^3b^2c + ab^3c^2 + a^2bc^3. \end{aligned}$$

注意到, 由均值不等式有

$$\begin{aligned} a^3b^3 + a^3b^3 + c^3a^3 &\geq 3a^3b^2c, \\ b^3c^3 + b^3c^3 + a^3b^3 &\geq 3ab^3c^2, \\ c^3a^3 + c^3a^3 + b^3c^3 &\geq 3a^2bc^3. \end{aligned}$$

如上三式相加, 再两边除以三即得

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3b^2c + ab^3c^2 + a^2bc^3.$$

■

21. (中欧) 对任意给定的整数 $n \geq 2$, 求最大的 C_n 使得对任意的正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 都有

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2.$$

证明. 取 $a_1 = 3, a_2 = \cdots = a_{n-1} = 2, a_n = 1$, 易得 $C_n \leq \frac{1}{2n}$. 如果我们能证明对任意的正实数 a_1, a_2, \cdots, a_n 都有

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n}(a_1 - a_n)^2,$$

那么要求的最大的 $C_n = \frac{1}{2n}$.

注意到恒等式

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} - \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 = \frac{\sum_{i < j} (a_i - a_j)^2}{n^2}, \quad (10)$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 &\geq (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \cdots + (a_1 - a_{n-1})^2 + (a_1 - a_n)^2 \\ &\quad + (a_2 - a_n)^2 + (a_3 - a_n)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2 \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} [(a_1 - a_k)^2 + (a_k - a_n)^2] + (a_1 - a_n)^2 \\ &\geq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(a_1 - a_n)^2}{2} + (a_1 - a_n)^2 = \frac{n(a_1 - a_n)^2}{2}. \end{aligned}$$

其中用到的

$$(a_1 - a_k)^2 + (a_k - a_n)^2 \geq \frac{(a_1 - a_n)^2}{2}$$

可由Cauchy不等式得到.

于是由 (10) 知

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} - \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 \geq \frac{(a_1 - a_n)^2}{2n},$$

即

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right)^2 + \frac{1}{2n}(a_1 - a_n)^2,$$

所以所要求的最大的 $C_n = \frac{1}{2n}$. ■

22. (地中海) 已知 $n > 2$, 正实数 a_1, a_2, \cdots, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, 求证:

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2},$$

并求等号成立条件.

解答. 我们先证明 $n = 3$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{a_2 a_3}{a_1 + 1} + \frac{a_3 a_1}{a_2 + 1} + \frac{a_1 a_2}{a_3 + 1} \leq \frac{1}{4}.$$

由条件 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, 上式等价于

$$\frac{a_2 a_3}{2a_1 + a_2 + a_3} + \frac{a_3 a_1}{a_1 + 2a_2 + a_3} + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 + 2a_3} \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3).$$

由均值不等式

$$\frac{a_2 a_3}{2a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_2 a_3}{(a_1 + a_2) + (a_1 + a_3)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a_2 a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 a_3}{a_1 + a_3} \right).$$

同理可得

$$\frac{a_3 a_1}{a_2 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a_3 a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_3 a_1}{a_2 + a_1} \right), \quad \frac{a_1 a_2}{a_3 + 1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a_1 a_2}{a_3 + a_1} + \frac{a_1 a_2}{a_3 + a_2} \right).$$

于是上述三式相加得

$$\frac{a_2 a_3}{a_1 + 1} + \frac{a_3 a_1}{a_2 + 1} + \frac{a_1 a_2}{a_3 + 1} \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3).$$

易知等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$.

再证明, 当 $n \geq 4$ 时, 恒有

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} < \frac{1}{(n-1)^2}.$$

注意到

$$a_2 a_3 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1} \right)^{n-1} < \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-1}.$$

同理

$$a_1 a_3 \cdots a_n < \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-1},$$

.....

