

2011 年第 52 届 IMO 解答

1、对于四个不同的正数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ，定义 $S_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 。并设恰好有 n_A 对 $(i, j), 1 \leq i < j \leq 4$ 使得 $a_i + a_j \mid S_A$ 。求所有的集合 A ，使得 n_A 达到最大值。

解：不失一般性假设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ，则 $S_A > a_4 + a_3 > a_4 + a_2 > \frac{1}{2}S_A$ ，因此 $n_A \leq 4$ 。

若 $n_A = 4$ ，则有 $a_1 + a_2 \mid S_A$ ， $a_1 + a_3 \mid S_A$ ， $a_1 + a_4 \mid S_A$ ， $a_2 + a_3 \mid S_A$ 。因此只能有 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ ， $a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4$ ， $a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4$ 。

令 $m(a_1 + a_3) = a_2 + a_4 = a_2 + (a_2 + a_3 - a_1)$ ，则 $m \geq 2$ 。整理可得 $(m+1)a_1 + (m-1)a_3 = 2a_2 < 2a_3$ ，因此只能有 $m=2$ ，因此 $a_3 = 2a_2 - 3a_1$ ，故 $a_4 = 3a_2 - 4a_1$ 。

令 $k(a_1 + a_2) = a_3 + a_4 = 5a_2 - 7a_1$ ，则 $k > m = 2$ ，整理可得 $(k+7)a_1 = (5-k)a_2$ ，故只能有 $k = 3, 4$ 。

令 $a_1 = c$ ，则 $k=3$ 时， $A = \{c, 5c, 7c, 11c\}$ ； $k=4$ 时， $A = \{c, 11c, 19c, 29c\}$ 。容易验证它们都满足要求。

综上所述， $A = \{c, 5c, 7c, 11c\}$ 和 $A = \{c, 11c, 19c, 29c\}$ 是全部解，其中 c 为任意正整数。

（此题全场平均 5.35 分，中国队平均 7 分）

2、 S 有平面上 $n \geq 2$ 个点组成，其中任意三点不共线。所谓“风车”石子这样一个过程：从只经过 S 中的一个点 P 的一条直线 l 出发，以 P 为中心顺时针旋转，直到首次遇到一个 S 的点，记作 Q 。接着这条直线以 Q 为中心顺时针旋转，直到首次遇到一个 S 的点，在更换此点为新的中心，这样的过程无限持续下去。求证：可以适当的选择 S 中的一个点 P ，以及一条过 P 的直线 l ，使得由此形成的“风车”将 S 的每个点都无限次用作旋转中心。

定义：任取一条过 P 的有向直线 l ，当 l 的箭头顺时针的 180° ，所扫描到的区域称为 l 下方，另一半区域称为 l 上方。记 l 下方点数减去 l 上方点数为 Δ 。

以下直线均指有向直线，两直线平行是指它们方向相同，显然对于过 S 中点的不同直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $\Delta_1 \neq \Delta_2$ 。

引理：对于 S 中任意一点 P ，都有一条只过 S 中点 P 的有向直线 l ，使得 $\Delta = 0$ 或 1 ，并使得 l 与 S 中任意两点连线不平行。称此直线 l 为 P 的好线。

证明：任取一条过只经过 S 中点 P 的直线 l ，不妨设 $\Delta \geq 2$ ，则旋转 l 的 180° 时， Δ 变成 $-\Delta$ ，由于每次越过一个点时 $\Delta \pm 2$ ，也即相邻两个 Δ 之差为 2 ，所以在从 $\Delta \geq 2 \rightarrow \Delta \leq -2$ 过程中，必有一个时刻使得 $\Delta = 0$ 或 1 。

由于在遇到新的点前 Δ 不变，而 S 中任意两点连线只有有限条，因此可以取到与 S 中所有连线不平行的好线。事实上对于任意好线， $|S|$ 为偶数时 $\Delta = 1$ ， $|S|$ 为奇数时 $\Delta = 0$ 。

