2011年清华金秋营数学试题

1. 求 $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$ 的值．

2. 定义符号 $\mathrm{Ord}_p(n)$(其中n为整数，p 为素数)满足：若 $\mathrm{Ord}_p(n)=m$ 则表示 $p^m|n$ 并且 $p^{m+1}\nmid n$．定义 $S_p(n)$ 表示 n 在 p 进制表示下各位数字之和．

   (a) 求证：$\mathrm{Ord}_p(n!)=\dfrac{n-S_p(n)}{p-1}$．

   (b) 利用(a)中结论证明 $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ 为整数．

   (c) 利用(a)中结论证明 $\dfrac{(n(m+1))!}{(mn)!(n+1)!}$ 为整数．

3. 原有的乘法交换律为 $xy=yx$，现定义新的乘法交换律为$yx=pxy$，而乘法结合律和分配率保持不变．例如

$$(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=x^2+(p+1)xy+y^2$$

   (a) 设 $(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}x^{n-k}y^k$，求证 $a_{n,k}$ 是以 q 为变元的整系数多项式．

   (b) 求 $a_{n,k}$．

4. 设 $\varepsilon_n=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$，试求$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{1-\varepsilon_n^k t}$，$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{1-\varepsilon_n^k}$，$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{(1-\varepsilon_n^k)(1-\varepsilon_n^{-k})}$．