2011 北方数学奥林匹克邀请赛

第一天

2011 年 7 月 27 日 9:00——12:00

一、设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}, n\in\mathbb{N}^{+}$，设$b_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$。

(1) 试求b_{n+2}, b_{n+1}与b_n的递推关系；

(2) 求a_{2011}整数部分的个位数字.

二、设$\triangle ABC$的内切圆分别切BC、CA、AB于D、E、F点，P为内切圆内一点，线段PA、PB、PC交内切圆于点X、Y、Z，求证：DX、EY、FZ三条直线相交于一点。

三、求不定方程$1+2^x\cdot 7^y=z^2$的全部正整数解(x,y,z)。

四、设n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合$A=\{1,2,\cdots,29\}$的一个分划，且$A_i(i=1,2,\cdots,n)$中任意个元素之和都不等于30，求n的最小可能值。

第二天

2011 年 7 月 28 日 9:00——12:00

五、若正整数a, b, c满足$a^2+b^2=c^2$，则称(a, b, c)为勾股数组，求所有含30的勾股数组。

六、过圆外点P引圆O的切线PA和割线PBC，AD垂直PO于点D，求证：AC是$\triangle ABD$外接圆的切线 .

七、在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{1}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}+\frac{1}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}+\frac{1}{1+\cos^2 C+\cos^2 A} \leq 2$$

八、设n是正整数，实数x满足

$$|1-|2-|3-\cdots|(n-1)-|n-x||\cdots|||=x$$

求x的值。