

## 第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

### (非数学类 2011)

一、(本大题共4小题, 每小题6分, 共24分)

计算下列各题(要求写出重要步骤)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$

(2) 设  $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

(3) 求  $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ .

(4) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的和函数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$  的和.

二、(本题共16分) 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  为数列,  $a, \lambda$  为有限数, 求证:

(1) 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ .

(2) 如果存在正整数  $p$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$ .

三、(本题共15分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有连续的三阶导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ . 求证: 在开区间  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $f'''(x_0) = 3$ .

四、(本题共15分) 在平面上, 有一条从点  $(a, 0)$  向右的射线, 其线密度为  $\rho$ , 在点  $(0, h)$  处 (其中  $h > 0$ ) 有一质量为  $m$  的质点, 求射线对该质点的引力.

五、(本题共15分) 设  $z = z(x, y)$  是由方程

$$F\left(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}\right) = 0$$

确定的隐函数, 且具有连续的二阶偏导数, 求证:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ 和 } x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

六、(本题共15分) 设函数  $f(x)$  连续,  $a, b, c$  为常数,  $\Sigma$  是单位球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS. \text{ 求证: } I = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u) du.$$