原题证明：设 S 的点为 P_1, P_2, \dots, P_n ，每个点都取一个好线的方向 l_1, l_2, \dots, l_n 。

取点 P_1 ，我们取它的一条好线为 l_1 开始转动“风车”。每次更换旋转中心的前后瞬间 Δ 保持不变，所以在整个过程中，只要直线只经过 S 的一个点时， Δ 一直是常数。而风车的方向与 l_1 的夹角是连续递增的，因此每个方向都会出现无限多次，因此每个方向 l_i 都会出现无限多次，而每次风车方向为 l_i 时，由于它只过 S 中一个点，且 $\Delta = 0, 1$ ，故此时它只经过 S 中的一个点 P_i ，所以每个点无限次作为中心。

（此题全场平均 0.65 分，中国队平均 2 分）

3、函数 $f: R \rightarrow R$ ，对于任意实数 x, y ，都有 $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ 。求证：对于任意 $x \leq 0$ ，都有 $f(x) = 0$ 。

证明：若 $f(x) \equiv 0$ ，则结论成立，以下 $f(x) \not\equiv 0$ 。

假设存在 a 使得 $f(a) > 0$ ，取 $y = -1 - \frac{f(f(a))}{f(a)}$ ，则 $f(a+y) \leq -f(a) < 0$ ，所以总

是存在一个实数 b ，使得 $f(b) < 0$ 。

取 $x = x, y = z - x$ 可得 $f(z) \leq (z-x)f(x) + f(f(x))$ (*)。因此 $f(z) \leq (z-b)f(b) + f(f(b))$ ，所以 $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = -\infty$ 。

若存在 a 使得 $f(a) > 0$ ，则由 (*) 有 $f(z) \leq (z-a)f(a) + f(f(a))$ ，因此 $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = -\infty$ 。取 $y = -x$ 可得 $f(0) \leq -xf(x) + f(f(-x))$ ，而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-xf(x) + f(f(-x))] = -\infty$ ，矛盾。因此，对于任意实数 x ，都有 $f(x) \leq 0$ 。

取 $y = f(x) - x$ 可得 $f(f(x)) \leq (f(x)-x)f(x) + f(f(x))$ ，因此对于任意实数 x 都有 $xf(x) \leq f(x)^2$ ，因此当 $f(x) \neq 0$ 时，有 $x \geq f(x)$ 。

对于任意实数 $c < -\sqrt{-f(0)} \leq 0$ ，若 $f(c) < 0$ ，则 $0 > c \geq f(c)$ ，因此有 $|c| \leq |f(c)|$ 。在原式中取 $y = -c, x = c$ 可得 $f(0) \leq -cf(c) + f(f(c)) \leq -cf(c) < 0$ ，故 $|f(0)| \geq |c||f(c)| \geq |c|^2 > |f(0)|$ ，矛盾。因此对于任意 $x < -\sqrt{-f(0)}$ ，都有 $f(x) = 0$ 。

取 $M = -\sqrt{-f(0)} - 1$ ，则 $f(M) = 0$ ，原式中取 $x = M, y = 0$ 可得 $0 = f(M) \leq f(f(M)) = f(0)$ ，因此只能有 $f(0) = 0$ 。

对于任意 $x < 0$ ，令 $y = -x$ 可得 $0 = f(0) \leq -xf(x) + f(f(x)) \leq -xf(x) \leq 0$ ，只能等号成立，因此 $f(x) = 0$ 。

综上所述，对于任意 $x \leq 0$ ，都有 $f(x) = 0$ 。

(此题全场平均 1.05 分，中国队平均 7 分)

4、 n 是一个正整数，有一个天平以及 n 个重量分别为 $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ 的砝码。现在通过 n 次操作逐个将每个砝码都放上天平，每次操作都是将一个尚未放上天平的砝码放在天平的右边或者左边，并且要求天平右边的重量始终不超过天平左边的重量。请问有多少种不同的操作过程？

解：设有 a_n 种不同的操作过程，显然 $a_1 = 1$ 。

对于任意 $n \geq 2$ ，考虑最轻的砝码 2^0 ，去掉这个砝码产生的过程仍然保持右边的重量始终不超过天平左边的重量，对应 a_{n-1} 种方法。而对于任意满足天平右边的重量始终不超过天平左边的重量将 $2^1, \dots, 2^{n-1}$ 逐个放上天平的放法，如果 2^0 可以插在 n 个位置，如果 2^0 插在第一次前面，则只能放在天平的左边；如果插在其它位置由于之前左边总量至少比右边总量大 2，因此无论放在左边还是右边都满足要求，因此 2^0 共有 $1 + 2(n-1) = 2n-1$ 种插入的方法，所以 $a_n = (2n-1)a_{n-1}$ ，因此 $a_n = (2n-1)!!$ 。

