

2011年第三届中国大学生数学竞赛试题(数学类)

1. (本题15分)已知四点 $A(1, 2, 7), B(4, 3, 3), C(5, -1, 6), D(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$, 求过这四点的球面方程.

2. (本题10分) $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在一点 $\xi \in [0, 1]$ 使得,

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

3. (本题15分)设 \mathbb{F}^n 是数域 \mathbb{F} 的 n 维列空间, $\delta: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ 是一个线性变换, 若对 \mathbb{F} 上的任意 n 阶方阵 A , 都有 $\delta(A\alpha) = A\delta(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{F}^n$, 证明: $\delta = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{F}^n}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{F}$, $\text{id}_{\mathbb{F}^n}$ 为 \mathbb{F}^n 上的恒等变换.

4. (本题10分)对于 $\triangle ABC$, 求 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 的最大值.

5. (本题15分)证明对于任意的实数 α , 存在取值于 $\{-1, 1\}$ 的数列 $\{a_k\}$ 使得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n + a_k} - n^{3/2} \right) = \alpha.$$

6. (本题20分)设 A 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵, 求证: A 相似于下述矩阵 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 可逆矩阵, C 是幂零矩阵, 即存在自然数 m 使得 $C^m = 0$.

7. (本题15分)已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0$$

求证: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t) \sin(xt) dt = 0$.