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} < \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-1}.$$

所以

$$\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{a_n + n - 2} < \frac{n}{n-2} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-1}.$$

于是只需证

$$\frac{n}{n-2} \left(\frac{1}{n-1} \right)^{n-1} < \frac{1}{(n-1)^2},$$

由 $n > 4$, 只需证

$$\frac{n}{n-2} \cdot \frac{1}{n-1} < 1 \iff (n-1)(n-2) > n.$$

明显成立. ■

23. (新加坡) 设 $a_1 \geq 1$, 对任意的 $k = 1, 2, \dots, n$ 成立 $a_{k+1} \geq a_k + 1$. 求证:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

证明. 我们里用数学归纳法来证明这个问题.

当 $n = 1$ 时, 由 $a_1 \geq 1$ 知, 此时不等式成立.

假设当 $n = k$ 时, 不等式也成立, 即

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2. \quad (11)$$

那么当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设即不等式 (11), 只需要证明

$$a_{k+1}^3 \geq 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}^2.$$

由已知条件可知

$$\begin{aligned} & 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}^2 \\ & \leq 2a_{k+1}((a_{k+1} - k) + (a_{k+1} - (k-1)) + \dots + (a_{k+1} - 1)) + a_{k+1}^2 \\ & = (2k+1)a_{k+1}^2 - k(k+1)a_{k+1}. \end{aligned}$$

因此只要证明 $a_{k+1}^3 \geq (2k+1)a_{k+1}^2 - k(k+1)a_{k+1}$, 这等价于

$$a_{k+1}(a_{k+1} - k)(a_{k+1} - (k+1)) \geq 0,$$

这由 $a_{k+1} \geq k+1$ 知成立. ■

24. (北方) 设正实数 a, b, c 满足 $(a+2b)(b+2c) = 9$. 求证:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geq 3.$$

证明. 由幂平均不等式, 可得

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geq \frac{b+c}{2},$$

所以

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2} + 2\frac{b+c}{2}.$$

又由于 $\frac{a+b}{2} + 2\frac{b+c}{2} = \frac{(a+2b) + (b+2c)}{2} \geq \sqrt{(a+2b)(b+2c)} = 3$, 所以

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \geq 3.$$

■

25. (北方) 设 $x, y, z \in [0, 1]$, $|x-y| \leq \frac{1}{2}$, $|z-y| \leq \frac{1}{2}$, $|x-z| \leq \frac{1}{2}$, 求

$$W(x, y, z) = x + y + z - xy - yz - zx$$

的最大值和最小值.

解答. 注意到 $x, y, z \in [0, 1]$, 所以 $W = x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \geq 0$. 又令 $x = y = z = 0$, 此时 $W = 0$, 故 $W_{\min} = 0$.

下面求 W_{\max} , 注意到 $W(x, y, z) = W(1-x, 1-y, 1-z)$, 因此总可以假设 x, y, z 中至少有两者不小于 $\frac{1}{2}$. 于是不妨设 $x \leq y \leq z$, 那么由已知条件可得

$$z - \frac{1}{2} \leq x \leq y \leq z \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq y.$$

固定 y, z 将 W 看成 x 的函数, 由 $1-y-z \leq 0$, 可得

$$\begin{aligned} W &= x + y + z - xy - yz - zx \\ &= x(1-y-z) + y + z - yz \\ &\leq \left(z - \frac{1}{2}\right)(1-y-z) + y + z - yz. \end{aligned}$$

将放缩出来的结果用同样的方法来处理 y , 即

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)(1-y-z) + y + z - yz = y\left(\frac{3}{2} - 2z\right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}.$$

如果 $z \geq \frac{3}{4}$, 此时 $\frac{3}{2} - 2z \leq 0$, 所以

$$\begin{aligned} y \left(\frac{3}{2} - 2z \right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 2z \right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \\ &= -z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{4} \\ &= - \left(z - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{13}{16} \leq \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

