第52届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试试题

空念晨曦

Email：clanlu.net@qq.com

主页：http://www.clanlu.net/

第52届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试一

第一天

2011年3月16日上午8:00——12:30

1. 在三角形ABC中, $BC > CA > AB$, 其九点圆与内切圆及三个旁切圆分别相切于T, T_A,T_B,T_C(T_A是BC边上的旁切圆与九点圆的切点, T_B,T_C类同).

证明: 线段TT_B与线段T_AT_C相交.

注: 对任意非等边三角形, 其九点圆(三条高的垂足, 三条边的中点, 垂心与三顶点连线的中点所在的圆)与其内切圆, 三个旁切圆都相切.

2. 设S是平面上任意四个点不共线的n个点的集合, $d_1, d_2, \cdots, d_k$是S中的点两两之间所有不同距离的集合, 以m_i表示d_i的重数($i = 1, 2, \cdots, k$), 即满足$|PQ| = d_i$的无序对$\{P, Q\} \subseteq S$的个数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 \leqslant n^3 - n^2.$$

3. 称正整数是"有趣的", 如果n满足

$$\left\{\frac{n}{10^k}\right\} > \frac{n}{10^{10}}$$

对$k = 1, 2, \cdots, 9$都成立. 这里$\{x\}$表示x的小数部分.

求"有趣的"正整数n的个数.

第二天

2011年3月17日上午8:00——12:30

4. 设圆O_1,O_2相交, P是它们的一个交点, 它们的一条外公切线分别切圆O_1,O_2于A,B两点, 过A且垂直于BP的直线交O_1O_2于点C. 求证: $AP \perp PC$.

5. 设n是正整数, $\alpha(n)$为n的二进制表示中1的个数, 证明: 对所有正整数r, 都有$2^{2n-\alpha(n)}$整除$\sum\limits_{k=-n}^{n} C_{2n}^{n+k} k^{2r}$.

6. 给定整数$n \geqslant 2$, 设整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 2n-1$, 求集合$\{a_i + a_j | 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$的元素个数的最小可能值.

第52届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试二

第一天

2011年3月21日上午8:00——12:30

1. 给定正整数$n \geqslant 2$, 求所有的函数$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 满足对任意的实数$x, y$都有

$$f(x-f(y)) = f(x+y^n) + f(f(y)+y^n).$$

2. 给定正整数l, 设m, n是正整数, $m \geqslant n$, 集合$1, 2, \cdots, l$的$m+n$个两两不同的子集$A_1, A_2, \cdots, A_m$, $B_1, B_2, \cdots, B_n$满足条件:当$1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$时, $A_i \Delta B_j$两两不同, 且取遍$1, 2, \cdots, l$的所有非空子集, 求m, n的一切可能值.

注: $A \Delta B = \{x | x$恰好属于A和B中的一个$\}$.

3. 给定正整数d, 证明: 存在无穷多个正整数n, 使得$d(n!) - 1$是合数.

第二天

2011年3月22日上午8:00——12:30

4. 设AA', BB', CC'是锐角$\triangle ABC$外接圆的三条直径, P是$\triangle ABC$内一点, 点P在BC, CA, AB上的射影分别为D, E, F. 点X是点A'关于点D的对称点, 点Y是点B'关于点E的对称点, 点Z是点C'关于点F的对称点.

求证: $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$.

5. 设$\{b_n\}(n \geqslant 1)$是一个正整数数列, 数列$\{a_n\}(n \geqslant 1)$的定义如下:

$$a_1 \in \mathbb{N}^+, \quad a_{n+1} = (a_n)^{b_n} + 1, n \geqslant 1.$$

试求出具有下列性质的所有不小于3的整数m: 若数列$\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}, n = 1, 2, 3, \cdots$是最终周期的, 则一定存在正整数$q$, u, v, 其中$2 \leqslant q \leqslant m-1$, 使得数列$\{b_{u+vt} (\mathrm{mod}\ q)\}$, $t = 1, 2, \cdots$是纯周期的.

注: 若存在正整数N及l, 使得$x_{n+l} = x_n$对任意$n \geqslant N$都成立, 则称$\{x_n\}(n \geqslant 1)$是最终周期的. 若$N = 1$, 则称该数列是纯周期的.

6. 给定正整数n, 求最大的常数λ, 使得对所有满足

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 2)^n \geqslant \prod_{i=1}^{2n} x_i$$

的正实数$x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$,都有

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (x_i + 1)^n \geqslant \lambda \prod_{i=1}^{2n} x_i.$$

第52届国际数学奥林匹克中国国家队选拔考试三

第一天

2011年3月27日上午8:00——12:30

1. 给定整数$n \geqslant 3$, 求最大的实数M, 使得对任意正实数列$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都存在其一个排列$y_1, y_2, \cdots, y_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{y_{i+1}^2 - y_{i+1}y_{i+2} + y_{i+2}^2} \geqslant M,$$

其中$y_{n+1} = y_1$, $y_{n+2} = y_2$.

2. 给定正整数$n > 1$, 设k为n的不同素因子个数, 求证存在整数a, 满足

$$1 < a < \frac{n}{k} + 1, \quad \text{且} \quad n | a^2 - a.$$

3. 设简单图$\mathbb{G}$的顶点数为$3n^2$(整数$n \geqslant 2$). 已知$\mathbb{G}$的每个顶点的度不超过$4n$, 至少有一个顶点的度为1, 且任意两个不同顶点之间都有一条长度不超过3的路径. 证明: $\mathbb{G}$的边数的最小值s为

$$s = \frac{7n^2}{2} - \frac{3n}{2}.$$

注: 图$\mathbb{G}$的两个不同顶点u, v之间的一条长度为k的路径是指一个顶点序列$u = v_0$, v_1, $\cdots$, $v_k = v$, 其中v_i与v_{i+1}相邻, $i = 0, 1, \cdots, k-1$.

第二天

2011年3月28日上午8:00——12:30

4. 设H是锐角$\triangle ABC$的垂心, P是其外接圆弧$\overset{\frown}{BC}$上一点, 连接PH交$\overset{\frown}{AC}$于点M, 弧$\overset{\frown}{AB}$上有一点K, 使得直线KM平行于点P关于$\triangle ABC$的西摩松线, 弦PQ平行于边BC, 弦KQ交边BC于点J. 求证: $\triangle KMJ$是等腰三角形.

5. 设a_1, a_2, $\cdots$为全体正整数的一个排列, 求证:满足$(a_i, a_{i+1}) \leqslant \dfrac{3i}{4}$的正整数$i$有无穷多个.

6. 直角坐标平面上的一个点列$(A_0, A_1, \cdots, A_n)$称为"有趣的", 如果每个A_i的横坐标和纵坐标都是正整数, 直线OA_0, OA_1, $\cdots$, OA_n的斜率严格递增(O是原点), 并且三角形$OA_iA_{i+1}(0 \leqslant i \leqslant n-1)$的面积均为$\dfrac{1}{2}$.

在一个点列$(A_0, A_1, \cdots, A_n)$的某相邻两点A_i, A_{i+1}之间插入一个点A, 满足$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+1}}$, 则新点列$(A_0, A_1, \cdots, A_i, A, A_{i+1}, \cdots, A_n)$为原点列的一次扩张.

设$(A_0, A_1, \cdots, A_n)$与$(B_0, B_1, \cdots, B_m)$是任意两个有趣点列. 证明: 若$A_0 = B_0$, $A_n = B_m$, 则可对两个点列分别作有限次扩张得到相同的点列.