解 2：每次只要已经放在天平上的砝码中最重的砝码在左边即可。假设第 i 次操作 2^{n-i} ，则只能放在左边，这时只要前 $i-1$ 次满足要求即可，后面的 $n-i$ 个砝码可以随意摆放，因此

$$a_n = \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} a_{i-1} (n-i)! 2^{n-i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{i-1} 2^{n-i} (n-1)!}{(i-1)!} = a_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1} 2^{n-i} (n-1)!}{(i-1)!}。所以$$

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i-1} 2^{n-1-i} (n-2)!}{(i-1)!} = a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-1} = (2n-1)a_{n-1}$$

由于 $a_1 = 1$ ，因此 $a_n = (2n-1)!!$ 。

（此题全场平均 4.06 分，中国队平均 7 分）

5、设 f 是定义在整数集取值为正整数的函数，已知对于任意两个整数 $m \neq n$ ， $f(m-n) \mid f(m) - f(n)$ 。求证：对于任意整数 m, n ， $f(m) \leq f(n) \Rightarrow f(m) \mid f(n)$ 。

证明：由已知 $f(m-0) \mid f(m) - f(0)$ ，因此 $f(m) \mid f(0)$ 对于任意整数 m 都成立。

由于 $f(0-n) \mid f(0) - f(n)$ ，因此 $f(-n) \mid f(n)$ ， $n \rightarrow -n$ 可得 $f(n) \mid f(-n)$ ，因此对于任意整数 n ，都有 $f(-n) = f(n)$ 。

若结论不成立，则存在 m, n ，使得 $f(m) < f(n)$ ，但是 $f(n)$ 不是 $f(m)$ 的倍数。由于 $f(m+n) \mid f(m) - f(-n) = f(m) - f(n)$ ，因此 $f(m+n) \leq f(n) - f(m)$ (*)。

由于 $f(m) \mid f(m+n) - f(n)$ ，所以 $f(m+n)$ 也不是 $f(m)$ 的倍数，故 $f(m+n) \neq f(m)$ 。

由于 $f(n) \mid f(m+n) - f(m)$ ，因此 $f(n) \leq f(m+n) - f(m)$ 。

由于 $f(m+n) < f(n)$ ，因此只能有 $f(m+n) < f(m)$ ，所以 $f(n) \leq f(m) - f(m+n)$ ，与(*)相加可得 $2f(m+n) \leq 0$ ，矛盾。