如果 $z < \frac{3}{4}$, 此时 $\frac{3}{2} - 2z > 0$, 所以

$$\begin{aligned} y \left(\frac{3}{2} - 2z \right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} &\leq z \left(\frac{3}{2} - 2z \right) - z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} \\ &= -3z^2 + 4z - \frac{1}{2} \\ &= -3 \left(z - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{13}{16} < \frac{5}{6}$, 且当 $x = \frac{1}{6}, y = z = \frac{2}{3}$ 时 $W = \frac{5}{6}$, 所以 $W_{\max} = \frac{5}{6}$. ■

26. (东南) 设 n 为正整数, 实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, r_1, r_2, \dots, r_n$ 满足:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \quad \text{和} \quad 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n,$$

求证:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \min(r_i, r_j) \geq 0.$$

解答. 注意到在 $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ 时恒等式

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \min(r_i, r_j) \\ &= (r_n - r_{n-1})a_n^2 + (r_{n-1} - r_{n-2})(a_n + a_{n-1})^2 + \dots \\ &\quad + (r_2 - r_1)(a_n + \dots + a_2)^2 + r_1(a_n + \dots + a_2 + a_1)^2. \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \min(r_i, r_j) \geq 0. \quad \text{■}$$

27. (女子) 设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, n \geq 2$, 令 $S = \sum_{i=1}^n ix_i^2$. 求证:

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{S}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} \leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k},$$

并求等号成立条件.

证明. 先对不等式的左边作恒等变形

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{S}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - 2\frac{1}{S} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{S^2} \sum_{k=1}^n kx_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - 2\frac{1}{S} + \frac{S}{S^2} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{S}. \end{aligned}$$

等价于证明 $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{S} \leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}$, 即 $\frac{4n}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \leq \frac{1}{S}$.

事实上, 由于对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 都有 $i + \frac{n}{i} \leq n+1$, 因此

$$n \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} + \sum_{i=1}^n ix_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(i + \frac{n}{i}\right) x_i^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^n x_i^2 = n+1.$$

又由均值不等式

$$S \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \leq \frac{1}{4n} \left(n \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} + \sum_{i=1}^n ix_i^2 \right)^2 \leq \frac{(n+1)^2}{4n},$$

于是不等式得证. 注意到 $i + \frac{n}{i} \leq n+1$, 等号成立, 当且仅当 $i = 1, n$. 由此容易分析得等号成立当且仅当 $x_1^2 = x_n^2 = \frac{1}{2}$, 其余的 x_i 都为 0. ■

28. (西部数学奥林匹克) 设非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 同时满足如下条件:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = 1; \quad \sum_{i=1}^n i(a_i - b_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n i^2(a_i + b_i) = 10.$$

求证: 对任意的 $1 \leq k \leq n$ 都有 $\max\{a_k, b_k\} \leq \frac{10}{10 + k^2}$.

证明. 由利用已知条件有

$$(ka_k)^2 = \left(\sum_{i \neq k} i(b_i - a_i) + kb_k \right)^2 = \left(\sum_{i \neq k} ib_i - \sum_{i \neq k} ia_i + kb_k \right)^2.$$

由Cauchy不等式得

$$\left(\sum_{i \neq k} i b_i - \sum_{i \neq k} i a_i + k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{i \neq k} i^2 b_i + \sum_{i \neq k} i^2 a_i + k^2 b_k \right) \left(\sum_{i \neq k} b_i + \sum_{i \neq k} a_i + b_k \right)$$

因此 $k^2 a_k^2 \leq (10 - k^2 a_k)(1 - a_k) = 10 - 10a_k - k^2 a_k + k^2 a_k^2$. 由此可得

$$10 \geq (10 + k^2) a_k, \quad \implies \quad a_k \leq \frac{10}{10 + k^2}.$$

同理可得 $b_k \leq \frac{10}{10 + k^2}$, 因此 $\max\{a_k, b_k\} \leq \frac{10}{10 + k^2}$. ■

