2011 北方数学奥林匹克邀请赛

第一天

2011 年 7 月 27 日 9:00——12:00

一、设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}, n\in\mathbb{N}^+$，设$b_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$。

(1) 试求b_{n+2}, b_{n+1}与b_n的递推关系；

(2) 求a_{2011}整数部分的个位数字.

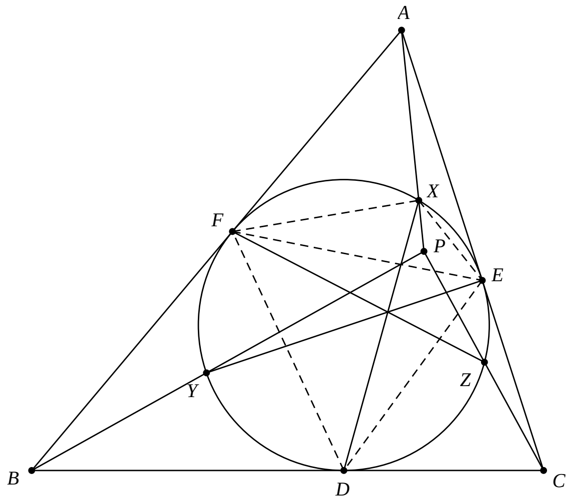
解: 由题目条件有

$$b_n=(5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n$$

逆用特征值法知$b_{n+2}=10b_{n+1}-b_n$.

由于$b_1=10, b_2=98$, 所以b_n都是正整数. 显然$a_n>1$, 因此a_n的整数部分为b_n-1, 而由$b_{n+2}=10b_{n+1}-b_n$知$b_{2011}\equiv(-1)^{1005}b_1\equiv 0 \pmod{10}$, 所以$b_{2011}-1$的个位数字为9即$a_{2011}$整数部分的个位数字为9.

二、设△ABC的内切圆分别切BC、CA、AB于D、E、F点，P为内切圆内一点，线段PA、PB、PC交内切圆于点X、Y、Z，求证：DX、EY、FZ三条直线相交于一点。



证明: 由角元塞瓦定理逆定理只需要证明

$$\frac{\sin FXD}{\sin XDE}\frac{\sin EFZ}{\sin ZFD}\frac{\sin DEY}{\sin YEF}=1 \iff \frac{FX}{XE}\frac{EZ}{ZD}\frac{DY}{YF}=1$$

在△AFX中利用正弦定理有$\dfrac{FX}{\sin BAP}=\dfrac{AX}{\sin AFX}$; 同理在△$AEX$中利用正弦定理有$\dfrac{EX}{\sin PAC}=\dfrac{AX}{\sin XEA}$. 两个式子相比得$\dfrac{FX\sin PAC}{EX\sin BAP}=\dfrac{\sin XEA}{\sin AFX}$, 而$AF, AE$为切线, 所以$\angle XEA=\angle XDE, \angle XFA=\angle XDF$, 所以

$$\frac{FX\sin PAC}{EX\sin BAP}=\frac{\sin XEA}{\sin AFX}=\frac{\sin XDE}{\sin XDF}=\frac{EX}{FX}\Longrightarrow\frac{\sin PAC}{\sin BAP}=\frac{EX^2}{FX^2}$$

同理可得

$$\frac{\sin ACP}{\sin PCB}=\frac{EZ^2}{DZ^2}, \frac{\sin CBP}{\sin PBA}=\frac{DY^2}{FY^2}.$$

又由AP, BP, CP三点共线及塞瓦定理角元形式有

$$\frac{\sin PAC}{\sin BAP}\frac{\sin ACP}{\sin PCB}\frac{\sin CBP}{\sin PBA}=1$$

从而$\frac{FX}{XE}\frac{EZ}{ZD}\frac{DY}{YF}=1$, 证毕.

三、求不定方程$1+2^x\cdot 7^y=z^2$的全部正整数解(x,y,z)。

证明: 当x为正整数时, z为奇数, 设$z=2w+1$, 则$w>1$, 有$w(w+1)=2^{x-2}\cdot 7^y$.由于$(w,w+1)=1$,所以要么$w=2^{x-2}, w+1=7^y$;要么$w=7^y, w+1=2^{x-2}$.

