

## 2011年东南数学奥林匹克试题

第一天 2011年7月23日 8:00—12:00

1. 锐角三角形 $ABC$ ,  $BC$ 边上的高与以 $BC$ 为直径的圆交于 $D, E$ ;  $AC$ 边上的高与以 $AC$ 为直径的圆交于 $M, N$ . 求证:  $D, E, M, N$ 四点共圆, 并确定圆心位置.
2. 设 $d(n)$ 表示正整数 $n$ 的正因子的个数,  $a_{n+1} = d\left(\left[\frac{3a_n}{2}\right]\right) + 2011$ , 证明对任意正整数 $a_1, \{a_n\}$ 自某项后为周期数列.
3. 求所有满足下述条件的质数 $P$ :  $\{\sqrt{P}\} = x, \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{\sqrt{P} - 31}{75}$ .
4.  $n \times n$ 的棋盘( $n > 2$ )里面有一个空格和 $n^2 - 1$ 个棋子, 棋子编号为 $1, 2, \dots, n^2 - 1$ , 每次操作可将空格旁相邻的棋子移到空格位. 问: 是否棋子最初任意摆放都能经过有限次操作使棋子按编号从左到右, 从上到下顺序排列.

第二天 2011年7月24日 8:00—12:00

5. 锐角三角形 $ABC$ 外心为 $O$ ,  $AO$ 交 $BC$ 于 $D$ ,  $BO$ 交 $AC$ 于 $E$ ,  $CO$ 交 $AB$ 于 $F$ ,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , 求证:  $\triangle ABC$ 为等边三角形.
6. 已知 $x, y, z$ 均为实数, 求证:
$$-\frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{2} \leq 3xy + yz + zx \leq \frac{(x^2 + y^2 + 2z^2)(3 + \sqrt{13})}{4}.$$
7. 证明不超过9000的任意九个不同正整数中总可以找出四个 $A, B, C, D$ 使 $3 + D < A + B + C < 4D + 1$ .
8. 一个密码设置为 $1, 2, 3, \dots, 64$ 的一个排列, 每次输入八个数字, 它会告诉你这八个数字在原密码中的先后顺序. 试找到一种方法, 使输入8个数字的次数不超过45, 就已确定原密码.