29. (联赛) 给定正整数 $n > 2$, 设正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_k \leq 1, k = 1, 2, \dots, n$. 记

$$A_k = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

求证:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| < \frac{n-1}{2}.$$

证明. 由 $0 < a_k \leq 1$ 知, 对 $1 \leq k \leq n-1$, 有

$$0 < \sum_{i=1}^k a_i \leq k, \quad 0 < \sum_{i=k+1}^n a_i \leq n - k.$$

注意到当 $x, y > 0$ 时, $|x - y| < \max\{x, y\}$, 于是对于任意的 $1 \leq k \leq n-1$, 有

$$\begin{aligned} |A_n - A_k| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k} \right) \sum_{i=1}^k a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^k a_i \right| \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |A_n - A_k| &< \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n a_i, \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^k a_i \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{n} (n - k), \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) k \right\} \\ &= 1 - \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n A_i \right| &= \left| nA_n - \sum_{k=1}^n A_k \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} (A_n - A_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |A_n - A_k| \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \right) = \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

■

30. (集训队) 给定正整数 $n \geq 2$ 和正实数 a , 正实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\prod_{i=1}^n x_i = 1$. 求最小的实数 $M = M(n, a)$, 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a + S - x_i} \leq M$$

恒成立, 其中 $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

解答. 令 $x_i = y_i^n$, $y_i > 0$, 于是 $y_1 y_2 \cdots y_n = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. 由幂平均及均值不等式我们有

$$S - x_i = \sum_{j \neq i} y_j^n \geq (n-1) \left(\frac{\sum_{j \neq i} y_j}{n-1} \right)^n \geq (n-1) \left(\frac{\sum_{j \neq i} y_j}{n-1} \right) \prod_{j \neq i} y_j = \frac{\sum_{j \neq i} y_j}{y_i}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a + S - x_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{ay_i + \sum_{j \neq i} y_j}. \quad (12)$$

当 $a = 1$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{ay_i + \sum_{j \neq i} y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} = 1,$$

且当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a + S - x_i} = 1,$$

故此时 $M = 1$.

当 $a > 1$ 时, 令 $z_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 有 $\sum_{i=1}^n z_i = 1$.

$$\frac{y_i}{ay_i + \sum_{j \neq i}^n y_j} = \frac{z_i}{(a-1)z_i + 1} = \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{(a-1)z_i + 1} \right). \quad (13)$$

由柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n ((a-1)z_i + 1) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(a-1)z_i + 1} \right) \geq n^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n ((a-1)z_i + 1) = a-1 + n,$$

故

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(a-1)z_i + 1} \geq \frac{n^2}{a-1+n}. \quad (14)$$

结合 (12)(13)(14), 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a+S-x_i} &\leq \frac{1}{a-1} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(a-1)z_i + 1} \right) \\ &\leq \frac{n}{a-1} - \frac{1}{a-1} \cdot \frac{n^2}{a-1+n} \\ &= \frac{n}{a-1+n}. \end{aligned}$$

当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ 时,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a+S-x_i} = \frac{n}{a-1+n},$$

故此时 $M = \frac{n}{a-1+n}$.

当 $a < 1$ 时, 由 (12) 可知

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a+S-x_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{ay_i + \sum_{j \neq i}^n y_j} < \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{ay_i + a \sum_{j \neq i}^n y_j} = \frac{1}{a}.$$

当 $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \varepsilon \rightarrow 0^+$, $x_n = \varepsilon^{1-n} \rightarrow +\infty$ 时,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a+S-x_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{n-1}{a+\varepsilon^{1-n}} + \frac{1}{a+(n-1)\varepsilon} \right) = \frac{1}{a},$$

故 $M = \frac{1}{a}$.

综上所述,

$$M = \begin{cases} \frac{n}{a-1+n} & \text{若 } a \geqslant 1, \\ \frac{1}{a} & \text{若 } 0 < a < 1. \end{cases}$$

■

注记. 因为方法和走向IMO一样, 直接抄书了.

■