当$w=2^{x-2}, w+1=7^y$时,此时$w=7^y-1$必然是6的倍数,这与$w=2^{x-2}$矛盾.

当$w=7^y, w+1=2^{x-2}$时,即$2^{x-2}-7^y=1$.由$y>0$,两边模7知$x-2$是3的倍数.设$x-2=3l$,则$8^l-7^y=1$而

$$8^l-1=7(8^{l-1}+8^{l-2}+\cdots+8+1)$$

如果$y=1$, 此时$x-2=3$, 得$(x,y,z)=(5,1,15)$为一组正整数解.

如果$y>1$, 则$8^{l-1}+8^{l-2}+\cdots+8+1$被7整除, 从而$l$是7的倍数. 令$l=7m$, 则有

$$7^y=8^l-1=2^{21m}-1=(2^7-1)(2^{21m-7}+\cdots+2^7+1)$$

而$2^7-1=127$不是7的倍数, 矛盾.

综上所述, 全部正整数解为$(x,y,z)=(5,1,15)$.

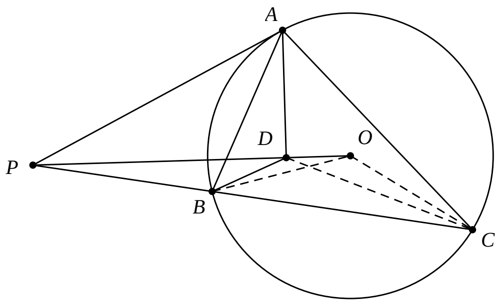
四、设n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$是集合$A=\{1,2,\cdots,29\}$的一个分划，且$A_i(i=1,2,\cdots,n)$中任意个元素之和都不等于30，求n的最小可能值。

第二天

2011 年 7 月 28 日 9:00——12:00

五、若正整数a,b,c满足$a^2+b^2=c^2$，则称(a,b,c)为勾股数组，求所有含30的勾股数组。
讨论太繁略

六、过圆外点P引圆O的切线PA和割线PBC，AD垂直PO于点D，求证：AC是$\triangle ABD$外接圆的切线 .



证明:这个做法需要讨论点B与直线OP的位置,这里只证明点B在直线OP下方的情形;在直线OP上时是显然的,点B在直线OP上方时是类似的.如图,连结OB,OC,CD,由题意显然有$AP^2=PB\cdot PC$.又连接OA,则$OA\perp AP$,而$AD\perp PO$,此时显然有

$$AP^2=PD\cdot PO\Longrightarrow PD\cdot PO=PB\cdot PC$$

于是D,O,B,C四点共圆.为方便,设$\angle PAB=\alpha,\angle BAD=\beta,\angle DAC=\gamma$,则

$$\angle OCB=\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma,\angle ABO=\frac{\pi}{2}-\alpha,\angle AOP=\alpha+\beta,\angle ACB=\alpha$$

所以$\angle AOB=2\alpha$.于是$\angle DOB=\angle AOB-\angle AOP=\alpha-\beta$(这个值得正负就是为什么要分情况讨论的原因),因此由D,O,B,C四点共圆有

$$\angle DCB=\angle DOB\Longrightarrow\angle DBO=\angle DCO=\angle OCB-\angle DCB=\frac{\pi}{2}-\alpha-\gamma$$

于是$\angle ABD=\angle ABO-\angle DCB=\alpha=\angle DAC$,所以$AC$是$\triangle ABD$外接圆的切线.

七、在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{1}{1+\cos^2A+\cos^2B}+\frac{1}{1+\cos^2B+\cos^2C}+\frac{1}{1+\cos^2C+\cos^2A}\le 2$$

证明:见评论处

八、设n是正整数，实数x满足

$$|1-|2-|3-\cdots|(n-1)-|n-x||\cdots|||=x$$

求x的值。

解:$x=\dfrac{1}{2}$