综上所述，结论成立。例如 $f(\text{odd}) = a$ ， $f(\text{even}) = ab$ ， $f(0) = abc$ 。

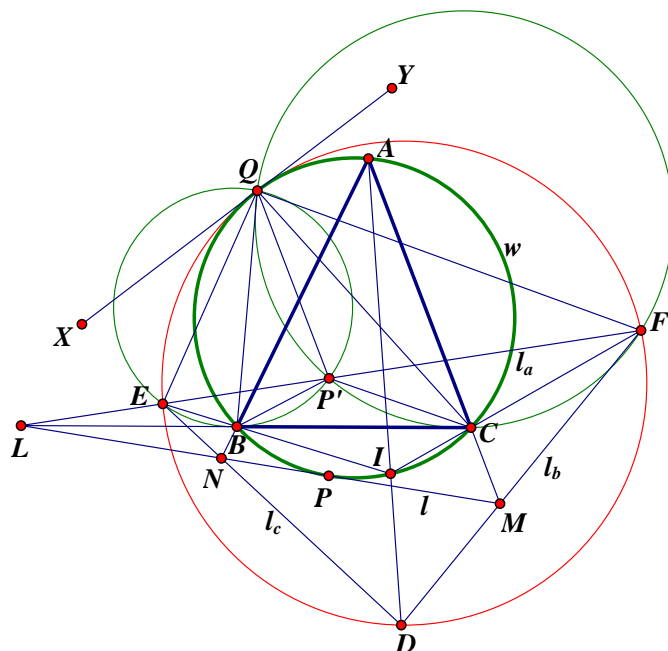
证明 2：若 $f(n) \mid f(kn)$ ，则由于 $f(n) \mid f((k+1)n) - f(kn)$ ，故也有 $f(n) \mid f((k+1)n)$ ，同样由于 $f(n) \mid f(kn) - f((k-1)n)$ ，故也有 $f(n) \mid f((k-1)n)$ 。由于 $f(n) \mid f(n)$ ，所以 $f(n) \mid f(kn)$ 对于任意整数 k 都成立。也即对于任意 $x \mid y$ ，都有 $f(x) \mid f(y)$ ，当然也有 $f(x) \leq f(y)$ 。设 $(m, n) = d$ ，则存在 x, y 使得 $d = xm + yn$ ，故 $f(xm) \mid f(d) - f(yn)$ ， $f(yn) \mid f(d) - f(mx)$ ，注意到 $f(xm) \geq f(d)$ ， $f(yn) \geq f(d)$

若 $f(yn) \leq f(xm)$ ，则只能有 $f(d) = f(yn)$ ，由于 $f(d) \leq f(n) \leq f(yn)$ ，故 $f(n) = f(d) \leq f(m)$ ，所以只能有 $f(n) = f(m)$ ，结论成立。

若 $f(yn) > f(xm)$ ，则 $f(d) = f(xm)$ ，故 $f(m) = f(d)$ ，由于 $f(d) \mid f(n)$ ，故 $f(m) \mid f(n)$ 。

(此题 IMO 平均 3.26 分，中国队平均 7 分)

6、设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω ， l 是 ω 的一条切线，记 l 关于 BC, CA, AB 的对称直线分别为 l_a, l_b, l_c 。求证：直线 l_a, l_b, l_c 构成的三角形的外接圆与圆 ω 相切。



证明：设 l 与直线 l_a, l_b, l_c 交于 L, M, N ， l_a, l_b, l_c 两两交于 D, E, F ，由已知 LB 平分 $\angle ELN$ ， NB 平分 $\angle MNE$ ，因此 B 是 $\triangle LNE$ 的旁心，所以 EB 平分 $\angle FED$ 。同理 DA 平分 $\angle EDF$ ， FC 平分 $\angle EFD$ ，所以 DA, EB, FC 交于 $\triangle DEF$ 的内心 I 。

由于 A 是 $\triangle DMN$ 的旁心，因此 $\angle BAC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ENM - \frac{1}{2}\angle FMN = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle NDM = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EDF$ ，又因为 $\angle BIC = \angle EIF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle EDF = 180^\circ - \angle BAC$ ，所以 I 在圆 ω 上。

设 P 关于 BC 的对称点为 P' ，则 P' 在 EF 上，设 $\triangle P'CF$ 的外接圆与 $\triangle P'BE$ 的外接圆交于 Q ，则 $\angle BQC = \angle BQP' + \angle CQP' = \angle BEP' + \angle CFP' = 180^\circ - \angle BIC$ ，所以 Q 在圆 ω 上。

由于 $\angle BP'C = \angle BPC = \angle BIC = \angle EIF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle EDF$ ，所以 $\angle EQF = \angle EQP' + \angle FQP' = \angle IBP' + \angle ICP' = 360^\circ - 2\angle BIC = 180^\circ - \angle EDF$ ，所以 Q 也在 $\triangle DEF$ 的外接圆 c_1 上。

过 Q 作 ω 的切线 XY ，由对称性 $\triangle P'BC$ 的外接圆与 EF 切于 P' ，故 $\angle FP'C = \angle P'BC$ 。因此 $\angle YQF = \angle YQC - \angle FQC = \angle QBC - \angle FP'C = \angle QBP' = \angle QEF$ ，所以 XY 也是圆 c_1 是切线。因此，圆 c_1 与圆 ω 相切于 Q 。

（此题 IMO 平均 0.32 分，此题全场 6 个满分，中国队平均 1.33 分）